inoffizielles Skript

Geometrie der Schemata (Algebraische Geometrie II)

Gehalten von Prof. Dr. F. Herrlich im Sommersemester 2012

getippt von Aleksandar Sandic*

28. September 2017

*Aleksandar.Sandic@student.kit.edu

Inhaltsverzeichnis

Sätze

Vorwort

Über dieses Skript

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Geometrie der Schemata (Algebraische Geometrie II)“ von Prof. Dr. F. Herrlich im Sommersemester 2012 am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Prof. Dr. F. Herrlich ist für den Inhalt nicht verantwortlich. Die Vorlesung ist beendet und der Inhalt ist vollständig. Abgesehen von Designverbesserungen und eventuellen Korrekturen plane ich keine weiteren Änderungen.

Wer

Getippt wurde das Skript von Aleksandar Sandic. Es basiert auf meinem Skript zur Vorlesung Algebraische Geometrie aus dem Wintersemester 2011/12. Die Lösungen der Übungsblätter wurden teilweise von Myriam Finster, der Übungsleiterin, getippt, teilweise von mir. Die Übungsblätter wurden komplett von ihr getippt.

Wo

Link zum Skript: `http://mitschriebwiki.nomeata.de/GeoSchemata2012.html`

Link zum Mitschriebwiki: `http://mitschriebwiki.nomeata.de/`

Seite der Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/geoschemata2012s/de`

To Do

- Einträge für das Glossar sammeln.
- Ich muss Farben finden, die sich auch bei einem SW-Ausdruck unterscheiden lassen und diese als Standard definieren. Farbvergleich: Red, Green, Blue, Cyan, Magenta, Yellow, Grey. Red, Blue und Gray sind bereits reserviert (Fehler, Links und Anmerkungen). Yellow ist zu hell, Cyan ist zu nahe an Green und Magenta ist zu dunkel um sich eindeutig von Black abzuheben.

Kapitel 1

Schemata

§ 1 Garben

Definition 1.1
Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine ***Prägarbe*** $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ besteht aus einer Abbildung $\text{Off}(X) \to \text{Ob}\,\mathcal{C}$, $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ und Morphismen $\rho_U^{U'} : \mathcal{F}(U') \to \mathcal{F}(U)$ für alle $U \subseteq U'$ offen, sodass gilt:

i) $\rho_U^U = \text{id}_U$ für alle $U \in \text{Off}(X)$

ii) $\rho_U^{U''} = \rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''}$ für alle $U \subseteq U' \subseteq U''$ in $\text{Off}(X)$

Bemerkung 1.2
Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist dasselbe wie ein kontravarianter Funktoren $\mathcal{F} : \text{Off}(X) \to \mathcal{C}$.

Definition 1.3
Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ heißt ***Garbe***, wenn für jedes $U \in \text{Off}(X)$, jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von U und jede Familie $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i\in I}$ mit $\rho_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$ gilt:

Es gibt *genau ein* $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ für alle $i \in I$. Dieses s wird als ***Amalgam*** bezeichnet.

Beispiele

1) X quasi-projektive Varietät über einem Körper k, $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{A}^1(k) : f \text{ regulär}\}$ Ring der regulären Funktionen auf U.

   $\Rightarrow \mathcal{O}_X$ ist Garbe von Ringen auf X (k-Algebren)

2) X topologischer Raum, $\mathcal{C}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

   $\mathcal{C}_X$ ist Garbe von Ringen

3) Sei X topologischer Raum, G Gruppe, $\mathcal{G}(U) := G$ für alle $U \subseteq X$ offen, $\rho_U^{U'} = \text{id}_G$. Seien U, U' offen in X mit $U \cap U' = \emptyset$

   $\widetilde{U} = U \cup U'$?!

   Finde kein $g \in \mathcal{G}(\widetilde{U}) = G$ mit $g = \begin{cases} \rho_U^{\widetilde{U}}(g) &= g_1 \neq g_2 \\ \rho_{U'}^{\widetilde{U}}(g) &= g_2 \neq g_1 \end{cases}$

Bemerkung 1.4
Sei X topologischer Raum, $\mathcal{F}$ Garbe auf X. Dann ist $\mathcal{F}(\emptyset)$ einelementig.

Beweis
Überdecke $\emptyset$ durch eine leere Menge von offenen Teilmengen! Jedes $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$ erfüllt $\rho_{\emptyset}^{U_i}(s_i) = s$ für alle $i \in \emptyset$, $\emptyset = \bigcup\limits_{i \in \emptyset} U_i$. Also gibt es genau ein $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$. □

Definition 1.5
Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Prägarben auf X.

Ein ***Morphismus*** $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation der Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathrm{Off}(X) \to \mathcal{C}$, das heißt φ besteht aus Morphismen (in $\mathcal{C}$) $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für jedes $U \in \mathrm{Off}(X)$, die die folgenden Diagramme kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U') \arrow[r, "\varphi_{U'}"] \arrow[d, "\rho^{U'}_U"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & \mathcal{G}(U') \arrow[d, "\rho^{U'}_U"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"'] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd} \qquad \text{für alle } U \subseteq U' \text{ in } \mathrm{Off}(X)$$

Definition + Bemerkung 1.6
Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X.

a) Für ein $x \in X$ sei ein ***Halm*** definiert als

$$\mathcal{F}_x = \lim_{x \in U \in \mathrm{Off}(X)} \mathcal{F}(U) = \{(U, s) : x \in U \in \mathrm{Off}(X), s \in \mathcal{F}(U)\} /_{\sim}$$

wobei $(U, s) \sim (U', s') :\Leftrightarrow \exists x \in U'' \subseteq U \cap U'$ mit $\rho^U_{U''}(s) = \rho^{U'}_{U''}(s')$. $\mathcal{F}_x$ heißt ***Halm*** von F in x.

b) Für $x \in U \in \mathrm{Off}(X)$ sei $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x, s \mapsto (U, s)_\sim =: s_x$ der ***natürliche Morphismus***.

c) (UAE)
Für jedes $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und jede konsistente Familie $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to C$ von Morphismen in $\mathcal{C}$ gibt es genau einen Morphismus $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to C$ mit $\varphi_x \circ \sigma_x = \varphi_U$ für alle U

$$(U, s)_\sim \mapsto \varphi_U(s)$$

d) Jeder Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induziert für jedes $x \in X$ einen Morphismus

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, dashed, "\varphi_x"'] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

Bemerkung 1.7
Sei $\mathcal{F}$ Garbe von abelschen Gruppen auf X, $U \subseteq X$ offen, $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann gilt:

$$s = 0 \Leftrightarrow s_x = 0 \text{ für alle } x \in U$$

Beweis
„$\Rightarrow$“: ✓

„$\Leftarrow$": Für jedes $x \in U$ gibt es Umgebung U_x mit $s|_{U_x} = 0$. ($s|_{U_x} = \rho^U_{U_x}$). Die $(U_x)_{x \in U}$ bilden offene Überdeckungen, die $s|_{U_x}$ bilden konsistente Familie, s und 0 sind beides Amalgam $\xRightarrow[\text{eigenschaft}]{\text{Gruppen-}} s = 0$ □

Proposition 1.8
Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben von abelschen Gruppen auf X, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus.

a) φ_U injektiv für jedes $U \in \text{Off}(X) \Leftrightarrow \varphi_x$ injektiv für alle $x \in X$

b) φ_U surjektiv für jedes $U \in \text{Off}(X) \Rightarrow \varphi_x$ surjektiv für alle $x \in X$

c) φ_U bijektiv für jedes $U \in \text{Off}(X) \Leftrightarrow \varphi_x$ bijektiv für alle $x \in X$

Beweis

a) „$\Rightarrow$": Sei $x \in X, s_x \in \mathcal{F}$ mit $\varphi_x(s_x) = 0$.
$\exists$ Umgebung von x und $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x =$ Keim von s in x mit $\varphi_x(s_x) =$ Keim von $\varphi_U(s)$ in $x = \varphi_U(s)_s$

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[rrr, bend left, mapsto] \arrow[ddd, bend right, mapsto] & & & \varphi_U(s) \arrow[ddd, bend left, mapsto] \\
& \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] & \\
& \mathcal{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{G}_x & \\
s_x \arrow[rrr, bend right, mapsto] & & & 0
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ Œ $\varphi_U(s) = 0 \xRightarrow[\text{injektiv}]{\varphi_U} s = 0$

„$\Leftarrow$": Sei $U \subset \text{Off}(X), s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s) = 0$
$\Rightarrow$ für alle $x \in U$ ist $\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x = 0 \xRightarrow{\varphi \text{ injektiv}} s_x = 0 \xRightarrow{1.7} s = 0$

b) „$\Rightarrow$": Sei $g_x \in \mathcal{G}_x$, (U, g) Repräsentant $\Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s) = g \Rightarrow \varphi_x(s_x) = g$

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[rrr, bend left, mapsto] \arrow[ddd, bend right, mapsto] & & & \varphi_U(s) = g \arrow[ddd, bend left, mapsto] \arrow[dddr, bend left, mapsto] & \\
& \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] & & \\
& \mathcal{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{G}_x & & \\
s_x \arrow[rrr, bend right, mapsto] & & & 0 & g_x
\end{tikzcd}$$

Beispiel
Sei $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}^\times$ die Garbe der invertierbaren holomorphen Funktionen. $\varphi = \exp$, das heißt für $f \in \mathcal{O}(U)$ sei $\varphi(f) = e^{2\pi i f}$.
φ ist Garbenhomomorphisms ($e^{f+g} = e^f \cdot e^g$). φ_x ist surjektiv für jedes $x \in X$ (lokal gibt es zu jeder holomorphen Funktion ohne Nullstellen einen Logarithmus). $\varphi_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ ist nicht surjektiv! (zum Beispiel gibt es keine holomorphe Funktion $\log z$ auf ganz $\mathbb{C}$)

Schlimmer noch: φ_U ist nicht injektiv für jedes $U \in \mathrm{Off}(\mathbb{C})$, das nicht einfach zusammenhängend ist.

c) „$\Rightarrow$“: ✓

„$\Leftarrow$“: Sei $U \subseteq X$ offen, $g \in \mathcal{G}(U)$.

Für jedes $x \in U$ gibt es $s_x \in \mathcal{F}_x$ mit $\varphi_x(s_x) = g_x$. Wähle Repräsentanten $(U_x, s^{(x)})$ von s_x, sodass $\varphi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x}$ (das geht!) (*denn*: Sei $(U, \tilde{s})$ Repräsentant von $s_x \Rightarrow \varphi_U(\tilde{s}) \sim_x g|_U \Rightarrow \exists x \in U_x \subset U : \varphi_U(\tilde{s})|_{U_x} = g|_{U_x}$)

Die U_x bilden offene Überdeckungen von U, die $s^{(x)}$ bilden konsistente Familie (*)

$\Rightarrow$ Es gibt ein Amalgam $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s)|_{U_x} = \varphi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x} \Rightarrow \varphi_U(s) = g$.

(*) zu zeigen: $s^{(x)}|_{U_x \cap U_y} = s^{(y)}|_{U_x \cap U_y}$

denn: $\varphi_{U_x \cap U_y}(s^{(x)}|_{U_x \cap U_y} = \varphi_{U_x \cap U_y}(s^{(y)}|_{U_x \cap U_y}$, $\varphi_{U_x \cap U_y}$ injektiv nach Voraussetzung und a) $\Rightarrow$ Behauptung □

Proposition + Definition 1.9

Sei X topoloischer Raum, $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X (mit Werten in $\mathcal{C}$)

a) Es gibt genau eine Garbe $\mathcal{F}^+$ auf X und einen Morphismus $\vartheta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, sodass $\vartheta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^+_x$ für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus ist.

b) $\mathcal{F}^+$ heißt ***zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe***.

c) (UAE)

Für jeden Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in eine Garbe $\mathcal{G}$ gibt es genau einen Morphismus $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ mit $\varphi = \varphi^+ \circ \vartheta$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
& \mathcal{G}
\end{tikzcd}
$$

Beweis

a) Für $U \in \mathrm{Off}(X)$ sei

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^+(U) \quad := \quad & \{s : U \to \dot{\bigcup_{x \in U}} \mathcal{F}_x | s(x) \in \mathcal{F}_x \forall\ x \in X, \text{zu jedem } x \in U \\
& \text{gibt es Umgebung } U_x \text{ und } f \in \mathcal{F}(U) \text{ mit } s(y) = f_y \\
& \text{für jedes } y \in U_y\}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F}^+$ ist Garbe ✓

Sei $\vartheta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ gegeben durch

$$\boxed{\vartheta_U(f)(x) = f_x \quad (U \in \mathrm{Off}(X), f \in \mathcal{F}(U))}$$

ϑ ist Morphismus: ✓

ϑ ist Isomorphismus: ✓ □

Definition + Bemerkung 1.10

Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus von Garben abelscher Gruppen auf X.

a) Sei $\operatorname{Kern}(\varphi)$ die Prägarbe $\operatorname{Kern}(\varphi)(U) := \operatorname{Kern}(\varphi_U)$.

b) $\operatorname{Kern}(\varphi)$ ist Garbe.

c) φ heißt ***injektiv*** (oder ***Monomorphismus***) $:\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(\varphi) = 0$

$$\begin{array}{l} \mathcal{E}_1 \overset{\psi_1}{\to} \\ \mathcal{E}_2 \overset{\psi_2}{\to} \end{array} \mathcal{F} \overset{\varphi}{\to} \mathcal{G}$$

φ Monomorphismus $\Leftrightarrow \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$

d) Sei $\mathcal{B}_\varphi$ die Prägarbe $\mathcal{B}_\varphi(U) := \operatorname{Bild}(\varphi_U)$

$\operatorname{Bild}(\varphi_U) := \mathcal{B}_\varphi^+$

e) φ heißt ***surjektiv*** (oder ***Epimorphismus***) $:\Leftrightarrow \operatorname{Bild}(\varphi) = \mathcal{G}$

$$\mathcal{F} \overset{\varphi}{\to} \mathcal{G} \begin{array}{l} \overset{\psi_1}{\to} \mathcal{H}_1 \\ \overset{\psi_2}{\to} \mathcal{H}_2 \end{array}$$

φ Epimorphismus $\Leftrightarrow \psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$

Beweis

a)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U') \arrow[r, "\varphi_{U'}"] \arrow[d, "\rho_U^{U'}"'] & \mathcal{G}(U') \arrow[d, "\rho_U^{U'}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

b) Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $U \in \operatorname{Off}(X)$, $s_i \in \operatorname{Kern}(\varphi_{U_i}) \subseteq \mathcal{F}(U_i)$ konsistente Familie.

Es gibt ein Amalgam $s \in \mathcal{F}(U)$. $\varphi_x(s_x) = 0$ für jedes $x \in U \overset{1.8a)}{\Longrightarrow} \varphi_U(s) = 0$

e) $\operatorname{Bild}(\varphi) = \mathcal{G} \Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{Bild}(\varphi)_x}_{=\operatorname{Bild}(\varphi_x)} = \mathcal{G}_x$ für alle x

φ Epimorphismus $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in X$ ist φ_x surjektiv, das heißt $\operatorname{Bild}(\varphi_x) = \mathcal{G}_x$. □

Definition 1.11

Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen auf X, $i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ Monomorphismus.

a) $\mathcal{G}$ heißt ***Untergarbe*** von $\mathcal{F}$.

b) $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ ist Prägarbe auf X, die assoziierte Garbe $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ heißt ***Quotientengarbe***.

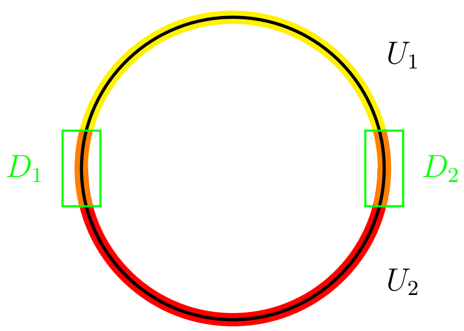
Beispiel

Sei $X = S^1$ (Einheitskreislinie)

$\mathcal{F} = \mathcal{C}$ (stetige Funktionen $S^1 \to \mathbb{R}$)

$\mathcal{G} =$ konstante Garbe $\mathbb{Z}$

$U = x$, U_1, U_2 wie im Bild



$U_1 \cap U_2 = D_1 \cup D_2$

Sei $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ mit $f_1|_{D_1} = 0, f_1|_{D_2} = 1, 0 = f_2 \in \mathcal{F}(U_2) \Rightarrow f_1|_{U_1 \cap U_2} \in \mathcal{G}(U_1 \cap U_2)$ (!)
$\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ in $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2) / \mathcal{G}(U_1 \cap U_2) \Rightarrow (\bar{f}_i \in \mathcal{F}(U_i) / \mathcal{G}(U_i))_{i=1,2}$ ist konsistente Familie.
Aber: Es gibt kein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_1} = f_1, f|_{U_2} = f_2$

Proposition 1.12
Sei X topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen, $x \in X$.

a) Die Zuordnung $\Phi : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ induziert exakten kovarianten Funktor von der Kategorie $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$ der Garben abelscher Gruppen auf X in die Kategorie $\underline{\mathrm{Ab}}$ der abelschen Gruppen.
   Dabei ist $\Phi_x(\varphi) = \varphi_x$ für $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus.
b) Die Zuordnung $\Phi_U : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(U)$ induziert linksexakten kovarianten Funktor $\underline{\mathrm{Sh}}(X) \to \underline{\mathrm{Ab}}$ (mit $\Phi_U(\varphi) = \varphi_U$)

Beweis
(*) Sei $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \to 0$ exakte Sequenz in $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$. *Achtung:* Das bedeutet *nicht*, dass für jedes $\widetilde{U} \in \mathrm{Off}(X)$ die Sequenz $0 \to \mathcal{F}'(\widetilde{U}) \to \mathcal{F}(\widetilde{U}) \to \mathcal{F}''(\widetilde{U}) \to 0$ exakt sein muss.
Aber: (*) ist äquivalent zu: $0 \to \mathcal{F}'_y \xrightarrow{\varphi_y} \mathcal{F}_y \xrightarrow{\psi_y} \mathcal{F}''_y \to 0$ ist exakt für jedes $y \in X$
$\Rightarrow$ a)
b) Φ_U linksexakt bedeutet:

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{F}''(U) \to 0 \text{ ist exakt} \qquad \square$$

Das stimmt nach 1.8 und ...

Definition + Bemerkung 1.13
Sei $f : X \to Y$ stetig.

a) Sei $\mathcal{F}$ Garbe auf X.
   Dann ist die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ auf Y eine Garbe, sie heißt (direkte) ***Bildgarbe*** von $\mathcal{F}$ (unter f). Bezeichnung: $f_*\mathcal{F}$
b) Sei $\mathcal{G}$ Garbe auf Y.
   Die zur Prägarbe $U \mapsto \varinjlim_{\substack{f(U) \subseteq V \\ V \in \mathrm{Off}(Y)}} \mathcal{G}(V)$ assoziierte Garbe heißt ***Urbildgarbe*** von $\mathcal{G}$.
   Bezeichnung: $f^{-1}(G)$
c) f_* und f^{-1} sind kovariante Funktoren.

Beweis

a) Sei $U \subseteq Y$ offen, $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U, also $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f^{-1}(U)$. $s_i \in \underbrace{f_*\mathcal{F}(U_i)}_{=\mathcal{F}(f^{-1}(U_i))}$, $i \in I$, konsistente Familie.
   $\Rightarrow \exists$ Amalgam $s \in \underbrace{\mathcal{F}(f^{-1}(U))}_{=f_*\mathcal{F}(U)}$ mit $s|_{f^{-1}(U_i)} = s_i$ für alle $i \in I$.
c) Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus von Garben auf X.
   i) Definiere $\varphi_* : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$ durch

$$(\varphi_*)_U = \varphi_{f^{-1}(U)} : f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to f_x\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U)) \qquad \square$$

ii) Definiere $f^{-1}\varphi : f^{-1}\mathcal{F} \to f^{-1}\mathcal{G}$ durch $(f_\varphi^{-1})_U = \lim\limits_{f^{-1}(U)\subseteq V \in \mathrm{Off}(Y)} \varphi_V$

$$V' \subseteq V \qquad \begin{tikzcd}
 & & f^{-1}\mathcal{F}(U) \arrow[ddd, dashed] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_V"] \arrow[urr, bend left] & \mathcal{F}(V') \arrow[ur] \arrow[d, "\varphi_{V'}"] & \\
\mathcal{G}(V) \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \mathcal{G}(V') \arrow[dr] & \\
 & & f^{-1}\mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.14
Sei $f : X \to Y$ stetig, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $\mathcal{G}$ Garbe auf Y. Dann gibt es eine (natürliche) Bijektion

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Das bedeutet: f^{-1} ist linksadjungiert zu f_*.

