4. Topologie-Übung

Joachim Breitner

14. November 2007

Aufgabe 1

Es gibt auf der Menge $X := \{1, 2, 3\}$ folgende Topologien, geordnet nach Zahl der Elemente:

- $\{\emptyset, X\}$
- $\{\emptyset, X, \{a\}\}$, für $a \in X$ (3 Möglichkeiten)
- $\{\emptyset, X, \{a, b\}\}$, für $a \neq b \in X$ (3 Möglichkeiten)
- $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, für $a \neq b \in X$ (6 Möglichkeiten)
- $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, für $a, b, c \in X$ paarweise verschieden (3 Möglichkeiten)
- $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, für $a \neq b \in X$ (3 Möglichkeiten)
- $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, für $a, b, c \in X$ paarweise verschieden (3 Möglichkeiten)
- $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, für $a, b, c \in X$ paarweise verschieden (6 Möglichkeiten)
- $\mathcal{P}(X)$

Insgesamt gibt es also 29 verschiedene Topologien auf X.

Aufgabe 2

Behauptung: Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Dann gilt: A ist offen und abgeschlossen genau dann, wenn $\partial A = \emptyset$.

$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$, $\mathring{A} = \bigcup_{U \subset A,\ U \text{ offen}} U$, $\bar{A} = \bigcap_{A \subset U,\ U \text{ abg.}} U$,

„$\Longrightarrow$“: A offen, also $A = \mathring{A}$, A abgeschlossen, also $A = \bar{A}$, also gilt $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus A = \emptyset$.

„$\Longleftarrow$“: $\bar{A} \setminus \mathring{A} = \emptyset \implies \bar{A} = \mathring{A} \implies A \subseteq \bar{A} = \mathring{A} \subseteq A \implies A$ ist offen und abgeschlossen.

Behauptung: $x \in \partial A$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von X gilt: $U \cap A \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

„$\Longrightarrow$“: $x \in \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. Sei U eine Umgebung von x, die o.B.d.A offen ist.

1. Fall: $x \in A$, also $U \cap A \neq \emptyset$.

   Annahme: $U \cap (X \emptyset A) \neq \emptyset \implies U \subseteq A \implies x \in \mathring{A} \implies x \in \bar{A} \setminus \mathring{A} \wedge x \in \mathring{A}$ `

2. Fall: $x \notin A$, also $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

   Annahme: $U \cap A = \emptyset \implies A \subseteq X \setminus U$, also $X \setminus U$ ist abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält, also $x \in X \setminus U$, im Widerspruch zu $x \in U$.

„$\Longleftarrow$“: $x \notin \mathring{A}$, denn wäre $x \in \mathring{A}$, so wäre $\mathring{A}$ eine Umgebung von x, also nach Vorraussetzung $\mathring{A} \cap (X \setminus A) \neq 0$, im Widerspruch zu $\mathring{A} \subseteq A$.

$x \in \bar{A}$, denn wäre $x \notin \bar{A}$, so wäre $X \setminus \bar{A}$ offen und eine Umgebung von x, also gälte $(X \setminus \bar{A}) \cap A \neq \emptyset$, im Widerspruch zu $\bar{A} \supseteq A$.

Also gilt: $x \in \bar{A} \setminus \mathring{A} = \partial A$.

Aufgabe 3

$A \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt Zariski-abgeschlossen, wenn es $P_i \in \mathbb{C}^n[X_1, \dots, X_n]$, $i \in I$ gibt mit $A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall i \in I : P_i(z) = 0\}$.

$A \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt Zariski-offen, genau dann, wenn $\mathbb{C}^n \setminus A$ Zariski-abgeschlossen ist.

Behauptung: Das ist eine Topologie auf $\mathbb{C}^n$.

- $\mathbb{C}^n$ und $\emptyset$ sind Zariski-offen, da $\emptyset$ Nullstellenmenge von $P(z) := 1$ und $\mathbb{C}^n$ Nullstellenmenge von $P(z) := 0$ ist.

- Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie Zariski-offener Mengen. dann ist $\bigcup_{i\in I} U_i$ auch Zariski-offen:

  Für jedes $i \in I$ gilt: U_i ist Zariski-offen, also gibt es Polynome $P_{ij} \in \mathbb{C}^n[X_1, \dots, X_n]$, $i \in I$, $j \in J_i$, mit

  $$\mathbb{C}^n \setminus U_i = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall j \in J_i : P_{ij}(z) = 0\}\,.$$

  Also ist

  $$\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} (X \setminus U_i) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \forall i \in I\ \forall j \in J_i : P_{ij}(z) = 0\}$$

  Zariski-abgeschlossen, und damit $\bigcup_{i\in I} U_i$ Zariski-offen.

- Seien U, V Zariski-offene Teilmengen. Dann ist $U \cap V$ auch Zariski-offen:

  U ist Zariski-offen, also ist $\mathbb{C}^n \setminus U$ ist Nullstellenmenge einer Familie von Polynomen P_i, $i \in I$: $U = \mathbb{C}^n \setminus \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall i \in I : P_i(z) = 0\} = \mathbb{C}^n \setminus \bigcap_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}(\mathbb{C}^n \setminus U_i)$, wobei $U_i = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P_i = 0\}$.

  Analog ist $V = \bigcup_{i\in J}(\mathbb{C}^n \setminus V_j)$, wobei $V_j = \{z \in \mathbb{C}^n \mid Q_j(z) = 0\}$.

  Damit ist $\mathbb{C}^n \setminus (U \cap V) = \bigcap_{i\in I, j\in J}(U_i \cup V_j) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall (i,j) \in I \times J : P_{ij}(z) = 0\}$, wobei $P_{ij} = P_i \cdot Q_j$. Also ist $\mathbb{C}^n \setminus (U \cap V)$ abgeschlossen und $U \cap V$ offen. ■

Auf $\mathbb{C}$ sind Zariski-offene Mengen sind dann gerade die Komplemente endlicher Mengen, das heißt: $\mathbb{C}$ ist nicht hausdorff'sch bezüglich dieser Topologie.

Behauptung: $\mathcal{B} \coloneqq \{U \subset \mathbb{C}^n \mid U$ ist Komplement einer Nullstellenmenge eines einzelnen Polynoms$\}$

Sei U offen, dann ist $\mathbb{C}^n \setminus U = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall i \in I : P_i(z) = 0\}$ mit $P_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $i \in I$. Dann ist

$$\mathbb{C}^n \setminus U = \bigcap_{i\in I} \underbrace{\{z \in \mathbb{C} \mid P_i(z) = 0\}}_{B_i \coloneqq} = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{C}^n \setminus B_i)$$

mit $(\mathbb{C}^n \setminus B_i) \in \mathcal{B}$, also ist U Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Aufgabe 4

Betrachte die Topologie auf $\mathbb{Z}$, die $\{a + b\mathbb{Z} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ als Subbasis besitzt.

Behauptung: Jede Menge der Form $a+b\mathbb{Z}$, $b \neq 0$ ist abgeschlossen bezüglich dieser Topologie.

Es gilt o.B.d.A: $a + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1}((a+i) + b\mathbb{Z})$, also ist $a + b\mathbb{Z}$ komplement einer offenen Menge, also abgeschlossen.

Behauptung: $\{-1, 1\}$ ist abgeschlossen.

Es gilt: $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}}(0 + p\mathbb{Z})$, denn jedes $n \in \mathbb{Z}$ hat eine Primzahl p als Teiler, wenn $n \notin \{-1, 1\}$, also $n \in p\mathbb{Z}$. Daher ist $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ offen und $\{-1, 1\}$ abgeschlossen.

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen $\mathbb{P}$.

Annahme: $\mathbb{P}$ ist endlich. Dann wäre $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen, also wäre $\{-1, 1\}$ offen. Das ist ein Widerspruch, denn alle offenen Mengen $\neq \emptyset$ sind in dieser Topologie unendlich. $\blacksquare$