Beweis
Definiere $\varphi_\mathcal{F} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ und $\psi_\mathcal{G} : \mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{F}$
Dann:

$$T_1 : \begin{cases} \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ \alpha & \mapsto & f_*(\alpha) \circ \psi_\mathcal{G} : \mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G} \stackrel{f_*\alpha}{\to} f_*\mathcal{F} \end{cases}$$

Analog: $T_2 : \beta \mapsto \varphi_\mathcal{F} \circ f^{-1}(\beta)$
Rest: Übung $\square$

§ 2 Affine Schemata

Behauptung: $\alpha : R \to R'$ Ringhomom, $\mathfrak{p} \subset R'$ Primideal $\Rightarrow \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ Primideal in R

Beweis: Seien $f, g \in R$ mit $f \cdot g \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha(f \cdot g)}_{=\alpha(f)\cdot\alpha(g)} \in \mathfrak{p} \overset{\text{Œ}}{\Longrightarrow} \alpha(f) \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$$

Definition + Bemerkung 2.1
Sei R ein Ring (das heißt kommutativer Ring mit Eins)

a) $\operatorname{Spec} R := \{\mathfrak{p} \subset R : \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ heißt ***Spektrum*** von R.

b) Für $I \subseteq R$ sei $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : I \subseteq \mathfrak{p}\}$. $V(I)$ heißt ***Nullstellenmenge*** (vanishing set) von I, es ist $V(I) = V((I))$.

c) Die $V(I)$, $I \subseteq R$ Ideal, bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec} R$, der ***Zariski Topologie***.

d) Für $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ heißt $I(V) := \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$ ***Verschwindungsideal*** von V.

Beweis

c) $\emptyset = V(R)$

$\operatorname{Spec} R = V(0)$

$\bigcap\limits_{i \in I} V(I_i) = \bigcap\limits_{i \in I} \{\mathfrak{p} \in I_i \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} : I_i \subseteq \mathfrak{p} \forall\, i\} = V(\bigcup\limits_{i \in I} I_i) = V(\sum\limits_{i \in I} I_i)$

$V(I_1) \cup V(I_2) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : I_1 \subseteq \mathfrak{p} \text{ oder } I_2 \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I_1 \cdot I_2) \overset{?}{=} V(I_1 \cap I_2)$

$I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 \Rightarrow V(I_1 \cdot I_2) \supseteq V(I_1 \cap I_2)$

$\mathfrak{p} \in V(I_1 \cdot I_2) \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{p} \overset{\text{Œ}}{\Longrightarrow} I_1 \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p}$

$\Rightarrow V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$ □

Bemerkung 2.2

a) $V(I(V)) = \bar{V}$ für jedes $V \subseteq \operatorname{Spec} R$

b) $I(V(I)) = \sqrt{I}$ für jedes ideal $I \subseteq R$

Beweis

a) „$\supseteq$“: $V \subseteq V(I(V)) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R : \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$

„$\subseteq$“: Es ist $\bar{V} = \bigcap\limits_{V \subseteq V(I)} V(I)$ Ist I Ideal in R mit $V \subseteq V(I)$, so ist $I \subseteq I(V) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$.

$\Rightarrow V(I) \supseteq V(I(V))$

$\Rightarrow V(I(V)) \subseteq \bigcap\limits_{I : V \subseteq V(I)} V(I) = \bar{V}$

b) $I(V(I)) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap\limits_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \overset{!}{=} \sqrt{I}$ (Übung) □

Proposition 2.3
Sei $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen, $V \neq 0$. Dann gilt: V irreduzibel $\Leftrightarrow I(V)$ Primideal

Beweis
Wie in Algebraische Geometrie I, Proposition 4.4 □

Bemerkung 2.4
Jeder Ringhomomorphismus $\alpha : R \to R'$ induziert stetige Abbildung $f_\alpha : \operatorname{Spec} R' \to R$ durch $\mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$, das heißt $\operatorname{Spec} : \begin{cases} \underline{\text{Ringe}} & \to & \underline{\text{Top}} \\ R & \mapsto & \operatorname{Spec} R \end{cases}$ ist kontravarianter Funktor.

Beweis
Noch zu zeigen: f_α stetig.
Sei $V = V(I) \subseteq \operatorname{Spec} R \Rightarrow f_\alpha^{-1}(V) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R' : \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq I\} = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \supseteq \alpha(I)\} = V(\alpha(I))$ □

Bemerkung 2.5
Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.
Dann ist $m : \begin{cases} V & \to & \operatorname{Spec} k[V] \\ x & \mapsto & m_x \end{cases}$ injektiv und stetig.

Beweis
injektiv: ✓
m stetig: Sei $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} k[V]$ abgeschlossen.
$\Rightarrow m^{-1}(V(I)) = \{x \in V : m_x \in V(I)\} = \{x : I \subseteq m_x\} = \{x : f(x) = 0$ für alle $f \in I\} = V(I)$ □

Beispiel
Seien $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Dann ist $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$

Definition + Bemerkung 2.6
a) Ein Punkt $x \in X$ (X topologischer Raum) heißt ***generisch***, wenn $\overline{\{x\}} = X$ ist.
b) Jede irreduzible Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ hat genau einen generischen Punkt.
c) Die irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec} R$ entsprechen bijektiv den minimalen Primidealen in R.

Bemerkung 2.7
Für jedes $f \in R$ ist $D(f) = \operatorname{Spec} R \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : f \notin \mathfrak{p}\}$ offen in $\operatorname{Spec} R$. Die $D(f), f \in R$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis
Sei $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ offen, $V = \operatorname{Spec} R - U \Rightarrow \exists I \subseteq R$ Ideal mit $V = V(I)$. Für $f \in I$ ist $f \in \mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} \in V$, das heißt $V(I) \subseteq V(f) \Rightarrow D(f) \subseteq U$ □

Bemerkung 2.8
$\operatorname{Spec} R$ ist quasikompakt.

Beweis
Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $\operatorname{Spec} R$. Œ $U_i = D(f_i)$ für ein $f_i \in R$.
Dann gilt : $\bigcup\limits_{i \in I} D(f_i) = \operatorname{Spec} R \Leftrightarrow \bigcap\limits_{i \in I} V(f_i) = \emptyset \Leftrightarrow$ Die f_i, $i \in I$, erzeugen R

$\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k$ mit $1 = \sum\limits_{\nu=1}^{k} a_\nu f_{i_\nu}$ für gewisse $a_\nu \in R$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{\nu=1}^{k} D(f_{i_\nu}) = \operatorname{Spec} R$ □

Definition + Bemerkung 2.9
Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$

a) Für $f \in R$ sei $\mathcal{O}_X(D(f)) := R_f$

b) Die Zuordnung $D(f) \mapsto R_f$ ist eine $\mathcal{B}$-Garbe von Ringen auf X für die Basis $\mathcal{B} = \{D(f) : f \in R\}$ der Zariski-Topologie auf X.

c) Es gibt eine eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen auf X mit $\mathcal{O}_X(D(f)) = R_f$ für jedes $f \in R$. $\mathcal{O}_X$ heißt ***Strukturgarbe*** auf X.

d) Für beliebiges $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{O}_X(U) = \{s : U \to \dot{\bigsqcup\limits_{\mathfrak{p}\in U}} R_\mathfrak{p} | s(\mathfrak{p}) \in R_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in U\}$; für jedes $\mathfrak{p} \in U$ gibt es Umgebung $U_\mathfrak{p} \subseteq U$ von $\mathfrak{p}$ und $f, g \in R$ mit $g \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p}$ sodass $s(\mathfrak{q}) = \frac{f}{g}(\mathfrak{q})$ für alle $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p}\}$

$g \notin \mathfrak{q}$ bedeutet $\mathfrak{q} \in D(g)$; $\frac{f}{g}(\mathfrak{q}) :=$ Bild von $\frac{f}{g}$ in $R_\mathfrak{q}$

e) $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong R_\mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} \in X$.

Beweis

b) Seien $f, g \in R$ mit $D(f) \subseteq D(g)$.

$\Rightarrow V(g) \subseteq V(f) \Rightarrow f \in \bigcap\limits_{(g)\in\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{(g)}$

$\Rightarrow \exists d \geq 1$ mit $f^d \in (g)$, das heißt $\exists h \in R$ mit $f^d = g \cdot h$

$\Rightarrow$ erhalte Homomorphismus $\begin{array}{ccc} R_g & \to & R_f \\ \frac{a}{g^k} & \mapsto & \frac{a \cdot h^k}{f^{d\cdot k}} \end{array}$

Wohldefiniertheit: $\frac{g}{1} \cdot \frac{h}{f^d} = 1$ in R_f, da $g \cdot h - f^d = 0$ in R_f.

Zeige: $D(f) \mapsto R_f$ ist $\mathcal{B}$-Garbe.

Sei also $f \in R$, $(D(f_i))_{i\in I}$ offene Überdeckung von $D(f)$, $g_i \in R_{f_i}$ konsistente Familie (das heißt $g_i = g_j$ in $\mathcal{O}_X(D(f_i) \cap D(f_j)) = \mathcal{O}(D(f_i f_j)) = R_{f_i f_j}$).

Zu zeigen: $\exists! g \in R_f$ mit $g = g_i$ in R_{f_i} für jedes i:

- Œ $f = 1$, $I = \{1, \ldots, n\}$ (X ist quasikompakt)
- *Eindeutigkeit:* Ist $g = h$ in R_{f_i}, $i = 1, \ldots, n$, so ist $(g - h) \cdot f_i^d = 0$ für ein $d \geq 1$. Die f_i^d, $i = 1, \ldots, n$, erzeugen R (!)

$$(f_1, \ldots, f_n)^{n\cdot d} \subseteq (f_1^d, \ldots, f_n^d)$$

  $\Rightarrow g = h$

- *Existenz:* Schreibe $g_i = \frac{h_i}{f_i^N}$, $h_i \in R$, $N \geq 1$. Nach Voraussetzung ist $\overbrace{f_i^N f_j^N g_i}^{=f_j^N h_i} = \overbrace{f_j^N f_i^N g_j}^{f_i^N h_j}$ für ein (anderes) $N \geq 1$.

  $(f_1^N, \ldots, f_n^N) = R \Rightarrow \exists b_i \in R$ mit $1 = \sum\limits_{i=1}^n b_i f_i^N$

  Setze $g := \sum\limits_{i=1}^n b_i h_i$

  Dann ist für $j = 1, \ldots, n$

$$f_j^N g = f_j \sum_{i=1}^n b_i h_i = \sum_{i=1}^n b_i f_j^N h_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i f_i^N}_{=1} h_j = h_j = f_j^N g_j \text{ in } R_{f_j}$$

  $\Rightarrow g = g_j$ in R_{f_j} □

Definition 2.10
Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe. Dann heißt $(X, \mathcal{O}_X)$ ***affines Schema***.

Beispiele
1) $R = k$ Körper $\Rightarrow X = \operatorname{Spec} k = \{(0)\}$, $\mathcal{O}_X(X) = k$
2) $R = k[X], k$ Körper. Ist $\{(0)\}$ offen? Nein!
   $k = \mathbb{Q}$: $\mathfrak{p} = (X^2 + X + 1)$ ist abgeschlossener Punkt

$$R_{\mathfrak{p}} / m_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{Q}[X] / (X^2 + X + 1) = \mathbb{Q}(\zeta_3)$$

   $\Rightarrow \mathfrak{q} = (X - a), a \in k$, $R_{\mathfrak{q}} / m_{\mathfrak{q}} \cong k[X] / (X - a) \cong k$

Bemerkung 2.11
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ affines Schema, $X = \operatorname{Spec} R$. Dann ist für jedes $f \in R$ auch $(D(f), \mathcal{O}_X(f))$ affines Schema. *Genauer:* $(D(f), \mathcal{O}_X(D(f))) = (\operatorname{Spec} R_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f})$

Beweis
$D(f) = \{\mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal} : f \notin R\}$
$\operatorname{Spec} R_f = \{\mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$

$$\begin{array}{ccc} R & \to & R_f \\ a & \mapsto & \frac{a}{1} \end{array}$$

$\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \not\ni f$, $\mathfrak{p} \cdot R_f = \mathfrak{q} \cdot R_f$
Sei $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p} \overset{!}{\Rightarrow} \frac{x}{1} \notin \mathfrak{p} \cdot R_f$
Sei $x = \frac{a}{f^d}, a \in \mathfrak{p}, d \geq 1 \Rightarrow f^d \cdot x \in \mathfrak{p} \lightning$
Sei $h = \frac{g}{f^d} \in R_f$. *Zu zeigen:*

$$\underbrace{\mathcal{O}_x|_{D(f)}(D(h))}_{\mathcal{O}_X(D(f) \cap D(g) = R_{f \cdot g}} \cong \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}(D(h))}_{(R_f)_h = R_{f \cdot g}}$$

□

§ 3 (Allgemeine) Schemata

Definition 3.1

a) Ein ***geringter Raum*** ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen.

b) Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***lokal*** geringter Raum, wenn für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring ist.

Bemerkung 3.2

Jedes affine Schema $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ ist ein lokal geringter Raum.

Definition 3.3

a) Ein ***Morphismus*** $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zusammen mit einem Morphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Garben.

b) Ein Morphismus zwischen lokal geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Morphismus $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ wie in a) sodass für jedes $x \in X$ der auf den Halmen induzierte Homomophismus $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ die Bedingung $f_x^\#(m_{f(x)}) \subseteq m_x$ erfüllt ($f_x^\#$ heißt dann lokaloer Homomophismus).

$$(f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} = \lim_{f(x)\in U} \mathcal{O}_X(\underbrace{f^{-1}(U)}_{x\in}) \to \mathcal{O}_{X,x}$$

Beispiel

Sei R lokaler Ring, nullteilerfrei, $K = \operatorname{Quot}(R) \neq R$. Dann ist die Inklusion $R \hookrightarrow K$ *nicht* lokal.

Proposition 3.4

Die Kategorie der affinen Schemata mit Morphismen aus Definition 3.3 b) ist (anti-)äquivalent zur Kategorie der Ringe.

Beweis

(i) Sie Zuordnung $R \to (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ ist Funktor. Sei $\alpha : R \to S$ Ringhomomorphismus, $f_\alpha : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R, \mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$. Nach Bemerkung 2.4 ist f_α stetig und $f_\alpha^{-1}(D(g)) = D(\alpha(g))$.

Definiere $f_\alpha^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \to (f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}$ durch

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D(g))} & \to & (f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(D(g)) = & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(f_\alpha^{-1}(D(g)) = & \underbrace{\mathcal{O}_{SpecS}(D(\alpha(g))} \\ = R_g \ni \frac{a}{g^d} & \mapsto & \frac{\alpha(a)}{\alpha(g)^d} & \in & = S_{\alpha(g)} \end{array}$$

Noch zu zeigen: $(f_\alpha^\#)_\mathfrak{q}$ ist lokal für jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S$

Sei $\mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} R$, das heißt $\mathfrak{p} = f_\alpha(\mathfrak{q})$.

Das maximale Ideal $m_\mathfrak{p}$ (beziehungsweise $m_\mathfrak{q}$) in $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R,\mathfrak{p}}(= R_\mathfrak{p})$ (beziehungsweise $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S,\mathfrak{q}}$) ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ (beziehungsweise $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$).

Für $a = \frac{b}{f} \in m_\mathfrak{p}$ $(b \in \mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{p})$ ist $(f_\alpha^\#)_\mathfrak{q}(a) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(f)} \in m_\mathfrak{q}$, da $b \in \mathfrak{q} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$, also $\alpha(b) \in \mathfrak{q}$ und $f \notin \mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$, also $\alpha(f) \notin \mathfrak{q}$. $\square$

Beispiel (Fortsetzung des Beispiels)
$\alpha : R \hookrightarrow K$, $\dim R = 1$ (zum Beispiel diskreter Bewertungsring)

$$\begin{array}{rccc} & \operatorname{Spec} K = \{(0)\} & \to & \operatorname{Spec} R = \{(0), m\} \\ & (0) & \mapsto & (0) \\ (f_\alpha^\#)_{(0)} : & R_{(0)} = K & \to & K \end{array}$$

Beweis (Fortsetzung des Beweises von Proposition 3.4)

(ii) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ affines Schema, $X = \operatorname{Spec} R$, so ist $R = \mathcal{O}_X(X)$. Ein Morphismus $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ induziert Homomophismus

$$f^\# : \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R)}_{=R} \to \underbrace{f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(\operatorname{Spec} R)}_{\substack{= \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(f^{-1}(\operatorname{Spec} R)) = S \\ f^{-1}(\operatorname{Spec} R) = \operatorname{Spec} S}}$$

Nachrechnen: Die Funktoren in (i) und (ii) sind zueinander invers. □

Definition 3.5
Ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***Schema***, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt und affine Schemata $(\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i})$ für jedes $i \in I$, sodass

$$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \underset{\text{geringter Raum}}{\overset{\text{als lokal}}{\cong}} (\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i})$$

Bemerkung + Definition 3.6
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Schema, $U \subseteq X$ offen.

Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ auch ein Schema. $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ heißt ***offenes Unterschema*** von X.

Beweis
Sei $X = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec} R_i$ eine offene Überdeckung von X durch affine Schemata.

$\Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} (\underbrace{U \cap \operatorname{Spec} R_i}_{\subset \operatorname{Spec} R_i \text{ offen}})$, wobei $U \cap \operatorname{Spec} R_i \subset \operatorname{Spec} R_i$ offen, also $= \bigcup_{j \in J} D(f_{ij})$, $f_{ij} \in R_i$

$(D(f_{ij}), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i}|_{D(f_{ij})})$ ist affines Schema nach Bemerkung 2.11 □

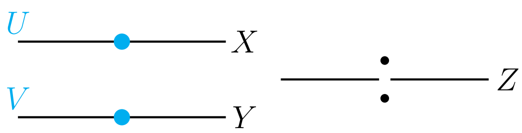
Proposition 3.7 (Verkleben)
Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Schemata, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen und $\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V, \mathcal{O}_Y|_V)$ Isomorphismus von Schemata (das heißt von lokal geringten Räumen). Sei $Z = (X \cup Y)/_\sim$ der topologische Raum, der durch Verkleben von X und Y längs φ ntsteht.

Dann gibt es genau eine Garbe $\mathcal{O}_Z$ auf Z mit $\mathcal{O}_Z|_X = \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Z|_Y \cong \mathcal{O}_Y$.

Beweis
Die offenen Teilmengen von X und von Y bilden eine Basis der Topologie auf Z. □

Beispiel

$$\left.\begin{array}{l} X = \mathbb{A}^1, U = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \\ Y = \mathbb{A}^1, V = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \end{array}\right. \varphi = \mathrm{id}$$



Beispiele

1) Quasiprojektive Varietäten:

   $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, k Körper quasi-projektiver Varietäten. V besitzt endliceh Überdeckung durch affine Varietäten $V = \bigcup_{i=1}^r X_i$.

   V ist „Verklebung“ dieser affinen Varietäten. Jedes X_i bestimmt affines Schema $\operatorname{Spec} k[X_i]$. Verklebe die $\operatorname{Spec} k[X_i]$ zu Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. X hat dieselben abgeschlossenen Punkte wie V (falls k algebraisch abgeschlossen).

   Beobachtung: $(X, \mathcal{O}_X)$ hängt (bis auf Isomorphie) nicht von der gewählten affinen Überdeckung ab.

Proposition 3.8

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gilt:

a) Die Zuordnung $V \mapsto \operatorname{Spec} k[V]$ ist ein volltreuer, auf Objekten injektiver Funktor t von der Kategorie der affinen Varietäten$/k$ in die Kategorie der affinen Schemata.

b) t setzt sich fort zu volltreuem, auf Objekten injektivem Funktor

$$\text{quasiprojektive Varietäten}/_k \to \text{Schemata}$$

Bezeichnung 3.9

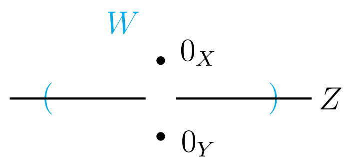
$\mathbb{A}_k^n := \operatorname{Spec} k[X_1, \ldots, X_n]$ (vergleiche $\mathbb{A}^n(k)$)

Beispiele

2) $X = Y = \mathbb{A}_k^1$, $U = V = D(T) = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{(T)\}$, $\mathbb{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[T]$. Verklebe X und Y längs $\mathrm{id} : U \to V$.

   Erhalte Schema Z mit offenen Einbettungen $i_X : X \to Z$, $i_Y : Y \to Z$ sodass $Z - \{0_X, 0_Y\}$ isomorph zu $U = V$ ist.

$$i_X((T)) =: 0_X,\ i_Y((T)) =: 0_Y$$



   Es gilt:

   (i) Z ist irreduzibel.

   (ii) Sei $W \subseteq Z$ offen, $0_X \in W$, $0_Y \in W$, $f \in \mathcal{O}_Z(W)$. Dann ist $f(0_X) = f(0_Y)$.

   (iii) Die Diagonale $\Delta = \{(z_1, z_2) \in Z \times Z : z_1 = z_2\}$ ist nicht abgeschlossen.

   Folgerung: Z ist nicht isomorph zu einem affinen Schema. Beweis in der Übung.

Definition + Bemerkung 3.10

Sei $S := \bigoplus\limits_{d \geq 0} S_d$ graduierter Ring ($S_d \cdot S_e = S_{d+e}$)

a) $\operatorname{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \subset S : \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal}, S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}$

   ($S_+ := \bigoplus\limits_{d>0} S_d$) heißt ***homogenes Spektrum*** von S.

b) Für ein homogenes Ideal $I \subseteq S$ sei $V(I) : \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S, I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Die $V(I)$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Proj} S$ (***Zariski Topologie***).

c) Für homogenes $f \in S$ sei $D_+(f) := \operatorname{Proj} S - V(f)$. Die $D_+(f)$, $f \in S$ homogen, bilden Basis.

d) Für $f \in S$ homogen sei

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(D_+(f)) := S_f^{\text{hom}} = \left\{ \frac{a}{f^d} : a \text{ homogen vom Grad } d \cdot \deg(f) \right\}$$

e) Es gibt genau eine Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}$ von Ringen auf $\operatorname{Proj} S$ mit $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(D_+(f)) = S_f^{\text{hom}}$.

f) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ ist

$$\mathcal{O}_{ProjS,\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \text{ homogen}, \deg a = \deg b, b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

(lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} \cdot S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} := \{\frac{a}{b} \in S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} : a \in \mathfrak{p}\}$)

g) $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$ ist Schema.

Beweis

g) $D_+(f)$, $\underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(D_+(f))}_{\ni \mathfrak{p} \mapsto \{\frac{a}{f^d} \in S_f^{\text{hom}} : a \in \mathfrak{p}\}} \cong \operatorname{Spec} S_f^{\text{hom}}$ □

Beispiel

$S = k[X_0, \dots, X_n]$

Dann: $\operatorname{Proj} S = t(\mathbb{P}^n(k)) =: \mathbb{P}_k^n$, denn $D_+(X_i) = \operatorname{Spec} k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$

§ 4 Abgeschlossene Unterschemata

Bemerkung + Definition 4.1
Sei R Ring, $I \subseteq R$ Ideal

a) Die Abbildung $V(I) \to \operatorname{Spec}(R/I), \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \mod I$ ist ein Homöomorphismus.
b) $(V(I), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R/I)})$ heißt ***abgeschlossenes Unterschema*** von $\operatorname{Spec} R$.
c) Die abgeschlossenen Unterschemata von $\operatorname{Spec} R$ entsprechen bijektiv den Idealen in R.
d) Für abgeschlossene Unterschemata $Z_i \in \operatorname{Spec} R/I_i$ gilt: Z_2 ist abgeschlossenes Unterschema von Z_1 („$Z_2 \leq Z_1$") $\Leftrightarrow I_1 \subseteq I_2$.
Es ist dann $Z_2 = V(I_2) \subseteq V(I_1) = Z_1$

Beispiel
$X = \mathbb{A}_k^1 - \operatorname{Spec}[X]$, $Z_1 = \operatorname{Spec} k[X]/(X^2)$, $Z_2 = k[X]/(X^2 - X)$. Dann ist $Z_1 \subseteq Z_2$ als topologische Räume aber nicht als abgeschlossene (Unter-) Schemata.

Definition + Bemerkung 4.2
Sei $I \subseteq R$ Ideal, $Z = \operatorname{Spec} R/I$ das zugehörige abgeschlossene Unterschema von $X = \operatorname{Spec} R$.

a) Für $U \subseteq X$ offen sei $I(U) := I \cdot \mathcal{O}_X(U)$, das Bild von I unter Restriktion. $\mathcal{I}$ ist Garbe von Idealen auf X.
b) Sei $j : Z \to X$ die Inklusion. Dann ist $j_*\mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_X/I$

Beweis
b) Für $f \in R$ ist $j_*\mathcal{O}_Z D(f) = \mathcal{O}_Z j^{-1} D(f) = \mathcal{O}_Z(D(f) n \mathbb{Z}) = \mathcal{O}_Z(D(\overline{f})) = (R/I)\overline{f} = R_f/IR_f = \mathcal{O}_X/I(D(f))$ $\square$

Folgerung 4.3
In der Situation 4.2 wird $j : Z \to X$ zum Schemamorphismus, wobei

$$\begin{tikzcd} j^{\#}\mathcal{O}_X \arrow[rr] \arrow[dr] & & j_*\mathcal{O}_Z \\ & \mathcal{O}/\mathcal{I} \arrow[ur, "\sim\ \text{b)}"'] & \end{tikzcd}$$

die Quotientenabbildung $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ ist.

Definition 4.4
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema

a) Eine Garbe $\mathcal{I}$ (von abelschen Gruppen) auf X heißt ***Idealgarbe***, wenn für jedes offene $U \subseteq X$ $\mathcal{I}(X)$ ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$ ist und die Restriktionshomomorphismen $\mathcal{O}_X(U)$-linear sind.
b) Ist $X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema, so heißt eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X ***quasikohärent***, wenn es ein Ideal I in R gibt mit $\mathcal{I}(U) = I\mathcal{O}_X(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$.
c) Eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X heißt ***kohärent***, wenn für jedes offene affine Unterschema $U \subseteq X$ die Einschränkung $\mathcal{I}|_U$ quasikohärent ist.

Proposition 4.5
Eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ gibt durch affine Unterschemata U_i gibt, sodass $\mathcal{I}/U_i$ quasikohärent ist für jedes I. (Beweis Übung)

Definition + Bemerkung 4.6

a) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Ein abgeschlossenes Unterschema von X ist ein Schema $(Y, \mathcal{O}_Y)$, wobei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $\mathcal{O}_Y = {}^{\mathcal{O}_X}\!\big/_{\mathcal{I}}$ für eine quasikohärente Untergarbe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$.

b) Ist $(Y, \mathcal{O}_Y)$ abgeschlossenes Unterschema, so gilt für jedes offene $U \subseteq X$: $U \cap Y$ ist das abgeschlossene Unterschema von U, das zu $\mathcal{I}/U$ gehört. Ist U affin, so ist $\mathcal{I}/U$ die von $\mathcal{I}(U)$ induzierte Idealgarbe.

Definition + Bemerkung 4.7

a) Sei R ein Ring.
$N_R := \sqrt{(0)} = \{x \in R | \exists n \geq 1 : x^n = 0\}$ ist ein Ideal in R, das ***Nilradikal***.

b) Ein Ring R heißt ***reduziert***, wenn $N_R = (0)$ ist.

c) Ist $X = \operatorname{Spec} R$, so heißt $X_{\text{Red}} := \operatorname{Spec} {}^{R}\!\big/_{N_R}$ das zu X assoziierte ***reduzierte Schema***.

d) X_{Red} ist abgeschlossenes Unterschema von X und $X_{\text{Red}} \hookrightarrow X$ ist Homömorphismus.

e) Sei X ein Schema, $\mathcal{N}_X$ die durch $\mathcal{N}_X(U) =$ Nilradikal in $\mathcal{O}_X(U)$ definierte Idealgarbe. Dann gilt: $\mathcal{N}_X$ ist quasikohärent.

f) Das zu $\mathcal{N}_X$ assoziierte abgeschlossene Unterschema von X heißt $\mathcal{X}_{\text{red}}$. $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***reduziert***, wenn $\mathcal{X}_{\text{red}} \cong X$ als Schema, das heißt $\mathcal{N}_X = 0$.

Beweis

e) *Zu zeigen:* Für $f \in R$, R Ring, gilt: $\mathcal{N}_{(R_f)} = \mathcal{N}_R R_f$.
„$\supseteq$“: Sei $a \in \mathcal{N}_R$, also $a^n = 0$ für ein $n \geq 1$. Für $x \in R_f$ ist $ax \in \mathcal{N}_{R_f}$
„$\subseteq$“: $x = \frac{a}{f^d} \in R_f, x^n = 0 \Rightarrow \frac{a^n}{f^{dn}} = 0 \Rightarrow a^n = 0$ □

§ 5 Faserprodukte

Definition + Bemerkung 5.1
Seien X, Y, S Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to S$ Abbildungen.

a) $X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ heißt ***Faserprodukt***.

b) Es gilt: $X \times_S Y = \bigcup\limits_{s \in S} f^{-1}(s) \times g^{-1}(s)$

c) Das Faserprodukt erfüllt folgende UAE:
Für alle Mengen Z, Abbildungen $\varphi : Z \to X$, $\psi : Z \to Y$ mit $f \circ \varphi = g \circ \psi$ gibt es genau eine $h : Z \to X \times_S Y$ mit $\varphi = \mathrm{pr}_X \circ h$, $\psi = \mathrm{pr}_Y \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_S Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_Y"'] \arrow[dddl, bend left, "\mathrm{pr}_X"] \\
 & Y \arrow[dddr, bend left, "g"] & \\
Z \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[uurr, dashed, bend left, "\exists! h"] \arrow[ddrr, bend right] & & \\
 & X & \\
 & & S
\end{tikzcd}$$

d) Das Faserprodukt ist der Limes des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Beweis
c) Setze $h(z) := (\varphi(z), \psi(z))$ □

Beispiele
1) $S = \{s\} \Rightarrow X \times_S Y = X \times Y$
2) $X \subseteq S, Y \subseteq S$, f, g die Inklusionen $\Rightarrow X \times_S Y = X \cap Y$
3) $Y \subseteq S$, $g : Y \hookrightarrow S \Rightarrow X \times_S Y = f^{-1}(Y)$
4) $X = Y \Rightarrow X \times_S Y = \mathrm{Equalizer}(f, g)$

Definition 5.2
Seien X, Y, S Schemata, $f : X \to S, g : Y \to S$ Morphismen.
Dann heißt ein Schema $X \times_S Y$ zusammen mit Morphismen $\mathrm{pr}_X : X \times_S Y \to X$ und $\mathrm{pr}_Y : X \times_S Y \to Y$, sodass $f \circ \mathrm{pr}_X = g \circ \mathrm{pr}_Y$ ist, ***Faserprodukt*** von X und Y über S, wenn die UAE aus 5.1 c) erfüllt ist.

Definition + Bemerkung 5.3
Sei S ein Schema.

a) Ein ***S-Schema*** ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $f : X \to S$.

b) Die S-Schmata bilden eine Kategorie $\underline{\mathrm{Sch}/S}$.

c) Das Faserprodukt $X \times_S Y$ ist das Produkt von $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ in $\underline{\mathrm{Sch}/S}$.

Beispiel
$S = \mathrm{Spec}$, k Körper

Ein Morphismus $X \to \mathrm{Spec}\, k$ ist nach Übung 3, Aufgabe 1 vollständig bestimmt durch einen Ringhomomorphismus $k \to \mathcal{O}_X(X)$. Dieser macht $\mathcal{O}_X(X)$ zur k-Algebra und $\mathcal{O}_X$ zu einer Garbe von k-Algebren. Insbesondere sind k-Varietäten über den Funktor t k-Schemata. Das Faserprodukt von k-Varietäten ist das Produkt der k-Varietäten (im Sinne von Algebraische Geometrie I)(siehe unten).

Satz 1
Das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert für alle S-Schemata $f : X \to S$ und $g : Y \to S$. Es ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis
(1) $X = \mathrm{Spec}\, A$, $Y = \mathrm{Spec}\, B$, $S = \mathrm{Spec}\, R$ affin. f und g machen A und B zu R-Algebren.

Behauptung: Das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ erfüllt $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B) = X \times_S Y$.

Erinnerung: Das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ von R-Moduln M, n „linearisiert“ die bilinieare Abbildung

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r] & M \otimes_R N \\
(x,y) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, "\Phi \text{ bilinear}"'] & x \otimes y \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi \text{ linear}"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

- Sind $M = A$ und $N = B$ R-Algebren, so hat $A \otimes_R B$ eine Struktur als R-Algebra:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

- $\begin{matrix} \sigma_A : A \to A \otimes_R B, a \mapsto a \otimes 1 \\ \sigma_B : B \to A \otimes_R B, b \mapsto 1 \otimes b \end{matrix}$ sind R-Algebren-Homomophismen.
- $A \otimes_R B$ erfüllt die richtige UAE

$$\begin{tikzcd}
& & A \otimes_R B \arrow[dll, dashed, bend right, "\exists! \gamma"'] & \\
C & A \arrow[l, "\alpha"] \arrow[ur, "\sigma_A"] & & B \arrow[ul, "\sigma_B"'] \arrow[lll, bend right, "\beta"'] \\
& & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[ull, bend left] &
\end{tikzcd}$$

„Beweis:“ $\tilde{\gamma} : A \times B \to C$, $(a,b) \mapsto \alpha(a) \cdot \beta(b)$ ist bilinear, induziert also $\gamma : A \otimes B \to C$ linear. Nachrechnen: γ Ringhomomorphismus, γ eindeutig.

Also: $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ erfüllt die geforderte UAE für alle affinen Schemata Z.

Ist Z beliebiges Schema, so induzieren $\varphi : Z \to X$ und $\psi : Z \to Y$ R-Algebrahomomorphismen $\alpha : A \to \mathcal{O}_Z(Z)$, $\beta : B \to \mathcal{O}_Z(Z)$.

α und β induzieren $\gamma : A \otimes_R B \to \mathcal{O}_Z(Z)$, also (Übung 3, Aufgabe 1) Morphismus $h : Z \to \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$.

(2) X, Y, Z nicht notwendig affin.

Überdecke S durch offene affine Schemata $S_i = \operatorname{Spec} R_i$ $(i \in I)$. Sei $X_i := f^{-1}(S_i)$, $Y_i := g^{-1}(S_i)$ (offen in X bewziehungsweise Y).

Überdecke X_i durch offene affine Schemata $X_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$

Überdecke Y_i durch offene affine Schemata $Y_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$

Nach (1) existiert $X_{ij} \otimes_{S_i} Y_{ik}$ für alle i, j, k

Behauptung 1: Sei T ein Schema, V, W T-Schemata, $(V_l)_{l \in L}$ offene Überdeckung von V. Existiert $V_l \times_T W$ für jedes l, so existiert $V \times_T W$.

Wende Behauptung 1 an auf

- $T = S_i$, $V = X_i$, $W = Y_{ik}$, $V_l = X_{il} \Rightarrow X_i \times_{S_i} Y_{ik}$ existiert $\forall\, i, k$
- $T = S_i$, $V = Y_i$, $W = X_i$, $V_l = Y_{il} \Rightarrow X \times_{S_i} Y_{ik}$ existiert $\forall\, i$

Behauptung 2: Für jedes i ist $X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y$

Dann wende Behauptung an auf

$$T = S, V = X, W = Y, V_l = X_l \Rightarrow X \times_S Y \text{ existiert}$$

Beweis 2:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_i \times_S Y_i \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{X_i}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{Y_i}"] & \\
Z \arrow[urr, bend left, "h"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] \arrow[drr, bend right] & X_i \arrow[dr, "f|_{X_i}"'] & & Y_i \arrow[dl, "g"] \\
 & & S_i &
\end{tikzcd}$$

$$\Psi(Z) \subseteq g^{-1}(\underbrace{f(\overbrace{\varphi(Z)}^{\subseteq X_i})}_{\subseteq S_i}) \subseteq Y_i$$

Beweis 1: Verklebe die $V_l \times_T W$ längs $U_{lm} = \mathrm{pr}_l^{-1}(V_l \cap V_m) \subseteq V_l \times_T W$. Es gilt: $U_{lm} = (V_l \cap V_m) \times_T W$. Dann ist U_{lm}„=“U_{ml}, lassen sich also verkleben zu Schema V. Zeige: $\tilde{V} = V \times_T W$ $\square$

Bemerkung 5.4

a) $X \times_S S \cong X$ für jedes S-Schema

b) $(X \times_S T) \times_T Y \cong X \times_S Y$ für alle…

Beweis

a) *Zeige:* X erfüllt die UAE von $X \times_S S$

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Z \arrow[urr, dashed, bend left, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] & X \arrow[dr, "f"'] & & S \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
 & & S &
\end{tikzcd}$$

Es gilt $\mathrm{id}_S \circ \psi = f \circ \varphi$ im unteren Dreieck, also auch im Oberen.

b) *Zeige:* $X \times_S Y$ erfüllt die UAE von $(X \times_S T) \times_T Y$

Erhalte: $h : X \times_S Y \to X \times_S T$ aus

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_S T \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_T"] & \\
X \times_S Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "h"] \arrow[rrr, bend left, "g \circ \mathrm{pr}_Y"] & X \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, "f \circ g"] \\
 & & S &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{rccc}
g: & Y & \to & T \\
f: & X & \to & S \\
h: & T & \to & S
\end{array}$$

Betrachte:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_S Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\
Z \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "\exists!\Phi"] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] & X \times_S T \arrow[dr, "\mathrm{pr}_T"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & & T &
\end{tikzcd}$$

Es gilt: $f \circ \mathrm{pr}_X = t \circ g \circ \mathrm{pr}_Y$

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_S Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\
Z \arrow[r, "\mathrm{pr}_X \circ \varphi"'] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] & X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "t \circ g"] \\
 & & S &
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen: $\boxed{f \circ \mathrm{pr}_X} \circ \varphi = t \circ g \circ \psi = \boxed{t \circ \mathrm{pr}_T} \circ \varphi$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd}
 & & X \times_S Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\
Z \arrow[r, "\mathrm{pr}_X \circ \varphi"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "\exists!\Phi"] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] & X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "t \circ g"] \\
 & & S &
\end{tikzcd}$$

Wir wissen: $\mathrm{pr}_T \circ \varphi = g \circ \psi$

Zu zeigen: (i) $h \circ \Phi = \varphi$

(ii) $\mathrm{pr}_Y \circ \Phi = \psi$ ✓

Für (i) ist zu zeigen: (i_1) $\underbrace{\mathrm{pr}_X \circ h}_{\mathrm{pr}_X} \circ \Phi = \mathrm{pr}_X \circ \varphi$ ✓

(i_2) $\underbrace{\underbrace{\mathrm{pr}_T \circ h}_{g \circ \mathrm{pr}_Y} \circ \Phi}_{g \circ \psi} = \mathrm{pr}_T \circ \varphi$

Damit ist die Existenz von Φ gezeigt. Eindeutigkeit in der Übung. $\square$

§ 6 Punkte

Definition + Bemerkung 6.1
Sei X ein Schema, $x \in X$

a) $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ heißt ***Restklassenkörper*** von X im Punkt x.

Beispiele

1) $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$

   $x = p \Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{F}_p$

   $x = (0) \Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{Q}$

2) $X = \mathbb{A}^1_k$

   $x = (X - a)\ (a \in k) \Rightarrow \kappa(x) = k$

   $x = (0) \Rightarrow \kappa(x) = k(X) = \operatorname{Quot}(k[X])$

3) $X = \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[X, Y]$

   $x = (f)$, f irreduzibel $\Rightarrow \kappa(x) = \operatorname{Quot}(k[V]) = k(V)\ (V = V(f))$

b) Sei $f : X \to S$ ein Morphismus, $s := f(x)$. f induziert Homomorphismus $\kappa(s) \to \kappa(x)$.

c) Für einen Körper k gibt es genau dann einen Morphismus $\iota : \operatorname{Spec} k \to X$ mit $\iota(0) = x$, wenn $\kappa(x)$ isomorph zu einem Teilkörper von k ist.

d) In der Situation c) heißt x ***k-wertiger Punkt*** von x.

Beweis

b) f induziert lokalen Homomorphismus $f_x^\# : \mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, das heißt $f_x^\#(m_s) \subseteq m_x \Rightarrow f_x^\#$ induziert $\kappa(s) \to \kappa(x)$.

c) Sei $U = \operatorname{Spec} R$ affine Umgebung von x.

   ι existiert $\Leftrightarrow \exists \alpha : R \to k$ mit $\operatorname{Kern}(\alpha) = \mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}$ das zu x gehörige Primideal in R ist.

   Es ist $\mathcal{O}_{X,x} \cong R_\mathfrak{p}$, also $\kappa(x) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}$

   Also: ι existiert $\Leftrightarrow \exists \alpha : \begin{array}{ccc} R & \to & k \\ \mathfrak{p} & \mapsto & (0) \end{array}$, also $\overline{\alpha} : \kappa(x) \to k$

   „$\Leftarrow$“: $\alpha : R \to R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p} \xrightarrow{\overline{\alpha}} k$ $\square$

Bemerkung 6.2
Seien X, Y S-Schemata.

Dann ist die Abbildung $\left\{ \begin{array}{ccc} X \times_S Y & \to & \{(x,y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\} \\ z & \mapsto & (\operatorname{pr}_X(z), \operatorname{pr}_Y(z)) \end{array} \right.$ surjektiv.

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_S Y \arrow[dl, "\operatorname{pr}_X"'] \arrow[dr, "\operatorname{pr}_Y"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Beweis
Abbildung wohldefiniert: ✓

Seien $x \in X, y \in Y$ mit $f(x) = g(y) =: s \in S$. Seien $\kappa : \kappa(s), \kappa(x), \kappa(y)$ die Restklassenkörper. Œ $\kappa \subseteq \kappa(x)$, $\kappa \subseteq \kappa(y)$. Sei k ein Körper mit $\kappa(x) \subseteq k$, $\kappa(y) \subseteq k$ (zum Beispiel Komposition). Sei $Z := \operatorname{Spec} k$.

Nach 6.1 c) gibt es Morphismen $\varphi : Z \to X, \varphi(0) = x$, $\psi : Z \to Y, \psi(0) = y$. Es ist $f \circ \varphi = g \circ \psi \Rightarrow \exists h : Z \to X \times Y$ mit $\mathrm{pr}_X \circ h = \varphi, \mathrm{pr}_Y \circ h = \psi$. Setze $z := h(0)$. □

Definition + Bemerkung 6.3
Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Schemata, $y \in Y$

a) $X_y = f^{-1}(y) = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)$ heißt ***Faser*** von f über y. Dabei ist $\iota : \operatorname{Spec} \kappa(y) \to Y$ der zu y gehörige Morphismus aus 6.1.
b) $\mathrm{pr}_X : X_y \to X$ ist injektiv.
c) $\mathrm{pr}_X(X_y) \to \{x \in X : f(x) = y\}$ ist bijektiv.
d) Ist y abgeschlossen, so ist X_y abgeschlossenes Unterschema.

Beweis
c) Folgt aus b) und 6.2.
d) Folgt aus c).
b) Seien $x_1, x_2 \in X_y$ mit $\mathrm{pr}_X(x_1) = \mathrm{pr}(x_2) =: x \in X \Rightarrow f(x) = y$. Sei $Z = \operatorname{Spec} \kappa(x)$ und $\iota : Z \to X$ mit $\iota(0) = x$. Sei $\psi : Z \to \operatorname{Spec} \kappa(y)$ der von $f_*^\#$ induzierte Morphismus (6.1 b)).

   Nach 6.1 b) ist $\kappa(x) \subseteq \kappa(x_i)$, $i = 1, 2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & X_Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr] & \\
Z \arrow[urr, bend left, "h_1", "h_2"'] \arrow[r, "\iota"'] \arrow[rrr, bend left=15, "\psi"] & X \arrow[dr] & & \operatorname{Spec}\kappa(y) \arrow[dl] \\
 & & Y &
\end{tikzcd}
$$

   $\overset{6.1c}{\Longrightarrow} \exists$ Morphismen $h_i : Z \to X_y$ mit $h_i(0) = x_i$, $i = 1, 2$

   Es gilt: $\mathrm{pr}_Z \circ h_i = \psi$, $i = 1, 2$
   $\mathrm{pr}_X \circ h_i = \iota$ nach Definition von h_i

   $\xRightarrow{\text{Eindeutigkeit}} h_1 = h_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ □

Beispiele

1) $f : \underset{=\operatorname{Spec} k[X]}{„\mathbb{A}_k^1“} \to \mathbb{A}_k^1$, „$x \mapsto x^2$“; f werde induziert von $\alpha : k[X] \to k[X], X \mapsto X^2$

   Sei $y = (X - a) \Rightarrow X_y = \mathbb{A}_k^1 \times_{\mathbb{A}_k^1} \operatorname{Spec} k = \operatorname{Spec}(\underbrace{k[X] \otimes_{k[X]} k}_{\cong k[X]/\alpha(X-a)})$

$$
k[X]\big/\alpha(X-a) = k[X]\big/(X^2 - a) = \begin{cases} k \oplus k & \text{falls } a \in (k^\times)^2 \\ k[X]\big/(X^2) & \text{falls } a = 0 \end{cases}
$$

2) $X = (x, y)$-Ebene $\cup$ (z, w)-Ebene in $\mathbb{A}^4_k$
$= V(z, w) \cup V(x, y) = V(xz, yz, xw, yw)$
$f : X \to \mathbb{A}^2_k, (x, y, z, w) \mapsto (x+z, y+w)$ wird induziert von $\alpha : k[s, t] \to k[X, Y, Z, W] \to k[V], s \mapsto X + Z, t \mapsto Y + W$.
Sei y = „(0, 0)“ $= (s, t) \Rightarrow V_y = V \times_{\mathbb{A}^2_k} \operatorname{Spec} k = \operatorname{Spec}(k \otimes_{k[s,t]} k) \cong k[V]/\alpha(s, t) = k[V]/(X + Z, Y + W) = k[X, Y, Z, W]/(X + Z, Y + W, XZ, YZ, XW, YW)$
$= k[X, Y]/(-X^2, -XY, -Y^2) =: R$
Beachte: $\dim_k R = 3$

Definition + Bemerkung 6.4
Sei X ein Schema, T ein weiteres Schema.

a) Ein T-***wertiger Punkt*** von X ist ein Morphismus $T \to X$.
b) Der Funktor h_X : $\underline{\text{Sch}} \to \underline{\text{Sets}}$, $T \mapsto \operatorname{Hom}(T, X)$ heißt ***Punktfunktor*** zu X. h_X ist kontravarianter Funktor.
c) Die H_X definieren Funktor h : $\underline{\text{Sch}} \to \underline{\text{Fun}}(\text{Sch}^{\text{op}}, \text{Sets})$. Dieser Funktor ist Kovariant. ($\underline{\text{Fun}}(\text{Sch}^{\text{op}}, \text{Sets})$ ist die Kategorie der kontravarianten Funktoren von Schemata nach Mengen; op steht für „opposite“)

Beispiele

1) Sei $T = \operatorname{Spec}(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ (k ein Körper), $X = \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[X, Y]$. Ein T-wertiger Punkt von X ist ein Ringhomomorphismus $\alpha : k[X, Y] \to k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Sei α surjektiv, $\alpha^{-1}((\varepsilon)) = (X, Y)$.
Also $\alpha(X) = a\varepsilon$, $\alpha(Y) = b\varepsilon$ $(a, b \in k) \Rightarrow \alpha(bX - aY) = 0$. α bestimmt also nicht nur einen Punkt x von X, sondern auch eine „Richtung“ in x.
2) $T = \operatorname{Spec} R$, R diskreter Bewertungsring.
$T = \{t_0, t_1\}$, $t_0 \in \overline{\{t_1\}}$, $K := \operatorname{Quot} R$, X ein Schema, $\kappa(t_0) = k$, $\kappa(t_1) = K$

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(T, X) \quad = \quad \{&(x_0, x_1, x_2) : x_0, x_1 \in X, x_0 \neq x_1, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, \iota : \kappa(x_1) \to K \\ &\text{Homomorphismus mit } \iota(\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}, x_0}) \subseteq R \text{ und } \iota(m_{x_0}) \subseteq m\}\end{aligned}$$

§ 7 Endlichkeitseigenschaften

Definition 7.1
Sei X ein Schema.

a) X heißt ***lokal noethersch***, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X durch affine Schemata $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ gibt, sodass die R_i noethersch sind.
b) X heißt ***noethersch***, wenn es eine endliche Überdeckung wie in a) gibt.

Beispiel
Quasiprojektive Varietäten sind noethersch.

Proposition 7.2

a) Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ ist genau dann noethersch, wenn R noethersch ist.
b) Ein Schema X ist genau dann lokal noethersch, wenn für jedes offene affine Unterschema $U = \operatorname{Spec} R$ gilt: R ist noethersch

Beweis

a) folgt aus b)
b) Sei $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ offen in X, R_i noethersch. Sei $U = \operatorname{Spec} R$ offen in X.

   Zu zeigen: R ist noethersch

   Es gilt: $U \cap U_i$ ist offen in U_i für jedes i. $\Rightarrow U \cap U_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} D(f_{ij})$ für geeignete $f_{ij} \in R_i$.

   $D(f_{ij}) = \operatorname{Spec}(R_i)_{f_{ij}}$, $R_{ij} := (R_i)_{f_{ij}}$ ist noethersch

   $D(f_{ij})$ ist auch offen in U.

   $\Rightarrow \exists g_{ijk} \in R$ mit $D(f_{ij}) = \bigcup\limits_k D(g_{ijk})$

   Sei $\varphi_{ij} : R \to R_{ij}$ der von $D(f_{ij}) \hookrightarrow U$ induzierte Ringhomomorphismus

   $\Rightarrow R_{g_{ijk}} \overset{(!)}{\cong} (R_{ij})_{\varphi_{ij}(g_{ijk})} \Rightarrow R_{g_{ijk}}$ ist noethersch

   Die $D(g_{ijk})$ überdecken U.

   U ist quasikompakt $\Rightarrow$ endlich viele der g_{ijk} genügen zum Überdecken. Nenne sie $g_1, \ldots, g_r$. Sei nun $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ Kette von idealen in R. Für $i = 1, \ldots, r$ sei $\varphi_i : R \to R_{g_i}$ der natürliche Homomorphismus $\Rightarrow \varphi_i(I_1) \cdot R_{g_i} \subseteq \varphi_i(I_2) \cdot R_{g_i} \subseteq \ldots$ wird stationär

   Behauptung: Für jedes Ideal $I \subseteq R$ gilt:

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot R_{g_i})$$

   Beweis der Behauptung:

   „$\subseteq$“: ✓

   „$\supseteq$“: Sei $b \in \bigcup\limits_{i=1}^{r} \varphi_i^{-1}\left(\varphi_i(I) \cdot R_{g_i}\right)$

   Für jedes $i = 1, \ldots, r$ gibt es $a_i \in I$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_i(b) = \frac{b}{1} = \frac{a_i}{g_i^n}$ in R_{g_i}. $\Rightarrow \exists m_i$ mit $g_i^{m_i}(g_i^{n_i} b - a_i) = 0$ in $R \Rightarrow g_i^{m_i+n_i} b = g_i^{m_i} a_i \in I \Rightarrow \exists M$ mit $g_i^M b \in I$ für $i = 1, \ldots, r$

   Nach Voraussetzung ist $\left.\begin{array}{r} (g_1, \ldots, g_r) = R \\ \Rightarrow (g_1^M, \ldots, g_r^M) = R \end{array}\right\} \Rightarrow b \in I$ □

Definition + Proposition 7.3
Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Schemata.

a) f heißt ***lokal von endlichem Typ***, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \operatorname{Spec} A_i)_{i\in I}$ von Y gibt und für jedes $i \in I$ eine offene affine Überdeckung $(U_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij})_{j\in J_i}$ von $f^{-1}(U_i) \subseteq X$, so dass B_{ij} (durch den von f induzierten Homomorphismus) endlich erzeugte A_i-Algebra ist $\forall\, i \in I, j \in J_i$.
b) f heißt ***von endlichem Typ***, wenn in a) jedes $f^{-1}(U_i)$ eine endliche Überdeckung der gewünschten Art hat.
c) Ist f (lokal) von endlichem Typ, so gibt es für jedes offene affine $U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ eine endliche offene affine Überdeckung $U_i = \operatorname{Spec} B_i$ von $f^{-1}(U)$, so dass B_i endlich erzeugte A-Algebra ist.

Beweis
c) Ähnlich 7.2 □

Beispiele 7.4
1) Jeder Morphismus von quasiprojektiven Varietäten$/k$ ist von endlichem Typ.
2) Insbesondere ist für jede quasiprojektive Varietät V/k der „Strukturmorphismus“ $V \to \operatorname{Spec} k$ von endlichem Typ.
3) $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$ ist nicht lokal von endlichem Typ.

Definition 7.5
Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt ***endlich***, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \operatorname{Spec} A_i)_{i\in I}$ von Y gibt, so dass für jedes $i \in I$ $f^{-1}(U_i)$ affin ist (also $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$) und dabei B_i als A_i-Modul endlich erzeugt ist.

Bemerkung 7.6
Ist $f : X \to Y$ endlich, so ist $f^{-1}(y)$ endlich für jedes $y \in Y$.

Beweis
Sei $U = \operatorname{Spec} A$ affine Umgebung von $y \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$

B ist nach Voraussetzung endl. erzeugter A-Modul. Weiter ist $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$. $B \otimes_A \kappa(y)$ ist endlich-dimensionaler $\kappa(y)$-Vektorraum $\Rightarrow B \otimes_A \kappa(y)$ hat nur endlich viele Primideale □

§ 8 Eigentliche Morphismen

Definition 8.1
Sei $f : X \to X$ ein Morphismus von Schemata.

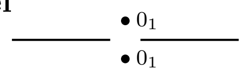
a) Der von id_X induzierte Morphismus $\Delta = \Delta_f : X \to X \times_S X$ heißt ***Diagonalmorphismus*** (oder Diagonale) zu f.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "\Delta = \Delta_f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[rrrd, bend left, "\mathrm{id}"] & & X \times_S X \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
& X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& & S &
\end{tikzcd}$$

Es ist $\mathrm{pr}_1(\Delta(X)) = \mathrm{pr}_2(\Delta(X))$

b) f heißt ***separiert*** (oder auch X heißt separiert über S), wenn Δ einen abgeschlossene Einbettung ist.

Erinnerung 8.2
Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$ ist

Beispiel
Sei $X =$ 

$\mathbb{A}^1_k$ mit doppeltem Nullpunkt (§3 Beispiel 2), $F : X \to \operatorname{Spec} k$ der Strukturmorphismus. f ist nicht separiert, da $\Delta(X)$ nicht abgeschlossen is in $X \times_k X$, denn $(0_1, 0_2) \notin \Delta$ aber $\in \Delta$.

Bemerkung 8.3
Jeder Morphismus affiner Schemata ist separiert.

Beweis
Sei $f : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = Y$ Morphismus, induziert von Ringhomomorphismus $\alpha : A \to B$. Dann ist $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$.

$\Delta : X \to X \times_Y X$ wird induziert von $\mu : \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \to & B \\ b_1 \otimes b_2 & \mapsto & b_1 \cdot b_2 \end{array}$

μ ist surjektiv, also ist Δ abgeschlossene Einbettung. □

Bemerkung 8.4
Offene und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.

Beweis
Sei $i : U \hookrightarrow X$ offene abgeschlossene Einbettung. $\Rightarrow U \times_X U \cong U$ und für $\Delta : U \to U \times_X U \cong U$ gilt $\Delta = \mathrm{id}_U$. □

Definition 8.5
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

a) f heißt ***universell abgeschlossen***, wenn für jeden Morphismus $g : Y' \to Y$ gilt: $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ ist abgeschlossen.

b) f heißt ***eigentlich***, wenn es von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist.

Beispiel

$\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec}$ ist abgeschlossen, aber nicht universell abgeschlossen.

Denn:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^2_k = \mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d] \\
\mathbb{A}^1_k \arrow[r] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

pr_1 ist nicht abgeschlossen.

$V = V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_k$, $\mathrm{pr}_1(V) = ?$

$V = V(XY - 1) \Rightarrow \mathrm{pr}_1(V) = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$

$\Rightarrow \mathrm{pr}_1(V) = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$ ist nicht abgeschlossen (Œ k algebraisch abgeschlossen)

Definition 8.6

a) Ein nullteilerfreier Ring R heißt ***Bewertungsring***, wenn für jedes $x \in K = \operatorname{Quot} R$ gilt: $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$. R ist lokaler Ring mit maximalem Ideal $m = \{x \in R : x^{-1} \notin R\}$, $(x+y)^{-1} =$ Übung??

b) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, R ein Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot} R$, $U = \operatorname{Spec} K$, $T = \operatorname{Spec} R$.

Ein kommutatives Diagramm $\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "h_1"'] & Y \end{tikzcd}$ heißt ***Bewertungsdiagramm*** für f.

Satz 2

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, X noethersch, f von endlichem Typ für „eigentlich“. Dann gilt:

a) f ist genau dann $\left\{\begin{matrix} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{matrix}\right\}$, wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K = U \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "(*)"] \\
\operatorname{Spec} R = T \arrow[r, "h_1"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

$\left\{\begin{matrix} \text{höchstens} \\ \text{genau} \end{matrix}\right\}$ einen Morphismus $h : T \to X$ gibt sodass (*) kommutiert

Dabei sei R ein Bewertungsring und $K = \operatorname{Quot}(R)$.

b) Sind X und Y noethersch und f von unendlichem Typ, so genügt es, Bewertugnsdiagramme zu diskreten Bewertungsringen zu betrachten.

Erinnerung

R Bewertungsring $:\Leftrightarrow$ R nullteilerfrei, für $x \in \operatorname{Quot}(R)^\times$ ist $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$.

Bewertung: G abelsche Gruppe, $\leq$ Totalordnung auf G, sodass aus $x \leq y$ folgt: $x + a \leq y + a \;\forall\; a \in G$, $v : k^\times \to G$ Homomophismus mit $v(a+b) \geq \min(v(a), v(b))$.

Beispiel
Sei $X = \mathbb{A}^1_k$, $Y = \operatorname{Spec} k$, $f : X \to Y \ldots$
$K = k(T)$, $R = \{\frac{g}{h} : g, h \in k[T], \deg h \geq \deg g\}$, R diskreter Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot}(R)$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k(T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k(T) & k[T] \arrow[l] \arrow[dl, dashed, "h?"'] \\
R \arrow[u] & k \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Es gibt kein h, da $k[T] \hookrightarrow k(T)$ *nicht* über R faktorisiert: $T \notin R$

Bemerkung

Beweisskizze

I) „separiert“

„$\Rightarrow$“: Seien h, h' Fortsetzungen von h_0.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "h"] \arrow[ur, shift right, "h'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Sei $\tilde{h} : T \to X \times_Y X$ der von h und h' induzierte Morphismus.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\tilde{h}"'] \arrow[drr, bend left, "h'"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X \times_Y X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist $h(t_1) = h'(t_1) = h_0(t_1) =: x_1 \Rightarrow \tilde{h}(t_1) \in \Delta(X)$

$\Delta(X)$ ist nach Voraussetzung abgeschlossen $\Rightarrow$ $\tilde{h}(t_0) \in \overline{\{\tilde{h}(t_1)\}} \subseteq \Delta(X) \Rightarrow h(t_0) = h'(t_0) \Rightarrow h = h'$, weil $h^\#$ und $h'^\#$ durch h_0 festgelegt sind.

„$\Leftarrow$“: Genügt zu zeigen: $\Delta(X)$ ist abgeschlossen in $X \times_Y X$. Weil X noethersch ist, können wir verwenden:

Proposition 8.7
Sei $f : X \to Y$ ein quasikompakter Morphismus von Schemata.

Dann gilt: $f(X)$ ist abgeschlossen in $Y \Leftrightarrow$ für jedes $y_1 \in f(X)$ und jedes $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$ ist $y_0 \in f(X)$ („abgeschlossen unter Spezialisierung“)

Beweis
[Har77] Chapter II, Lemma 4.5 □

Sei also $x_1 \in \Delta(X)$, $x_0 \in \overline{\{x_1\}} \subseteq X \times_Y X$. Sei $Z := \overline{\{x_1\}}$ mit der reduzierten Struktur $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z,x_0}$, $K = \mathcal{O}_{Z,x_1} = \kappa(x_1) = \operatorname{Quot} \mathcal{O}$.

Proposition + Definition 8.8
Sei K ein Körper, $R \subset K$ ein lokaler Ring.

a) (R_1, m_1) ***dominiert*** (R_2, m_2), wenn $R_2 \subseteq R_1$ und $m_2 = m_1 \cap R_2$.

b) R ist Bewertungsring $\Leftrightarrow$ R ist maximal bezüglich Dominanz

c) R wird dominiert von einem Bewertungsring.

Beweis
[AM94] Chapter 5, Theorem 5.11 $\square$

Sei also $R \subset K$ Bewertungsring, der $\mathcal{O}$ dominiert. Nach Vorüberlegung gibt es Morphismus $h : T = \operatorname{Spec} R \to X \times_Y X$ mit $h(t_1) = x_1$, $h(t_0) = x_0$.

Sei $h_i := \mathrm{pr}_i \circ h$, $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "i"'] \arrow[ddr, bend left, "h_0"] & \\
& & \\
T \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend left, "h_2"] \arrow[dr, bend right, "h_1"'] & X \times_Y X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f \circ h_1 = f \circ h_2$

Da $x_1 \in \Delta(X)$ ist $h_1|_U = h_2|_U$, $U = \operatorname{Spec} K$.

$\xRightarrow{\text{Vor.}} h_1 = h_2 \Rightarrow h$ faktorisiert über $\Delta \Rightarrow x_0 \in \Delta(X)$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "h_1"'] \arrow[drr, "h"] \arrow[drrr, bend left, "h_1"] & & & \\
& X \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
& & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

II) „eigentlich“

„$\Rightarrow$“: Eindeutigkeit von h folgt aus I

Existenz von h: Im Basiswechseldiagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y T \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[r, "h_1"'] & Y
\end{tikzcd}$$

ist f' nach Voraussetzung abgeschlossen.

Sei $\varphi : U \to X \times_Y T$ der von h_0 und i induzierte Morphismus

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "h_0"] \arrow[dr, "i"'] & X \times_Y T \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ & T \arrow[r, "h_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

Da $i = f' \circ \varphi$ ist und i dominant, ist auch f' dominant $\xRightarrow{f' \text{ abg.}}$ f' surjektiv

Sei $z_1 = \varphi(t_1) \in X \times_Y T$, also $f'(z_1) = t_1$ (generischer Punkt), $Z := \overline{\{z_1\}}$ mit reduzierter Struktur.

Auch $f'|_Z$ ist surjektiv, also gibt es $z_0 \in Z$ mit $f'(z_0) = t_0$. f' induziert lokalen Ringhomomorphismus $R = \mathcal{O}_{T,t_0} \to \mathcal{O}_{Z,z_0}$ und Einbettung $K = \kappa(t_1) \hookrightarrow \kappa(z_1)$. φ induziert $\kappa(z_1) \hookrightarrow \kappa(t_1) = K$, also $\kappa(z_1) \cong K$.

$\xRightarrow{\text{Prop. 8.8}} R \cong \mathcal{O}_{Z,z_0} \xRightarrow{\text{§3 Bsp.2}} \exists\, h : t \to X$ mit $h(t_i) = \mathrm{pr}_X(z_i)$, $i = 0, 1$

„$\Leftarrow$“: Zu zeigen: Wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm genau eine Fortsetzung h von h_1 gibt, so ist f eigentlich.

Es genügt zu zeigen: f' ist universell abgeschlossen. Sei also Bewertungsdiagramm

$$\begin{tikzcd} X' = X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Zu zeigen: f' ist abgeschlossen. Sei dafür $Z' \subseteq X'$ abgeschlossen, $y_1 = f'(z_1) \in f'(Z')$ und $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$.

Zu zeigen: $y_0 \in f'(Z')$ (das genügt nach Proposition 8.7)

Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z,y_0}$, wobei $Z = \overline{\{y_1\}}$ (mit reduzierter Struktur)

$\mathrm{Quot}(\mathcal{O}) = \kappa(y_1) \underset{(f')^\#}{\hookrightarrow} \kappa(z_1) =: K$

$K|\kappa(y_1)$ ist endliche Körpererweiterung (da f von endlichem Typ) $\xRightarrow{\text{Prop.8.8}}$ Es gibt Bewertungsring R von K, der $\mathcal{O}$ dominiert $\Rightarrow$ Es gibt Morphismus $h_1 : T = \operatorname{Spec} R \to Y'$ mit $h_1(t_i) = y_i$, $i = 0, 1$. Dann ist

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K = U \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h'"] \arrow[urr, dashed, "h"] & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ein Bewertungsdiagramm für f. Nach Voraussetzung gibt es $h : T \to X$ mit ...

Die UAE des Faserprodukts liefert $h' : T \to X'$ mit $f'(h'(t_0)) = h_1(t_0) = y_0 \Rightarrow y_0 \in f'(Z')$.

$h'(t_0) := z_0 \in \overline{\{h'(t_1)\}} = \overline{\{z_1\}} \in Z'$ □

Folgerung 8.9

Für Morphismen noetherscher Schemata gilt:

a) Die Komposition $\left\{\begin{array}{c}\text{separierter}\\ \text{eigentlicher}\end{array}\right\}$ Morphismen ist $\left\{\begin{array}{c}\text{separiert}\\ \text{eigentlich}\end{array}\right\}$.

b) $\left\{\begin{array}{c}\text{separiert}\\ \text{eigentlich}\end{array}\right\}$ ist stabil unter Basiswechsel.

c) Ist $g \circ f$ $\left\{\begin{array}{c}\text{separiert}\\ \text{eigentlich und } g \text{ separiert}\end{array}\right\}$, so ist f $\left\{\begin{array}{c}\text{separiert}\\ \text{eigentlich}\end{array}\right\}$.

Beweis
Bewertungskriterium anwenden $\square$

Proposition 8.10
Der Strukturmorphismus $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist eigentlich.

Folgerung 8.11
Sei k ein Körper

a) $\mathbb{P}^n_k$ ist eigentlich über $\operatorname{Spec} k$.

b) Sind V, V' projektive Varietäten über k, $f : V \to V'$ Morphismus, so ist der induzierte Morphismus $t(V) \to t(V')$ eigentlich.

Beweis

b) Sei $\underset{\subseteq \mathbb{P}^n_k}{X} := t(V)$, $\underset{\subseteq \mathbb{P}^m_k}{Y} := t(V')$ (abgeschlossene Unterschemata)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "g \circ f"] & & Y \arrow[d] \arrow[dl, "g"'] \\
\mathbb{P}^n_k \arrow[r, "\text{a)}"'] & \operatorname{Spec} k & \mathbb{P}^m_k \arrow[l, "\text{a)}"]
\end{tikzcd}$$

Aus 8.9 a) und 8.9 c) folgt: f ist eigentlich. $\square$

Beweis (von Proposition 8.10)
$\mathbb{P}^n_k$ ist von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ✓

Sei
$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\
T \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists! h"] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$
ein Bewertungsdiagramm.

Zu zeigen: $\exists! h : T \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$

Sei $\xi_1 : h_0(t_1)$; Œ $\xi_1 \in \bigcap_{i=0}^n U_i$ $(U_i = D(X_i))$ (sonst ist $\xi_1 \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{Z}}$ Induktion über n) $\Rightarrow \frac{x_i}{x_j} \in \mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}, \xi_1}$ für alle $i, j \Rightarrow$ Das Bild $\tilde{f}_{ij}$ von $\frac{x_i}{x_j}$ in $\underbrace{\kappa(\xi_1)}_{= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}, \xi_1} / m_{\xi_1}}$ ist $\neq 0 \Rightarrow f_{ij} := h_0^{\#}(\tilde{f}_{ij}) \in K^{\times}$

Sei $v : K^{\times} \to G$ die zu R gehörige Bewertung. Wähle $j \in \{1, \dots, n\}$, sodass $v(f_{j0}) = \min_{k=1}^n v(f_{k0}) \Rightarrow v(f_{ij}) = v(f_{i0}) - v(f_{j0}) \geq 0$ für $i = 0, \dots, n \Rightarrow f_{ij} \in R$ für $i = 0, \dots, n \Rightarrow \frac{X_i}{X_j} \mapsto f_{ij}$ definiert Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}] \to R$, also Morphismus $h : T \to U_j \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$

Eindeutigkeit von h: Sei $\underset{\neq h}{h'} : T \to U_k$ eine weitere Fortsetzung von h_0.

Dann ist $k \neq j$, weil $U_j \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ separiert ist (8.3). Sei $\beta : \mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_k}, \dots, \frac{X_n}{X_k}] \to R$ der zugehörige Ringhomomorphismus $\Rightarrow \beta(\frac{X_i}{X_k}) = h_0^{\#}(\frac{X_i}{X_k}) = f_{ik} \in R^\times$
Es ist $\underset{\in R^\times}{f_{ik}} = \underset{\in R^\times}{f_{ij}} \cdot \underset{\in R^\times}{f_{jk}} \Rightarrow \beta$ induziert denselben Morphismus $T \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ wie α. $\square$

Kapitel 2

Garben und Divisoren

§ 9 $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Definition 9.1
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf X heißt $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, wenn gilt:

(i) $\mathcal{F}(U)$ „ist“ $\mathcal{O}_X(U)$-Modul für jedes offene $U \subseteq X$

(ii) $\rho^U_{U'} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ ist $\mathcal{O}_X(U)$-Modul-Homomophismus für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen (via $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U')$)

Bemerkung
Die $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X bilden eine Kategorie. Gegenbeispiel: $\mathcal{O}_X^\times$ ist *keine* $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beispiele (für $\mathcal{O}_X$-Modulgarben)

1) Idealgarben

2) Sei X eine nichtsinguläre Kurve (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k), $D := \sum\limits_{\substack{P \in X \\ \text{(abg.)}}} n_P P$ ein Divisor. $\mathcal{O}_X$ soll die Garbe der regulären Differentiale auf X sein.

   Für $U \subseteq X$ offen sein $\mathcal{L}(D)(U) := \{f \in k(X) : \operatorname{div} f|_U + D|_U \geq 0\}$, das heißt für alle $P \in U$ gilt $\operatorname{ord}_P f \geq -m_P$.

   $\mathcal{L}(D)(U)$ ist $\mathcal{O}_X(U)$-Modul: für $g \in \mathcal{O}_X(U)$, $f \in \mathcal{L}(D)(U)$ und $P \in U$ ist $\operatorname{ord}_P(fg) = \operatorname{ord}_P(f) + \underbrace{\operatorname{ord}_P(g)}_{\geq 0}$

   $\Rightarrow \mathcal{L}(D)$ ist Modulgarbe

3) Sei X weiterhin nichtsinguläre Kurve.

   Erinnerung: Sei R ein Ring, A eine R-Algebra, M ein A-Modul, $\operatorname{Der}_R(A, M) = \{\delta : A \to M, R\text{-liniear}, \delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)\}$.

   Es gibt $\left\{ \begin{array}{ll} \Omega_{A/R} & A\text{-Modul} \\ d : \begin{array}{rcl} A & \to & \Omega_{A/R} \\ a & \mapsto & da \end{array} & \text{Derivation} \end{array} \right\}$ sodass
   $$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "\delta"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi \\ A\text{-linear}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

   $A = k[X]$
   $\Rightarrow \boxed{\Omega_{A/k} = A \cdot dX}$
   $\Omega_{k(X)/k} = k(X) \cdot dX$

Es gilt: Ist X irreduzible Kurve, so ist $\Omega_{k(X)/k}$ 1-dimensionaler Vektorraum über $k(X)$ (Beispiel $y^2 = x^3 + ax + b \Rightarrow 2ydy = 3x^2dx + adx$)

Für $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$ und $P \in X$ sei $\operatorname{ord}_P \omega$ wie folgt definiert: sei t_P ein Erzeuger von m_P (= maximales Ideal in $\mathcal{O}_{X,P}$)

$\Rightarrow \exists\ f_P \in k(X)$ mit $\omega = f_P dt_P$. Setze $\operatorname{ord}_P \omega := \operatorname{ord}_P f_P$

Für $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$ sei $\operatorname{div} \omega := \sum\limits_{P \in X} \operatorname{ord}_P \omega$ (wobei $d(t_P - c) = dt_P$).

Für $U \subseteq X$ offen: $\Omega_X(U) := \{\omega \in \Omega_{k(X)/k} : \operatorname{div} \omega|_U \geq 0\}$

$\mathcal{O}_X$ ist $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, da $\operatorname{div}(f \cdot \omega) = \operatorname{div} f + \operatorname{div} \omega$.

Definition + Bemerkung 9.2
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

a) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ sei die zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

b) Für $U \subseteq X$ offen sei
$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$
Das ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beweis
b) ...

Definition + Bemerkung 9.3
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus lokal geringter Räume

a) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X ist $f_*\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe.

b) Für jede $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ auf Y ist $f^{-1}\mathcal{G}$ eine $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe und $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beweis

a) Für $U \subseteq Y$ offen ist $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ ein $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$-Modul, $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ induziert $f^\#_U : \mathcal{O}_Y(U) \to f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. Dadurch wird $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$ zu einem $\mathcal{O}_Y(U)$-Modul.

b) Zu Definition von $f^*\mathcal{G}$ wird Garbenhomomorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ benötigt. $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ induziert $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to f^{-1}f_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{1.14} \mathcal{O}_X$ □

Erinnerung
$X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema, $I \subseteq R$ Ideal, $f \in R$, $\tilde{I}(D(f)) = I \cdot R_f = I \cdot \mathcal{O}_X(D(f))$, $\tilde{I}$ heißt quasikohärente Idealgarbe.

Definition + Bemerkung 9.4

a) Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema, M ein R-Modul. Dann sei $\tilde{M}$ die (!) Garbe auf X mit $\tilde{M}(D(f)) := M_f$ (der von M erzeugte Modul über R_f) für jedes $f \in R$. $\tilde{M}$ ist $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, $(\tilde{M})_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

b) Sei X ein Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ heißt ***quasikohärent***, wenn für jede affine Teilmenge $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ ein R-Modul M_U existiert, sodass $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}_U$.

c) $\mathcal{F}$ (wie in b)) ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene affine Überdeckung $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ von X gibt mit $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$ für geeignete R_i-Moduln M_i.

d) Ist X noethersch, so heißt $\mathcal{F}$ ***kohärent***, wenn in b) (beziehungsweise c)) alle R-Moduln M_U endllich erzeugbar sind.

Beweis

c) Wie Übung 4, Aufgabe 3 □

Bemerkung 9.5

Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema.

Die Zuordnung $M \mapsto \tilde{M}$ ist ein kovarianter auf Objekten injektiver Funktor von der Kategorie R-Mod in $\mathcal{O}_X$-Mod; Umkehrfunktor: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(X)$.

Beweis

Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt.

Zu zeigen: $0 \to \tilde{M}' \to \tilde{M} \to \tilde{M}'' \to 0$ ist exakt.

Genügt zu zeigen:
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \tilde{M}'_{\mathfrak{p}} & \to & \tilde{M}_{\mathfrak{p}} & \to & \tilde{M}''_{\mathfrak{p}} & \to & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \to & M'_{\mathfrak{p}} & \to & M_{\mathfrak{p}} & \to & M''_{\mathfrak{p}} & \to & 0 \end{array}$$
exakt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\operatorname{Spec} R$
Das stimmt! □

Bemerkung 9.6

Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema.

a) Für R-Moduln M und N gilt:

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \cong \widetilde{M \otimes_R N}$$

b) Für R-Moduln M_i, $i \in I$ gilt:

$$\bigotimes_{i \in I} \tilde{M}_i \cong \widetilde{\bigotimes_{i \in I} M_i}$$

Beweis

a) $(\widetilde{M \otimes_R N})_{\mathfrak{p}} = (M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} = \tilde{M}_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \tilde{N}_{\mathfrak{p}} \cong (\tilde{M} \otimes_R \tilde{N})_{\mathfrak{p}}$

b) genauso □

Bemerkung 9.7

Seien $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} R'$ affine Schemata, $f : X \to Y$ Morphismen, $\alpha = f_X^{\#} : R' \to R$.

a) Für jeden R-Modul gilt:

$$f_*\tilde{M} =_\alpha \tilde{M} (= \text{der via } \alpha \text{ als } R'\text{-Modul aufgefasste } R\text{-Modul } M)$$

b) Für jeden R'-Modul N gilt:

$$f^*\tilde{N} \cong (\widetilde{N \otimes_{R'} R})$$

Beweis

a) Für $U \subseteq Y$ offen ist $f_*\tilde{M}(U) = \tilde{M}(f^{-1}(U))$; das wird durch $f_U^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ zum $\mathcal{O}_Y(U)$-Modul (vergleiche 9.3 a)).

b) $f^*\tilde{N}(X) = f^{-1}\tilde{N}(X) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(X)} \mathcal{O}_X(X) = N \otimes_R R$; Entsprechendes gilt für jedes $U \subseteq X$ offen. □

Proposition 9.8
Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Schemata.

a) Ist $\mathcal{G}$ quasikohärent auf Y, so ist $f^*\mathcal{G}$ quasikohärent auf X.
b) Sind X und Y noethersch und ist $\mathcal{G}$ kohärent, so ist $f^*\mathcal{G}$ kohärent.
c) Ist X noethersch und $\mathcal{F}$ quasikohärent auf X, so ist $f_*\mathcal{F}$ quasikohärent auf Y.

Beweis

a) Œ $Y = \operatorname{Spec} R'$ affin, $\mathcal{G} = \tilde{N}$ für einen R'-Modul N. Œ $X = \operatorname{Spec} R$ affin. Damit folgt die Behauptung aus 9.7 b).

   $x_1, \ldots, x_n$ seien Erzeuger von N also R'-Modul $\Rightarrow x \in N$ hat Darstellung $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$

   Behauptung: $x_1 \otimes 1, \ldots, x_n \otimes 1$ erzeugen $N \otimes_{R'} R$ als R-Modul

   Sei $x \otimes a \in N \otimes_{R'} R, x = \sum a_i x_i \ (a_i \in R') \Rightarrow x \otimes a = a \cdot \sum a_i (x_i \otimes 1)$

b) Ist N endlich erzeugt als R'-Modul, so ist $N \otimes_{R'} R$ endlich erzeugt als R'-Modul.

c) Œ Y affin. Sei $U_1, \ldots, U_r$ offene affine Überdeckung von X. Œ $U_i \cap U_j$ affin(!)? (Übung)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & f_*\mathcal{F} & \to & \bigoplus\limits_{i=1}^{r} f_*\mathcal{F}|_{U_i} & \to & \bigoplus\limits_{i<j} f_*\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j} \\
 & & m & \mapsto & (m|_{u_i})_{i=1,\ldots,r} & & \\
 & & & & (m)_{i=1,\ldots,r} & \mapsto & (m_i|_{u_i \cap u_j} - m_j|_{u_i \cap u_j})_{i<j}
\end{array}$$

   ist exakt (weil $\mathcal{F}$ Garbe ist, weil f_* linksexakt ist) $\Rightarrow f_*\mathcal{F}$ ist als Kern einer Morphismus von quasikohärenten Garben selbst quasikohärent. □

§ 10 Lokal Freie Garben

Definition + Bemerkung 10.1
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

a) $\mathcal{F}$ heißt ***frei*** vom Rang $n \geq 1$, wenn $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X$.

b) $\mathcal{F}$ heißt ***lokal frei*** vom Rang n, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt, sodass $\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ für jedes $i \in I$.

c) Ist X Schema, so sind lokal freie Garben quasikohärent (und sogar kohärent wenn X noethersch ist)

Beweis
c) Ist $U = \operatorname{Spec} R$, so ist $\mathcal{F}|_U$ frei vom Rang $n \Leftrightarrow \mathcal{F} \cong \tilde{R}^n$. □

Beispiel 10.2
Sei X nichtsinguläre Kurve (über $k\ldots$) und D ein Divisor auf X. Dann ist $\mathcal{L}(D)$ lokal frei vom Rang 1: Übung 9, Aufgabe 3b)
$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X) : \operatorname{div}(f|_U) + D|_U \geq 0\}$

Beispiel
Sei X nichtsinguläre Kurve/k, k algebraisch abgeschlossen, $\mathcal{L}$ lokal freie Garbe vom Rang 1 auf X, $\mathcal{L} \subseteq k(X)$ (konstante Garbe) $\Rightarrow \exists$ Divisor auf X mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D)$

Denn: Sei $(U_i)_{i=1,\ldots,r}$ offene Überdeckung von X mit $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$, $i = 1, \ldots, r$

Nach Voraussetzung ist dann $\mathcal{L}(U_i) = f_i \cdot \mathcal{O}_X(U_i)$ für ein $f_i \in k(X)$. Setze $D|_{U_i} := \operatorname{div}(\frac{1}{f_i})$

Behauptung: Auf $U_i \cap U_j$ ist $\operatorname{div}(\frac{1}{f_i}) = \operatorname{div}(\frac{1}{f_j})$

Äquivalent: $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$

denn: $\mathcal{L}(U_i \cap U_j) = f_i \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = f_i \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$

Beispiel 10.3
Sei X eine Mannigfaltigkeit (reelle, differenzierbare, komplexe) und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der stetigen (differenzierbaren, holomorphen) Funktionen auf X. Sei E eine weitere Mannigfaltigkeit, $p : E \to X$ eine stetige (differenzierbare, holomorphe) Abbildung.

(E, p) heißt ***Vektorbündel*** vom Rang n über X, wenn es eine offene Überdeckung (U_i) von X gibt und Isomorphismen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ sodass

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "///"] & U_i \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{U_i}"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

mit $p = \mathrm{pr}_{U_i} \circ \varphi_i$, sodass für alle i, j gilt: $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ induziert für jedes $x \in U_i \cap U_j$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die stetig (differenzierbar, holomorph) von x abhängt, das heißt $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$.

Sei $\mathcal{E}$ die Garbe der Schnitte in E, das heißt $\mathcal{E}(U) = \{s : U \to E$ stetig (differenzierbar, holomorph) $: p \circ s = \mathrm{id}_U\}$. $\mathcal{E}$ ist lokal frei vom Rang n.

Denn: Für jedes $i \in I$ ist $\mathcal{E}(U_i) = \{s : U_i \to \mathbb{R}^n \text{ stetig (differenzierbar, holomorph)}\} = (\mathcal{O}_X(U_i))^n \Rightarrow \mathcal{E}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$

Umgekehrt: Sei $\mathcal{E}$ lokal frei vom Rang n auf X. Sei $U_i \subset X$ offen, $\varphi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \to (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ Isomorphismus ($i \in I$, (U_i) Überdeckung).

Für $i, j \in I$ und $x \in U_i \cap U_j$ ist die induzierte Abbildung $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x : \kappa_x^n \to \kappa_x^n$ ein Isomorphismus von $\kappa(x)$-Vektorraum ($\kappa(x) = \mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{C}$).

$\Rightarrow (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x \in \mathrm{GL}_n(\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}})$ und $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$

Sei $E_i := U_i \times \mathbb{R}^n$. Verklebe E_i und E_j über $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ via $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$. Erhalte E!

Definition 10.4

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $p : E \to X$ ein Morphismus von Schemata.

(E, p) heißt (geometrisches) ***Vektorbündel*** über X, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt und Isomorphismen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} U_i$, sodass für alle i, j und für alle offenen affinen Teilmengen $\underset{= \operatorname{Spec} R}{U} \subseteq U_i \cap U_j$ gilt:

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathbb{A}^n_U}$ wird vone einem linearen Automorphismus α_{ij} von $R[X_1, \dots, X_n]$, das heißt $\alpha_{ij}(a) = a$ für alle $a \in R$ und $\alpha_{ij}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$ für gewisse $a_{ij} \in R$ ($\Leftrightarrow \alpha_{ij}$ ist R-Algebra-Homomorphismus), induziert.

Anmerkung: $\mathbb{A}^n_U = \operatorname{Spec} R[X_1, \dots, X_n]$

Proposition 10.5

Sei X ein Schema. Die Isomorphieklassen von lokal freien Garben vom Rang n auf X ensprechen bijektiv den Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang n über X.

Beweis

Analog Beispiel 10.3; Übung? □

Definition + Proposition 10.6

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{E}$ lokal freie Garbe vom Rang n auf X.

a) $\mathcal{E}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ ist lokal freie Garbe vom Rang n, sie heißt zu $\mathcal{E}$ ***duale*** Garbe.
b) $(\mathcal{E}^*)^* \cong \mathcal{E}$
c) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.
d) Ist $\mathcal{E}'$ eine weitere lokal freie Garbe vom Rang m, so ist $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'$ lokal frei vom Rang $n \cdot m$.
e) Ist $f : Y \to X$ Morphismus lokal geringter Räume, so ist $f^*\mathcal{E}$ lokal frei vom Rang n auf Y.

Beweis

a) Lokal ist $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X^n$ und $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X^n$.
b) Wie in Lineare Algebra I
c) Für $U \subseteq X$ offen ist
$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{O}_X|_U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U) & \cong & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) \\ l \otimes v & \mapsto & v \mapsto (x \mapsto l(x)v) \end{array}$$
d) $\mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^m \cong \mathcal{O}_X^{n \cdot m}$
e) Ist $U \subseteq X$ offen mit $\mathcal{E}|_U = (\mathcal{O}_X|_U)^n$, so ist $f^*\mathcal{E}(f^{-1}(U)) = (f^{-1}\mathcal{O}_X|_U \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{O}_Y)(f^{-1}(U)) = (\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)))^n$ □

Bemerkung + Definition 10.7
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum.

a) Für jede lokal freie Garbe $\mathcal{L}$ auf X von Rang 1 gilt:

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}_X$$

b) Die Isomorphieklassen von lokal freien Garben vom Rang 1 auf X bilden eine Gruppe $\operatorname{Pic}(X)$ (***Picard-Gruppe*** von X).

c) Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{L}$ auf X heißt ***invertierbar***, wenn sie lokal frei vom Rang 1 ist.

Beweis

a) Nach 10.6 c) ist $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$. Sei $\varphi : \mathcal{O}_X \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ gegeben durch $1 \mapsto \mathrm{id}$. φ ist injektiver Morphismus von Garben.

   φ ist surjektiv, da φ_X surjektiv ist für jedes $x \in X$: sei dazu $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_X)$ und $(U, \tilde{\alpha})$ Vertreter von α, sodass $\mathcal{L}|_U = \mathcal{O}_X|_U$. Dann ist $\tilde{\alpha}$ durch $\tilde{\alpha}(1) \in \mathcal{L}(U) = \mathcal{O}_X(U)$ bestimmt $\Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(1) \cdot \mathrm{id} \in \operatorname{Bild} \varphi_U$. $\square$

§ 11 Divisoren

Sei X ein noethersches, $\underbrace{\text{irreduzibles, reduziertes}}_{=:\text{ integer (engl. integral)}}$ Schema.

Definition + Bemerkung 11.1

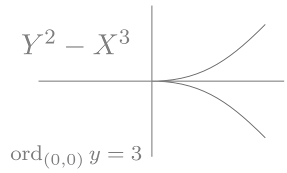
a) Ein ***Primdivisor*** auf X ist ein integres abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1.

b) Die freie abelsche Gruppe $\operatorname{Div}(X)$, die von den Primdivisoren erzeugt wird, heißt die gruppe der ***Weil-Divisoren***.

c) Ist X eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so sind die Primdivisoren die abgeschlossenen Punkte auf X.

d) Sei W ein Primdivisor auf X, η_W der generische Punkt von W, $\mathcal{O}_{X,W} = \mathcal{O}_{X,\eta_W}$ ($\dim \mathcal{O}_{X,W} = 1$). Für $f \in \mathcal{O}_{X,W} \setminus \{0\}$ sei $\operatorname{ord}_W(f) := \dim_{\kappa(W)} \mathcal{O}_{X,W}/(f)$. Für $f = \frac{g}{h} \in K = k(X) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,W})$ sei $\operatorname{ord}_W(f) = \operatorname{ord}_W(g) - \operatorname{ord}_W(h)$ (wohldefiniert).

   Es gilt: $\operatorname{ord}_W(f \cdot g) = \operatorname{ord}_W(f) + \operatorname{ord}_W(g)$.



$$k[X,Y]/(y^2 - x^3)_{(x,y)}/(y) = k \cdot \overline{1} + k \cdot \overline{x} + k \cdot \overline{x}^2 \rightsquigarrow \operatorname{ord}_{(0,0)} x = 2$$

e) Für $f \in k^\times$ sei $\operatorname{div}(f) := \sum\limits_{W \text{Primdiv.}} \operatorname{ord}_W(f) \cdot W$; $\operatorname{div}(f)$ ist Divisor.

f) $\operatorname{Cl}(X) := \operatorname{Div}(X) / \underbrace{\operatorname{Div}_H(X)}_{\text{Hauptdivisoren}}$ heißt ***Weil-Divisorengruppe*** von X.

Beispiel 11.2

$X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$

Jeder Primdivisor W auf $\mathbb{P}^n$ ist von der Form $W = V(F)$ für ein irreduzibles homogenes Polynom $F \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$. Sei $d := \deg F$.

Behauptung: $W - d \cdot H$ ist hauptdivisor für $H := V(X_0)$

denn: $\frac{F}{X_0^d} \in K = k(X)$, $\operatorname{div} \frac{F}{X_0^d} = W - d \cdot H \Rightarrow \operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ (als Gruppe)

Proposition 11.3

Sei R faktorieller Ring, $X = \operatorname{Spec} R$. Dann ist $\operatorname{Cl}(X) = 0$.

Beweis

Sei W Primdivisor, also $W = V(\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1.

Behauptung: $\mathfrak{p}$ ist Hauptideal

Dann ist $\mathfrak{p}(f)$ für ein Primideal $f \in R \Rightarrow \operatorname{div}(f) = W$

Beweis der Behauptung: Sei $0 \neq f \in \mathfrak{p}$, $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$ die Primfaktorzerlegung $\Rightarrow$ Œ $f_1 \in \mathfrak{p} \Rightarrow (0) \subsetneq (f_1) \subseteq \mathfrak{p}$ ist Primidealkette $\xRightarrow[\operatorname{ht}(\mathfrak{p})=1]{} \mathfrak{p} = (f_1)$ □

Beispiel
Sei $R = {}^{k[X,Y]}\big/_{(Y^2 - X^3 + X)} = k[E]$, $E = V(Y^2 - X^3 + X) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Dann ist für $P \in E$ abgeschlossen $1 \cdot P$ kein Hauptdivisor!

Definition + Bemerkung 11.4
Sei X ein integres Schema, $K = k(X)$, der Funktionenkörper von X.

a) Ein ***Cartier-Divisor*** auf X ist eine Äquivalenzklasse von Familien $(U_i, f_i)_{i\in I}$, wobei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von X, $f_i \in K^\times$, sodass $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$. Dabei sei $(U_i, f_i)_{i\in I} \sim (V_j, g_j)_{j\in J} :\Leftrightarrow \frac{f_i}{g_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)$.
b) Die Cartier-Divisoren auf X bilden eine Gruppe $\mathrm{CaDiv}(X)$ mit folgender Verknüpfung: Seien $D_1 = (U_i, f_i), D_2 = (V_j, g_j) \in \mathrm{CaDiv}(X)$, $(W_k)_k$ gemeinsame Verfeinerung, also $I = J$, $U_i = V_i$, $D_1 + D_2 := (U_i, f_i \cdot g_i)_{i\in I}$.
c) $\mathrm{CaDiv}(X) \cong {}^{\mathcal{K}_X^\times}\big/_{\mathcal{O}_X^\times}(X)$, wobei $\mathcal{K}_X^\times$ die konstante Garbe $K^\times$ sei.
d) $D \in \mathrm{CaDiv}(X)$ heißt ***Haptdivisor***, wenn es einen Vertreter von D der Form (X, f) gibt.

$$\mathrm{CaCl}(X) := {}^{\mathrm{CaDiv}}\big/_{\mathrm{CaDiv}_H}(X)$$

Beweis

c) Sei $D = (U_i, f_i)_i \in \mathrm{CaDiv}(X)$, U_i *klein*. Für $i \in I$ sei $\varphi_i \in {}^{K^\times}\big/_{\mathcal{O}_X}(U_i) = {}^{\mathcal{K}_X^\times}\big/_{\mathcal{O}_X^\times}(U_i)$ die Restklasse von f_i. φ_i ist durch D eindeutig bestimmt.

Auf $U_i \cap U_j$ ist $\varphi_i = \varphi_j \Rightarrow \exists \varphi \in {}^{K_X^\times}\big/_{\mathcal{O}_X^\times}(X)$ mit $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$

Sei umgekehrt $\varphi \in {}^{\mathcal{K}_X^\times}\big/_{\mathcal{O}_X^\times}(X)$. Für $x \in X$ sei $(U_x, \varphi^{(x)})$ Vertreter von $\varphi_x \in (\mathcal{K}^\times, \mathcal{O}^\times)_x$ (U_x Umgebung von $x \in K^\times$)

$\Rightarrow (U_x, \varphi^{(x)})_{x\in X}$ ist Cartier-Divisor. $\square$

Beispiel
Sei $X = \mathbb{P}_k^n$, k Körper, $U_i = D(X_i)$, $i = 0, \dots, n$, $f_i := \frac{X_0}{X_i}$, $f_0 := 1$.
Behauptung: (U_i, f_i) ist Cartier-Divisor
Denn: Für $i \neq 0 \neq j$ ist $\frac{f_i}{f_j} = \frac{X_j}{X_i} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$.

$\frac{f_i}{f_0} = \frac{X_0}{X_i} \in \mathcal{O}_X(U_0 \cap U_i)$
$\mathrm{div}(f_i)|_{U_i} = V(X_0)$
$(U_i, f_i)_{i=0,\dots,n}$ „induziert" also den Weil-Divisor $V(X_0)$.

Satz 3
Sei X noethersches intetegres separiertes Schema. Dann gilt:

a) $\mathrm{CaCl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$
b) Es gibt natürlichen Homomophismus $\alpha : \mathrm{CaCl}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$.
c) Ist $\mathcal{O}_{X,x}$ faktoriell für jedes $x \in X$, so ist α Isomorphismus.

Beweis

b) Sei $D = (U_i, f_i) \in \mathrm{CaDiv}(X)$, W Primdivisor auf X. Wähle i mit $U_i \cap W \neq \emptyset$. Setze $n_W := \mathrm{ord}_W(f_i)$.

n_W *ist wohldefininiert:* Sei $j \in I$ mit $U_j \cap W \neq \emptyset \xRightarrow{W \text{ irred.}} U_i \cap U_j \cap W \neq \emptyset$, $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times \Rightarrow (f_i) = (f_j)$ in $\mathcal{O}_{X,W} \Rightarrow \mathrm{ord}_W(f_i) = \mathrm{ord}_W(f_j)$

Œ I endlich, da X noethersch $\Rightarrow D = \sum_{W \text{ Primid.}} n_W W$ ist Weil-Divisor

c) Umkehrabbildung zu α

Behauptung: Zu jedem Weil-Divisor $D = \sum n_W W$ auf X gibt es Überdeckung $(U_i)_i$ von X und $f_i \in K^\times$ mit $D|_{U_i} = \operatorname{div}(f_i)|_{U_i}$.

Dann gilt: $\beta(D) := (U_i, f_i)$ ist Cartier-Divisor.

Denn: $\operatorname{div}(f_i)|_{U_i \cap U_j} = \operatorname{div}(f_j)|_{U_i \cap U_j} = D|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$

Beweis der Behauptung: Œ $X = \operatorname{Spec} R$. Sei $\xi \in X$ abgeschlossener Punkt.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} = R_{m_\xi}$ (nach Voraussetzung faktoriell!)

Für jeden Primdivisor $W = V(\mathfrak{p})$ von X gilt: $\xi \in W \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subseteq m_\xi$

Da $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ ist nach 11.3 $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_{X,\xi} = \underset{\in K^\times}{(f_w)}$ ein Hauptideal. Sei $f_\xi := \prod_{\xi \in W} f_W^{n_W}$ und $U_\xi := X - \bigcup_{\substack{W \text{ Primid.} \\ \xi \notin W \\ n_W \neq \operatorname{ord}_W f_\xi}} W$

a) Sei $D = (U_i, f_i) \in \operatorname{CaDiv}(X)$, $\mathcal{L}(D)(U_i) := \frac{1}{f_i} \cdot \mathcal{O}_X(U_i) \subset K$ (als $\mathcal{O}_X(U_i)$-Untermodul von K). Da $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$ gilt $\frac{1}{f_i}\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) = \frac{1}{f_j}\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$.

Behauptung 1: $\mathcal{L}(D)$ ist lokal freie Garbe vom Rang 1. $\mathcal{L}$ induziert Homomophismus $\operatorname{CaCl}(X) \to \operatorname{Pic} X$

Behauptung 2: Jede lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von $\mathcal{K}^\times$ ist von der Form $\mathcal{L}(D)$ für ein $D \in \operatorname{CaDiv}(X)$.

Behauptung 3: Jede lokal freie Garbe vom Rang 1 auf X ist isomorph zu einer Untergarbe von $\mathcal{K}$.

Beweis 3: $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$ □

Kapitel 3

Homologie von Garben

$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ kurze exakte Sequenz von Garben auf X, $U \subseteq X$ offen
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{F}'(U) \to \underset{\underset{\Gamma(U,\mathcal{F})}{\|}}{\mathcal{F}(U)} \to \mathcal{F}''(U) \to \ldots ?$ exakt

§ 12 abgeleitete Funktoren

Definition + Bemerkung 12.1
a) Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ***abelsch***, wenn gilt:
  (i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist abelsche Gruppe für alle $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
  (ii) Für Morphismen gelten die Distributivgesetze (bezüglich + und $\cdot$)
  (iii) Direkte Summen, Kerne, Kokerne existieren
  (iv) Der Homomorphiesatz gilt
b) $\underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{k-\mathrm{VR}}$, $\underline{R-\mathrm{Mod}}$, $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$, $\underline{\mathcal{O}_X - \mathrm{Mod}}$ sind abelsche Kategoriem
c) $\underline{\mathrm{Grp}}$, $\underline{\mathrm{Set}}$ sind nicht abelsch

Definition 12.2
Sei $\mathcal{C}$ abelsche Kategorie

a) Ein ***Komplex*** in $\mathcal{C}$ ist eine Sequenz $C^0 := \ldots \to C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+i} \to \ldots$ mit Objekten C^i in $\mathcal{C}$, Morphismen $d^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C^i, C^{i+1})$ sodass für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gilt: $\mathrm{Bild}(d^{i-1}) \subseteq \mathrm{Kern}(d^i)$
b) Für einen Komplex C^0 heißt $H^i(C^0) := {}^{\mathrm{Kern}(d^i)}\!\big/_{\mathrm{Bild}(d^{i-1})}$ ***i-tes Kohomologieobjekt***.
c) $d^i \circ d^{i-1} = 0 \ \forall\ i$

Proposition 12.3
Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie
a) Die Komplexe in $\mathcal{C}$ bilden eine Kategorie $\mathcal{C}^0$ mit Morphismen…
b) H^i ist Funktor $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}$✓
c) Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \to C'^0 \to C^0 \to C''^0 \to 0$ in $\mathcal{C}^0$ gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to H^0(C'^0) \to H^0(C^0) \to H^0(C''^0) \xrightarrow{d} H^1(C'^0) \to H^1(C^0) \to \ldots$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & C'^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C'^{i} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{C'^{i+1}} \arrow[r] \arrow[d, shift left] & C'^{i+2} \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^{i} \arrow[r] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, shift left, "\text{Urbild}"] & C^{i+2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & C''^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{C''^{i}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, shift left, "\text{Urbild}"] \arrow[uur, dashed, bend right] & C''^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & C''^{i+2} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Ziel: Sei X ein Schema, $\mathcal{F}$ Garbe auf X. Suche Gruppen (beziehungsweise $\mathcal{O}_X$-Moduln) $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \geq 0$, sodass für jede kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ in $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$ (beziehungsweise $\underline{\mathcal{O}_X - \mathrm{Mod}}$) gilt:

$0 \to H^0(X, \mathcal{F}') \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}'') \to H^1(X, \mathcal{F}') \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \dots$ ist exakt und $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Bemerkung 12.4
Sei $H^i(X, \cdot)$ so ein Funktor, (*) $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}^1 \to$ exakte Sequenz in $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$ („Auflösung von $\mathcal{F}$“).

Ist $H^i(X, \mathcal{G}^j) = 0$ für alle $j \geq 0$ und alle $i \geq 1$ ($\mathcal{G}^j$ ist ***azyklisch***), so gilt $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{G}^0))$

Beweis
Induktion über i:

$i = 0$: $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{G}^1)$ ist exakt.
$H^0(\Gamma(X, \mathcal{G}^0)) = \mathrm{Kern}(\Gamma(X, \mathcal{G}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{G}^1)) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$

Aus (*) folgt
$$\begin{array}{ccccccccccl} 0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{G}^0 & \to & \mathcal{G}^0/\mathcal{F} & \to & 0 & & \text{ist exakt und} \\ 0 & \to & \mathcal{G}^0/\mathcal{F} & \to & \mathcal{G}^1 & \to & \mathcal{G}^2 & \to & \dots & & \text{ist exakt} \end{array}$$

$i = 1$: Nach Voraussetzung gibt es lange exakte Sequenz

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}^0) \to H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to 0 \to H^1(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \to \dots$$

$$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) / \mathrm{Bild}(H^0(X, \mathcal{G}^0))$$

$$(H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \cong \mathrm{Kern}(H^0(X, \mathcal{G}^1) \to H^0(X, \mathcal{G}^2)))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) &\cong \mathrm{Kern}(H^0(X, \mathcal{G}^1) \to H^0(X, \mathcal{G}^2)) / \mathrm{Bild}(H^0(X, \mathcal{G}^0) \to H^0(X, \mathcal{G}^1)) \\ &= H^1(\Gamma(X, \mathcal{G}^0)) \end{aligned}$$

□

Definition + Bemerkung 12.5

a) Ein Objekt I in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ***injektiv***, wenn $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, I)$ exakt ist.

b) I ist genau dann injektiv, wenn für jedes solches Diagramm ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, I)$ existiert mit $\tilde{\varphi} \circ \alpha = \varphi$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\
 & I &
\end{tikzcd}
$$

$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \to C'' \to 0$

$0 \to \mathrm{Hom}(C'', I) \to \mathrm{Hom}(C, I) \to \mathrm{Hom}(C', I)$

Beispiel
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist injektiv in $\underline{\mathrm{Ab}}$, *denn*:

Seien $G' \subseteq G$ abelsche Gruppe, $\varphi : G' \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ Homomorphismus. Für $a \in G$ sei

$$\tilde{\varphi}(a) := \begin{cases} \frac{1}{n}\varphi(n \cdot a) & \text{, falls } n \text{ minimal mit } n \cdot a \in G' \\ 0 & , n \cdot a \notin G' \text{ für alle } n > 0 \end{cases}$$

Bemerkung 12.6
Sei I injektives Objekt in $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$ und $0 \longrightarrow I \underset{p}{\rightleftarrows} \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \longrightarrow \mathcal{F}'' \to 0$ exakt.

a) Dann gibt es $p : \mathcal{F} \to I$ mit $p \circ \alpha = \mathrm{id}_I$.
b) $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'' \oplus I$, *denn:*
$I \cap \mathrm{Kern}(p) = 0$, $\beta|_{\mathrm{Kern}(p)} : \mathrm{Kern}(p) \to \mathcal{F}''$ ist Isomorphismus, $I + \mathrm{Kern}(p) = \mathcal{F}$
c) $0 \to H^0(X, I) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}'') \to 0 = H^1(X, I)$ ist exakt.

Proposition 12.7
In den Kategorien $\underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{R\text{-Mod}}$, $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$, $\underline{\mathcal{O}_X\text{-Modul}}$ gibt es genügend viele injektive Objekte, das heißt jedes Objekt ist isomorph zu einem Unterobjekt eines injektiven Objekts.

Beweis
Aufwändige Konstruktion aus $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (aber naheliegend) □

Definition + Bemerkung 12.8
Sei X Schema, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(X)$

a) $\mathcal{F}$ besitzt injektive Auflösung, das heißt eine exakte Sequenz $0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots$ mit $\forall\ \nu : I_\nu$ injektiv $(\ldots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n,\ \tilde{d}^n : I^n/\mathrm{Bild}(d^{n-1}) \hookrightarrow I^{n+1},\ d^n = \tilde{d}^n \circ \mathrm{pr})$
b) $H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, I^0))$ heißt i-te Kohomologiegruppe von $\mathcal{F}$, das heißt H^0 ist die Kohomologie des Komplexes $0 \to \Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1) \to \Gamma(X, I^2) \to \ldots$
c) Insbesondere: $H^0(X, \Gamma) = \mathrm{Kern}(\Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1)) \underset{\text{linksexakt}}{\overset{\Gamma \text{ ist}}{=}} \Gamma(X, \mathcal{F})$

Proposition 12.9
Sei X Schema, $\mathcal{F} \in \mathrm{Abb}(X)$

a) $H^i(X, \mathcal{F})$ hängen nicht von der gewählten injektiven Auflösung ab.
b) $H^i(X, \cdot)$ ist ein Funktor $\underline{\mathrm{Ab}(X)} \to \underline{\mathrm{Ab}}$
c) Jede kurze Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ von Garben induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz $0 \to H^0(X, A) \to H^0(X, B) \to H^0(X, C) \to H^1(X, A) \to H^1(X, B) \to \ldots$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & I^n \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & I^{n+1} \arrow[dd] \\
& & & I^n/\mathrm{Kern}(d^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed] & \\
\mathcal{G} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & J^n \arrow[rr] & & J^{n+1}
\end{tikzcd}$$

d) Injektive Garben I sind azyklisch, das heißt für alle $i \geq 1$ ist $H^i(X, I) = 0$. $0 \to I \to I \to 0 \to 0 \ldots$ ist injektive Auflösung.

Verallgemeinerung 12.10
Seien A, B abelsche Kategorien, $\mathcal{A}$ habe genügend injektive Objekte und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter linksexakter Funktor. $\rightsquigarrow$ Definiere analog zu 12.8 ***abgeleitete Funktoren*** R^iF von F $(i \geq 0)$ $\rightsquigarrow$ diese haben die Eigenschaften aus 12.9.

§ 13 Čech-Kohomologie

Sei X topologischer Raum, $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von X, $\mathcal{F} \in \underline{\mathrm{Abb}(X)}$

Definition + Bemerkung 13.1

a) Für $k \geq 0$ sei $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod\limits_{i_0 < \ldots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k})$

$$d^k : \begin{cases} C(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \to & C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (S_{i_0, \ldots, i_k})_{i_0 < \ldots < i_k} & \mapsto & \left(\sum\limits_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu S_{i_0, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \ldots, i_{k+1}} |_{U_{i_0} \cap \ldots U_{i_{k+1}}} \right)_{i_0 < \ldots i_{k+1}} \end{cases}$$

b) Für alle $k \geq 0$ gilt $d^{k+1} \circ d^k = 0$, das heißt $0 \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} \ldots$ ist Kettenkomplex. [Nachrechnen!]

c) $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^k(C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = {}^{\mathrm{Kern}(d^k)}\big/_{\mathrm{Bild}(d^{k-1})}$ heißt k-te ***Čech-Kohomologie*** von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{U}$.

d) $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \overset{12.8}{=} H^0(X, \mathcal{F})$

Beweis

d) $\Phi : \begin{cases} \mathcal{F}(X) & \to & \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Kern}(d^0) \\ S & \mapsto & (S|_{U_i})_{i \in \mathbb{N}} \end{cases}$ ist wohldefiniert

Garbeneigenschaft: Φ bijektiv □

Beispiel 13.2

$X = S^1$, $\mathcal{F} = \mathbb{Z}$ konstante Garbe

a) $\mathcal{U} = \{X, \emptyset, \emptyset, \ldots\} \Rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \cong \mathbb{Z}$

$\forall k \geq 1 : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$

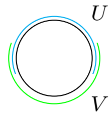
$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{d^0} 0 \xrightarrow{d^1} 0 \to \ldots$$

$\Rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \cong \mathbb{Z}$, $\forall\ k \geq 1 : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$

b) $\mathcal{U} = \{U, V\}$

$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V) \cong \mathbb{Z}^2$

$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U \cap V) = \mathbb{Z}^2$, $\forall\ k \geq 2 : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$



$$0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d^1} 0 \to 0 \to \ldots$$

mit $\left.\begin{array}{lcll} d^0 : & (s,t) & \mapsto & t - s|_{U \cap V} \\ \mathbb{Z}^2 : & (s,t) & \mapsto & (t-s, t-s) \in \mathbb{Z}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Bild}\, d^0 = \{(s,s)\} \in \mathbb{Z}^2\} \cong \mathbb{Z}^2$

$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Kern}(d^0) = \{(s,s) \in \mathbb{Z}^2\} \cong \mathbb{Z}$

$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = {}^{\mathbb{Z}^2}\big/_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$, $\forall\ k \geq 2 : \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$

Definition 13.3

a) Definiere für $k \geq 0$ die Garbe

$$\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \ldots < i_k} (i_{i_0 < \ldots < i_k})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}}$$

$$i_{i_0<\ldots<i_k} : U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k} \hookrightarrow X$$

Das heißt: $\mathcal{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})(U) = \prod\limits_{i_0<\ldots<i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k} \cap U)$

$$\mathcal{C}^k = (U,\mathcal{F})(X) = \mathcal{C}^k(U,\mathcal{F})$$

b) Definiere $d^k_U : \mathcal{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})(U) \to \mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})(U)$ wie in 13.1 $\Rightarrow d^k$ ist Garbenmorphismus und $\forall\ k \geq 0 : d^{k+1} \circ d^k = 0$

c) $\varepsilon_U : \begin{cases} \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})(U) \\ s & \mapsto & (s|_{U\cap U_i})_{i\in\mathbb{N}} \end{cases}$ definiert einen injektiven Garbenmorphismus.

d) $0 \to \mathcal{F} \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^0 \overset{d^0}{\to} \mathcal{C}^1 \overset{d^1}{\to} \mathcal{C}^2 \to \ldots$ ist eine Auflösung von $\mathcal{F}$ (das heißt exakt). *Achtung:* im Allgemeinen weder injektiv noch azyklisch!

Beweis

d) $U \subseteq X$ offen: $\mathcal{F}(U) \overset{\varepsilon_U}{\longrightarrow} \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(U \cap U_i) \overset{d^0}{\longrightarrow} \prod\limits_{i\neq j} \mathcal{F}(U \cap U_i \cap U_j)$

$d^0_U(\varepsilon_U(s)) = d^0_U((s|_{U\cap U_i})_{i\in N}) = (s|_{U\cap U_i|_{U\cap U_i\cap U_j}} - s|_{U\cap U_j|_{U\cap U_i\cap U_j}}) = 0$

Seien $x \in X$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in U_j$. Zeige Exaktheit auf den Halmen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_X"] & \mathcal{C}^0 \arrow[r, "d^0_X"] & \mathcal{C}^1 \arrow[r, "d^1_X"] \arrow[l, bend left, dashed, "h^1"] & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "d^2_X"] \arrow[l, bend left, dashed, "h^2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Definiere $h^k : \mathcal{C}^k_X \to \mathcal{C}^{k-1}_X$.

$s \in \mathcal{C}^k_X \Rightarrow \hat{s} = [(V,s)]$ Œ $V \subseteq U_j$, $\underset{(s_{i_0,\ldots,i_k})_{i_0<\ldots<i_k}}{\underset{\|}{s}} \in \mathcal{C}^k(V)$

Sei $t_{j_0,\ldots,j_{k-1}} : \begin{cases} 0 & , j \in \{j_0,\ldots,j_{k-1}\} \\ (-1)^\nu s_{j_0,\ldots,j,j_{k-1}} & , j_{\nu-1} < j < j_\nu \end{cases}$

$h^k(\hat{s}) = [(V,(t_{j_0,\ldots,j_{k-1}})_{i_0<\ldots<i_{k-1}}]$

Nachrechnen: $\underbrace{d^{k-1}_X \circ h^k + h^{k+1} \circ d^k_X}_{f} = \mathrm{id}$

Sei $\hat{s} \in \mathrm{Kern}(d^k_X)$, $\hat{s} = f(\hat{s}) = d^{k-1}_X \circ h^k(\hat{s}) \Rightarrow \hat{s} \in \mathrm{Bild}(d^{k-1}_X)$ □

Proposition 13.4

Sei X Schema, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(X)$, $U = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ offene Überdeckung von X. Dann gibt es für jedes $k \geq 0$ einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\check{H}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^k(X,\mathcal{F})$$

Beweis

Sei $0 \to \mathcal{F} \to I^0$ injektive Auflösung von $\mathcal{F}$ und $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0 = \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ Auflösung aus 13.3. Dann gibt es einen Homomorphismus von Komplexen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \mathcal{C}^0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\alpha^0"'] & & \mathcal{C}^1 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\alpha^1"] & & \mathcal{C}^2 \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha^2"] & \cdots \\ & & & \mathcal{C}^0/\mathcal{F} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed] & & \mathcal{C}^1/\mathrm{Bild}(\mathcal{C}^0) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r] & \mathcal{I}^0 \arrow[rr] & & \mathcal{I}^1 \arrow[rr] & & \mathcal{I}^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

§ 14 Kohomologie quasi kohärenter Garben

Definition + Bemerkung 14.1
Sei X ein topologischr Raum, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(X)$

a) $\mathcal{F}$ heißt ***welk***, wenn $\rho^U_{U'} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ surjektiv ist für alle offenen $U' \subseteq U$.

b) Konstante Garben sind welk, wenn X irreduzibel ist. Wolkenkratzergarben sind welk.

c) Ist $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \to 0$ exakt, $\mathcal{F}$ welk, so ist $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{F}''(U) \to 0$ exakt für jedes offene $U \subseteq X$).

d) Sei $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exakt. Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ welk, so auch $\mathcal{F}''$.

Beweis

c) Sei $V \subseteq U$ offen in X. Nach c) sind

und
$$\begin{tikzcd}
& & \tilde{s} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd] & & & \tilde{s}'' \arrow[ddd] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'(U) \arrow[rr] \arrow[d, "\text{Restriktions-abbildungen}"'] & & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}''(U) \arrow[rr] \arrow[d] & & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'(V) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[dd] & \mathcal{F}''(V) \arrow[rr] & & 0 \\
& & s \arrow[rrr, mapsto] & & & s'' & \\
& 0 & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$
exakt

Nach Voraussetzung sind die vertikalen Sequenzen exakt.

d) Sei $s \in \mathcal{F}''(U)$. Nach Voraussetzung (β surjektiv) gibt es offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U und $\hat{s} \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\beta_{U_i}(\hat{s}_i) = s_i|_{U_i}$. Sei $d_{ij} := \hat{s}_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

$\beta_{U_i \cap U_j}(d_{ij}) = 0 \Rightarrow d_{ij} \in \mathcal{F}'(U_i \cap U_j) \overset{\mathcal{F}' \text{ welk}}{\Longrightarrow}$ Œ $d_{ij} \in \mathcal{F}'(U_i)$

Setze $\hat{s}'_i := 2\hat{s}_i - d_{ij} \Rightarrow \hat{s}'_i|_{U_i \cap U_j} = 2\hat{s}_i - \hat{s}_i + \hat{s}_j = \hat{s}_i + \hat{s}_j = \hat{s}'_j|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow$ die $\hat{s}'_i$ bilden konsistente Familie $\Rightarrow \exists\ \tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$ mit $\tilde{s}|_{U_i} = \hat{s}'_i$ für alle $i \in I$ und $s_U(\tilde{s}) = s$. □

Proposition 14.2
Sei X ein Schema, $\mathcal{I}$ injektive $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X. Dann ist $\mathcal{I}$ welk.

Beweis
Sei $V \subseteq U$ offen. Es gilt
$$\begin{tikzcd}
j_!(\mathcal{O}_X|_V) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & j_!(\mathcal{O}_X|_U) \arrow[dl, dashed] \\
\mathcal{I} &
\end{tikzcd}$$
$(\mathcal{I}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}),\ \mathcal{I}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{I})))$

$\overset{\mathcal{I} \text{ inj.}}{\Longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X|_U), \mathcal{I}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X|_V), \mathcal{I})$ ist surjektiv □

Satz 4
Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein noethersches affines Schema, $\mathcal{F}$ quasi-hohärente Garbe auf X. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \geq 1$.

Beweis
Sei $M = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$, also $\mathcal{F} = \tilde{M}$. Sei $0 \to M \to I^\bullet$ eine injektive Auflösung des R-Moduls $M \overset{\text{Bem. 9.5}}{\Longrightarrow} 0 \to \tilde{M} \to \tilde{I}^\bullet$ ist exakt (also Ausflösung von $\mathcal{F}$). Der Satz folgt aus 14.4 und 14.3 □

Proposition 14.3
Welke Garben sind azyklisch.

Proposition 14.4
ist I injektiver R-Modul, so ist $\tilde{I}$ welke $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe ($X = \operatorname{Spec} R$).

Beweis (von Proposition 14.3)
Sei $\mathcal{F}$ welke Garbe, $\mathcal{I}$ injektive Garbe mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow 0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0$ exakt mit $\mathcal{G} = {}^{\mathcal{I}}\!/\!_{\mathcal{F}}$. Die lange exakte Kohomologiesequenz dazu ist:

$$0 \to \underset{=\mathcal{F}(X)}{H^0(X,\mathcal{F})} \to \underset{=\mathcal{I}(X)}{H^0(X,\mathcal{I})} \to \underset{=\mathcal{G}(X)}{H^0(X,\mathcal{G})} \xrightarrow[\text{14.1 c)}]{\text{Nullabb.}} \underset{=0}{H^1(X,\mathcal{F})} \to \underset{=0(\mathcal{I}\text{ inj.})}{H^1(X,\mathcal{I})} \to \underset{=0(\mathcal{G}\text{ welk})}{H^1(X,\mathcal{G})} \to H^2(X,\mathcal{F}) \to \underset{=0}{H^2(X,\mathcal{I})} \to$$

Nach 14.2 und 14.1 d) sind $\mathcal{I}$ und $\mathcal{G}$ welk. □

Beweis (von Proposition 14.4)
Es genügt zu zeigen: $\tilde{\mathcal{I}}(X) \to \tilde{\mathcal{I}}(U)$ surjektiv für jedes $U \subseteq X$ offen.

1. Fall: $U = D(f)$ für ein $f \in R$

$\Rightarrow \tilde{I}(U) = I_f$

Sei $\frac{b}{f^n} \in I_f$ (also $b \in I$, $n \geq 0$). *Gesucht:* $a \in I$ mit $\frac{a}{1} = \frac{b}{f^n}$ in I_f, also $(f^n a - b) \cdot f^m = 0$ für ein $m \geq 0$.

Für jedes $m \geq 0$ induziert $1 \mapsto f^{m+n}$ eine R-lineare Abbildung $R \to (f^{m+n})$. $\operatorname{Kern}(\varphi_m) = \operatorname{Ann}(f^{m+n})$ (Ideal) (Ann heißt Annulator)

Es ist $\operatorname{Ann}(f^m) \subseteq \operatorname{Ann}(f^{m+1}) \subseteq \ldots \xRightarrow{R\text{ noeth.}} \exists\, m$ mit $\operatorname{Ann}(f^{m+n}) = \operatorname{Ann}(f^m) \Rightarrow (f^{m+n}) \cong {}^{R}\!/\!_{\operatorname{Ann}(f^n)}$

Sei $\psi : R \to I$, $1 \mapsto f^m b$ R-linear $\Rightarrow \operatorname{Ann}(f^m) \subseteq \operatorname{Kern}(\psi) \Rightarrow \psi$ induziert $\overline{\psi} : (f^{m+n}) \to I \xRightarrow{I\text{ inj.}} \exists$ Fortsetzung $\tilde{\psi} : R \to I$ von $\overline{\psi}$.

Setze $a := \tilde{\psi}(1) \Rightarrow f^m b = \psi(1) = \overline{\psi}(f^{m+n}) = \tilde{\psi}(f^{m+n} \cdot 1_R) \underset{R\text{-lin.}}{\overset{\tilde{\psi}}{=}} f^{m+n} \cdot \tilde{\psi}(1) = f^{m+n} \cdot a$

□

§ 15 Kohomologie kohärenter Garben auf projektiven Schemata

Definition + Bemerkung 15.1
Sei $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ graduierter Ring und $X = \operatorname{Proj} S$. Sei weiter $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ ein graduierter S-Modul.

a) Sei $\tilde{M}$ die Garbe auf X die durch $\tilde{M}(D^+(f)) = M_f^{\text{hom}}$ für jedes homogene $f \in S$ gegeben ist.

b) Für jedes $x \in X$, also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ (homogenes Primideal) ist $\tilde{M}_x = M_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}}$.

c) Für jedes offene $U \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{M}(U) = \{s : U \to \dot{\bigcup_{x \in U}} \tilde{M}_x,\ \ & s(x) \in \tilde{M}, \text{für jedes } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es Umgebung} \\ & U(\mathfrak{p}) \subseteq U \text{ mit } s(\mathfrak{q}) = \tfrac{m}{f} \text{ für jedes } \mathfrak{q} \in U(\mathfrak{p}), \\ & \text{dabei ist } m \in M, f \in S \setminus \mathfrak{q} \text{ homogen vom gleichen Grad}\}\end{aligned}$$

d) $\tilde{M}$ ist quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. $\tilde{M}$ ist kohärent, falls S noethersch und M endlich erzeugt.

($S_f^{\text{hom}} = \{\frac{a}{f^n} : a \in S_{n \cdot d}\}$, $D^+(f) \cong \operatorname{Spec} S_f^{\text{hom}}$, f homogen vom Grad d, $M_f^{\text{hom}} = \{\frac{m}{f^n} : m \in M_{n \cdot d}\}$)

Beispiele
Sei $X = \operatorname{Proj} S$ wie in 15.1

a) $\tilde{S} = \mathcal{O}_X$

b) Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $S(n)$ der graduierte S-Modul mit $S(n)_d := S_{n+d}$.

$$\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)} \qquad \text{(Serre-Twist)}$$

c) $S = R[X_0, \dots, X_n]$, $X = \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}_R^n$
Dann ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = S(1)_0 = S_1$ der freie R-Modul mit Basis $X_0, \dots, X_n$.

d) Für $d < 0$ hat $\mathcal{O}_X(d)$ keine globalen Schnitte $\neq 0$. Für ≥ 0 ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$ der freie R-Modul, der von den homogenen Polynomen vom Grad d in $R[X_0, \dots, X_n]$ erzeugt wird.

Ziele:

1) Bestimme $H^i(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{O}(d))$ für alle $i \geq 0$ und alle d.

2) Jede hohärente Garbe auf $\mathbb{P}_R^n$ ist von der Form $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) \big/ \mathcal{G}$

Kulturbeitrag: $H^i(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{F}) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ für die Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_0, \dots, U_n\}$, $U_i = D(X_i)$ (affine Standardüberdeckung des $\mathbb{P}^n$)

$$\dots \to \bigoplus_{i=0}^{n} \underbrace{\mathcal{O}(d)(U_0 \cap \dots \cap U_{i-1} \cap U_{i+1} \cap \dots \cap U_n)}_{\text{freier } R\text{-Modul mit Basis } X_0^{d_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{d_n} : \sum_{j=0}^{n} d_j = d, d_i \geq 0} \overset{d^{n-1}}{\to} \underbrace{\mathcal{O}(d)(U_0 \cap \dots \cap U_n)}_{\substack{= \left\{ \frac{g}{(X_0, \dots, X_n)^k} \right\}, \begin{smallmatrix} g \text{ homogen} \\ \text{vom Grad} \\ d+k(n+1) \end{smallmatrix} \\ = \left\langle \frac{1}{X_0^{d_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{d_n}} : \sum_{i=0}^{n} d_i = -d_R \right\rangle \\ = \text{freier } R\text{-Modul mit Basis} \\ X_0^{d_0} \ldots X_n^{d_n} : \sum_{i=0}^{n} d_i = d, d_i \in \mathbb{Z}}} \to 0$$

Fazit: $X_0^{d_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{d_n}$ (mit $\sum\limits_{i=0}^{n} d_i = d$) liegt in Bild$(d^{n-1}) \Leftrightarrow \exists\, i$ mit $d_i \geq 0$

Bemerkung 15.2

a) Für $d \geq -n$ ist d^{n-1} surjektiv, also $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = 0$

b) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) \cong R$, erzeugt von $\frac{1}{X_0 \cdot \ldots \cdot X_n}$

Proposition 15.3

Sei R noetherscher Ring, $n \geq 1$, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} R[X_0, \ldots, X_R]$, $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$

a) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) = R\frac{1}{X_0 \cdot \ldots \cdot X_n} \cong R$

b) Für jedes $d \in \mathbb{Z}$ gibt es natürliche bilineare Abbildung

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d-n-1)) \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) \cong R$$

Diese ist nicht ausgeartete Paarung zwischen freien R-Moduln von endlichem Rang.

c) Für alle $i = 1, \ldots, n-1$ und alle $d \in \mathbb{Z}$ ist

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = 0$$

Beweis

b) $\underline{d < 0}$: $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = S_d$

$= 0$ für $d < 0$

$H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d-n-1)) = 0$ für $d < 0$ (15.2 a))

$\underline{d \geq 0}$: Für $d \geq 0$ ist die Paarung gegeben durch

$$\underbrace{(X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n}}_{\substack{\sum \nu_i = d \\ \nu_i \geq 0}}, \underbrace{X_0^{\mu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\mu_n})}_{\substack{\sum \mu_i = -d-n-1 \\ \mu_i < 0}} \mapsto \underbrace{X_0^{\nu_0+\mu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n+\mu_0}}_{\sum(\nu_i+\mu_i) = -n-1}$$

nicht ausgeartet: $\begin{array}{lcl} (X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n}, X_0^{-\nu_0-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-\nu_n-1}) & \mapsto & X_0^{-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-1} \\ (X_0^{-\mu_0-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-\mu_n-1}, X_0^{\mu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\mu_n}) & \mapsto & X_0^{-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-1} \end{array}$

c) Sei $1 \leq i \leq n-1$, $d \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$.

Behauptung: Dann ist die Multiplikation mit X_k ein Isomorphismus $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$.

Jedes $\alpha \in H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ wird repräsentiert von einem Tupel von Linearkombinationen von Monomen $X_{j_0}^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_{j_i}^{\nu_i}$ mit $\sum \nu_k = d$, $\nu_k < 0$ für alle k. Multipliziere mit $X_{j_i}^{-\nu_i}$. Das Bild von $X_{j_0}^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_{j_n}^{\nu_n}$ in $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-\nu_i))$ ist 0. Nach der Behauptung ist damit auch $\alpha = 0$.

Beweis der Behauptung: Œ $k = n$

$\cdot X_n$ induziert exakte Sequenz von graduierten S-Moduln ($S = R[X_0, \ldots, X_n]$)

$$0 \to S(d-1) \xrightarrow{\cdot X_n} S(d) \to \underbrace{S(d)/X_n \cdot S(d-1)}_{\substack{\cong S/X_n S(d) \\ \cong R[X_0, \ldots, X_n](d)}} \to 0$$

Daraus ergibt sich exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-Modulgarben:

$$(*) \quad 0 \to \mathcal{O}(d-1) \xrightarrow{\cdot X_n} \mathcal{O}(d) \to j_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d) \to 0 \qquad (j : \mathbb{P}^{n-1} = V(X_n) \hookrightarrow \mathbb{P}^n)$$

Es gilt: $H^i(\mathbb{P}^n, j_* \overbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)}^{=:\mathcal{F}}) \cong H(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d))$, *denn:* Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}^\bullet$ welke Auflösung $\Rightarrow 0 \to j_*\mathcal{F} \to j_*\mathcal{G}^\bullet$ ist welke Auflösung.

Induktion über n: $n = 0\checkmark$, $n = 1\checkmark$

$n \geq 2$: Lange exakte Kohomologiesequenz zu (*):

$$\ldots \to H^{i-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d)) \to \ldots$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)) = 0$ für $1 \leq i \leq n-2$. Nach der Behauptung folgt, dass $i = 2, \ldots, n-2$

$\underline{i=1}$: $0 \to \overset{=S_{d-1}}{H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1))} \to \overset{=S_d}{H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))} \to \overset{=S_d/X_n S_{d-1}}{H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))} \to 0$ ist exakt $\Rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ ist injektiv, $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ ist surjektiv für $n \geq 3$ nach Induktionsvoraussetzung. Für $n = 2$ ist $1 = n-1$.

$\underline{i = n-1}$: Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^{n-2}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d)) = 0$.

Zu zeigen also: $H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \to H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))$ ist die Nullabbildung. Äquivalent: $\delta : \underbrace{H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))}_{\substack{\text{erz. v. den Monomen} \\ X_0^{\nu_0} \cdots X_{n-1}^{\nu_{n-1}} \\ \text{mit } \sum \nu_i = d, \text{ alle } \nu_i < 0}} \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1))$ ist injektiv.

Das Bild von δ ist der Kern von $\cdot X_n$, also der freie R-Modul mit Basis $X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_{n-1}^{\nu_{n-1}} \cdot X_n^{-1}$ mit $\sum_{i=0}^{n-1} \nu_i = d$, alle $\nu_i < 0 \Rightarrow \text{Rang}(\text{Bild}\,\delta) = \text{Rang}(H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))) \Rightarrow \delta$ injektiv. Übung: $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = 0$ für alle $d \in \mathbb{Z}$ □

Satz 5
Sei X projektives R-Schema über einem noetherschen Ring R. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F})$ endlich erzeugter R-Modul für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X.

Beweis
$\tilde{U} \subseteq \mathbb{P}^n_R$ offen, $U = \tilde{U} \cap X \Rightarrow j_*\mathcal{F}(\tilde{U}) = \mathcal{F}(U)$, $\mathcal{F}|_U = \tilde{M} \Rightarrow j_*\mathcal{F}|_{\tilde{U}} = \tilde{M}_U)$

Sei $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R$ abgeschlossene Einbettung, $X = \text{Proj}(R[X_0, \ldots, X_n]/I)$. Dann ist $j_*\mathcal{F}$ kohärent und $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\mathbb{P}^n_R, j_*\mathcal{F})$. Also ohne Einschränkung $X = \mathbb{P}^n_R$.

Behauptung: Jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^n_R$ ist isomorph zu $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(d_i)/\mathcal{G}$ für geeignete $r \geq 1$, $d_i \in \mathbb{Z}, \mathcal{G}$

Dann sei $0 \to \mathcal{G} \to \bigoplus_j \mathcal{O}(d_j) \to \mathcal{F} \to 0$ exakt $\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \bigoplus \mathcal{O}(d_j)) \cong \bigoplus_j H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d_j))$ (!)

$\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \bigoplus \mathcal{O}(d_j))$ endlich erzeugte R-Moduln

$\xRightarrow{\text{lange ex. Sequenz}} \ldots \to \underbrace{\bigoplus_j H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d_j))}_{\text{endlich erzeugt}} \xrightarrow{d^i} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}) \to \ldots$

Absteigende Induktion über i:

$$H^{n+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}) = 0 \text{ weil } n+1 > m$$

$\Rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ endlich erzeugt, weil d^n surjektiv

$\Rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ endlich erzeugt, weil $\mathcal{G}$ auch kohärent

$\Rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ endlich erzeugt, weil $\text{Kern}(\delta^{n-1}) = \text{Bild}(d^{n-1})$ endlich erzeugt und $\text{Bild}(\delta^{n-1})$ als Untermodul von $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ endlich erzeugt

Die Behauptung folgt aus: □

Proposition 15.4
Sei $\mathcal{F}$ kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n_R$. Dann gibt es ein $d_0 \in \mathbb{Z}$, sodass für $d \geq d_0$ $\mathcal{F}(d) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(d)$ von globalen Schnitten erzeugt wird, das heißt es gibt $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(d))$, sodass für jedes offene $U \subseteq \mathbb{P}^n_R$ gilt: $\mathcal{F}(d)(U)$ wird erzeugt von $s_1|_U, \dots, s_r|_U$ (als $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$-Modul!)

Definiere Garbenmorphisus $\epsilon : \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \to & \mathcal{F}(d) \\ e_i & \mapsto & s_i \end{cases}$

ϵ ist surjektiv $\Rightarrow e_{-d} : \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(-d) \to \mathcal{F}$ surjektiv

Beweis
Sei $U_i = D(X_i)$, $M_i := \mathcal{F}(U_i)$. M_i ist endlich erzeugter $R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$-Modul. $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$. Seien $s_{i_1}, \dots, s_{i_r}$ Erzeuger von M_i als $R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$-Modul.

Auf $U_i \cap U_j$ ist $s_{i_\nu}|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = (M_j)_{\frac{X_i}{X_j}} \Rightarrow$ Es gibt d_{i_ν} mit $s_{i_\nu} \cdot X_i^{d_{i_\nu}} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \tilde{M}_j \otimes \mathcal{O}(d_{i_\nu}))$ für alle j. Sei $d := \max\{d_{i_\nu} : i, \nu\} \Rightarrow s_{i_\nu} \cdot X_i^d \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(d))$ für alle $i, \nu \Rightarrow$ die t_{i_ν} erzeugen $\mathcal{F}(d)$. $\square$

Satz (Grothendieck)
Sei X ein n-dimensionales noethersches Schema, $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > n$.

Anhang A

Übungen

Übung 0 vom 24. April 2012

Aufgabe 1
Sei X ein topologischer Raum, A eine abelsche Gruppe und $x \in X$.

Die ***Wolkenkratzergarbe*** auf X ist definiert durch $\mathcal{W}(U) := \begin{cases} A & , x \in U \\ \{0\} & , x \notin U \end{cases}$ für $U \subseteq X$ offen, mit Restriktionsabbildungen

$$\rho_V^U = \begin{cases} \{0\} \ni \; 0 \mapsto 0 \; \in \{0\} & , x \notin V,\, x \notin U \\ A \ni \; a \mapsto 0 \; \in \{0\} & , x \notin V,\, x \in U \\ \mathrm{id}_A & , x \in V,\, x \in U \end{cases}$$

für $V \subseteq U \subseteq X$ offen.

a) Zeige, dass $\mathcal{W}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X ist.

b) Berechne die Halme der Garbe.

Aufgabe 2
Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X. Ist $x \in X$ ein Punkt, so bezeichne $\mathcal{F}_x$ den Halm von $\mathcal{F}$ in x. Nun definiert man die Menge

$$\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) := \dot{\bigcup_{x \in X}} \mathcal{F}_x.$$

Definiere weiter eine Projektionsabbildung $\pi\colon \mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) \to X$ durch $\mathcal{F}_x \ni s \mapsto x$.
Für jede offene Menge $U \subseteq X$ und für jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ erhält man eine Abbildung $\overline{s}\colon U \to \mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ durch $x \mapsto s_x$, wobei s_x der Keim von s in x sei. Alle diese Abbildungen sind Schnitte von π über U, d. h. für jedes dieser $\overline{s}$ gilt: $\pi \circ \overline{s} = \mathrm{id}_U$. Nun macht man $\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ zu einem topologischen Raum, indem man ihm die feinste Topologie gibt, so dass alle diese $\overline{s}$ für alle s und alle U stetig werden. Versehen mit dieser Topologie heißt $\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ der *Espace Etalé* zur Prägarbe $\mathcal{F}$.

Sei nun $\mathcal{F}^+$ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe. Zeige:
Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist $\mathcal{F}^+(U)$ die Menge aller **stetigen** Schnitte von π über U. Insbesondere ist $\mathcal{F}$ genau dann eine Garbe, wenn für jedes offene $U \subseteq X$ die Menge aller stetigen Schnitte von π über U gerade $\mathcal{F}(U)$ ist.

Lösung 1
a) Sei U offen, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, s_i konsistente Familie.

Fall 1: $x \in U \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \Rightarrow \mathcal{W}(U_i) = A \Rightarrow \mathcal{W}(U) = A$

Behauptung: $s = s_i$ ist Amalgam

$\rho^U_{U_i} = \mathrm{id}_A \rightsquigarrow s = s_i$ ist einziger Kandidat

Für $j \in I$

- mit $x \in U_j$:

$$s_j = \mathrm{id}_A(s_j) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_i}(s_j) = \mathrm{id}_A(s_i) = s_i = s = \rho^U_{U_j}(s)$$

- mit $x \notin U_j$:

$$s_j = 0, \rho^U_{U_0}(s) = 0$$

Fall 2: $x \notin U \Rightarrow x \notin U_j \forall\, j \in I$

$\Rightarrow \mathcal{W}(U) = \mathcal{W}(U_j) = \{0\}$

b) Sei $y \in X$. Bestimme den Halm von $\mathcal{W}$ in y.

$\mathcal{W}_y = \{[(U,s)]_y | s \in \mathcal{W}(U)\}$ mit $[(U,s)]_y = [(U',s')]_y \Leftrightarrow \exists U'' \subseteq U \cap U', y \in U'' : s|_{U''} = s'|_{U''}$

Fall 1: $\exists U \subseteq X$ offen, $y \in U, x \notin U$

$\Rightarrow [U', s] = [U, 0]$ für alle $U' \subseteq X$ offen, $s \in \mathcal{W}(U')$

$\Rightarrow \mathcal{W}_y = \{0\}$

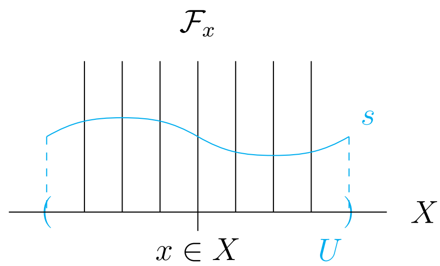
Fall 2: $\forall$ offenen Umgebungen U von $y : x \in U$

$\Rightarrow \mathcal{W}_y \cong A$, *denn:* Sei U offene Umgebung von y

$$\varphi : \begin{cases} A & \to & \mathcal{W}_y \\ a & \mapsto & [U,a] \end{cases}$$

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{W}_y & \to & A \\ [U,a] & \mapsto & a \end{cases}$$

$[U,a]_y = [U,b]_y \Leftrightarrow a = a|_{U''} = b|_{U''} = b$



Lösung 2

$s \in \mathcal{F}(U), x \in U \rightsquigarrow [U,s]_x \in \mathcal{F}_x$

$\bar{s} : \begin{cases} U & \to & \mathrm{Spé}(\mathcal{F}) \\ x & \mapsto & [U,s]_x \in \mathcal{F}_x \end{cases}, \pi \circ \bar{s} = \mathrm{id}_U$

$\mathcal{F}^+$ assoziiert Garbe zu $\mathcal{F}$, also für $U \subseteq X$ offen:

$$\mathcal{F}^+(U) := \{s : U \to \dot{\bigcup_{x \in U}} \mathcal{F}_x \mid \forall\, x \in X : s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ und } \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x, \exists f \in \mathcal{F}(U_x), s(y) = f_y := [(U_x, f)]_y\}$$

Zu zeigen: $\mathcal{F}^+(U) = \{$stetige Schnitte von π über $U\}$

„$\subseteq$“: Sei $s \in \mathcal{F}^+(U)$

$\pi \circ s = \mathrm{id} \Rightarrow s$ Schnitt

Noch zu zeigen: s ist stetig

Nach Definition von $\mathcal{F}^+$ gibt es Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s|_{U_i} = \bar{s}_i$. Die $\bar{s}_i : U_i \to \text{Spé}(\mathcal{F})$ sind stetig. Sei $\widetilde{U} \subseteq \text{Spé}(\mathcal{F})$ offen.
$\bar{s}_i^{-1}(\widetilde{U}) = s^{-1}(\widetilde{U}) \cap U_i$ offen
$s^{-1}(\widetilde{U}) = \bigcup\limits_{i \in I} (s^{-1}(\widetilde{U}) \cap U_i)$ ist offen

„$\supseteq$“: Sei $s : U \to \text{Spé}(\mathcal{F})$ stetiger Schnitt von π über U, das heißt $\forall\, x \in X : s(x) \in \mathcal{F}_x$.
Noch zu zeigen: $\forall\, x \in X \exists U_x \in \text{Off}(X)$ mit $x \in U_x$ und ein $f \in \mathcal{F}(U_x)$ sodass $\forall\, y \in U$ gilt $s(y) = f_y$
Sei $x \in X$, $s(x) = [U', s']_x \in \mathcal{F}_x$, $s' \in \mathcal{F}(U')$
$\widetilde{U} := \{[U', s']_y \in \mathcal{F}_y | y \in U'\}$ ist offen in Spé$(\mathcal{F})$ und enthält $s(x)$.

$$[U', s']_y = [U'', s'']_y$$

$\Rightarrow \exists U''' \subseteq U' \cap U'' : s'|_{U'''} = s''|_{U'''}$
$s''^{-1}(\widetilde{U} \cap s'(U''')) = s'^{-1}(\widetilde{U} \cap s'(U'''))$ offen
Setze $U_x := s^{-1}(\widetilde{U})$
s stetig $\Rightarrow U_x$ offen, $x \in U_x$
Außerdem: $\forall\, y \in U_x : \bar{s'}(y) = \underbrace{[U', s']_y}_{=[U_x, s'|_{U_x}]_y} \overset{\pi \circ s = \text{id}}{=\!=\!=} s(y)$
$\Rightarrow s'|_{U_x} \in \mathcal{F}(U_x)$ erfüllt Garbeneigenschaft.

zur Lösung:

In der Übung wollte ich zeigen, dass für offenes $U' \subseteq X$ mit $x \in U'$ und $s' \in \mathcal{F}(U')$ die Menge $\tilde{U} := \{[U', s']_y \in \mathcal{F}_y \mid y \in U'\}$ offen ist bezüglich der oben definierten Topologie auf Spé$(\mathcal{F})$.

Auf einmal scheint das Argument auf meinem Zettel wieder zu stimmen (war nur etwas knapp formuliert), deshalb schreibe ich es hier nochmal ausführlicher auf.

Zu zeigen ist ja, dass für jedes offene $U'' \subseteq X$ und jedes $s'' \in \mathcal{F}(U'')$ die Menge $\left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$ offen in X ist. Sei also $U'' \in \text{Off}(X)$ und $s'' \in \mathcal{F}(U'')$.

Ist $\left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right) = \emptyset$, so ist nichts weiter zu zeigen, da $\emptyset$ ja offen ist. Ist andernfalls $y \in \left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$, so ist $\overline{s''}(y) \in \tilde{U}$ und wegen $\overline{s''}(y) \in \mathcal{F}_y$ folgt $[U'', s'']_y = [U', s']_y$ ($\tilde{U}$ enthält ja pro Halm höchstens ein Element). Folglich existiert ein offenes $U''' \subseteq U' \cap U''$ mit $y \in U'''$ und $s'|_{U'''} = s''|_{U'''}$. Somit ist $U''' \subseteq \left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$ eine offene Umgebung von y und $\left(\overline{s''}\right)^{-1}\left(\tilde{U}\right)$ offen.

Übung 1 vom 1. Mai 2012

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $X := \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie versehen (d. h. jede Teilmenge ist offen). Bestimme alle Garben $\mathcal{F}$ von Mengen auf X.

b) Bestimme die Halme $\mathcal{F}_x$ der Garben $\mathcal{F}$ aus Teil a) in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ die Prägarbe der konstanten Funktionen auf X. Genauer sei für $U \subseteq X$ offen $\mathcal{F}(U) := \{ f : U \to \mathbb{Z} \mid f \text{ ist konstant} \}$ und für $V \subseteq U \subseteq X$ offen $\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V), f \mapsto f|_V$.

a) Zeige, dass $\mathcal{F}$ im allgemeinen keine Garbe ist.

b) Berechne die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe $\mathcal{F}^+$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis[1] der Topologie von X. Weiter sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir definieren eine $\mathcal{B}$-Garbe auf X als kontravarianten Funktor $\mathcal{F}'$ von $(\mathcal{B}, \subseteq)$ nach $\mathcal{C}$, der die $\mathcal{B}$-Garbeneigenschaft erfüllt:

Sind $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U, U_i \in \mathcal{B}$ und $(s_i)_{i \in I}$ mit $s_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ gegeben, so dass $\rho^{U_i}_V(s_i) = \rho^{U_j}_V(s_j)$ für alle $V \subseteq U_i \cap U_j, V \in \mathcal{B}$ gilt, dann existiert genau ein $s \in \mathcal{F}'(U)$ mit $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$ für alle $i \in I$.

Sei zunächst $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen.

a) Zeige, dass sich $\mathcal{F}'$ eindeutig zu einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X fortsetzen lässt.
Hinweis: Inverser Limes

b) Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X und für $U \in \mathcal{B}$ Abbildungen $\tilde{\varphi}(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ gegeben, die mit den Restriktionsabbildungen $\rho^U_{U'}$ kommutieren.

Zeige, dass es einen eindeutigen Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gibt mit $\varphi(U) = \tilde{\varphi}(U)$ für alle $U \in \mathcal{B}$.

c) Mache dir klar, dass a) und b) auch in der Kategorie der (abelschen) Gruppen, der Ringe und der R-Moduln gelten.

Lösung 1

a) Die offenen Mengen von X sind $\mathrm{Off}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Eine Garbe von Mengen auf X ordnet jedem Element aus $\mathrm{Off}(X)$ eine Menge zu, also

$$\emptyset \to M_\emptyset, \quad \{0\} \to M_0, \quad \{1\} \to M_1, \quad X \to M_X.$$

Zusätzlich brauchen wir noch Restriktionsabbildungen

$$M_0 \to M_\emptyset, \quad M_1 \to M_\emptyset, \quad M_X \to M_\emptyset, \quad M_X \to M_0, \quad M_X \to M_1,$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M_X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & M_0 \arrow[d] \\ M_1 \arrow[r] & M_\emptyset \end{tikzcd}$$

[1] d. h. alle offenen $U \subseteq X$ lassen sich als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $M_\emptyset$ einelementig sein muss. Dann kommutiert das obige Diagramm automatisch.

Da die offenen Mengen $\{0\}$ und $\{1\}$ die offene Menge $\{0,1\}$ überdecken, besagt die Garbeneigenschaft, dass es zu jedem $a \in M_0$ und jedem $b \in M_1$ ein eindeutig bestimmtes $c \in M_X$ geben muss mit $\rho^X_{\{0\}}(c) = a$ und $\rho^X_{\{1\}}(c) = b$. Das bedeutet, dass $M_X \cong M_0 \times M_1$ ist. Damit haben wir alle Garben von Mengen auf X charakterisiert.

b) Der Halm der Garbe $\mathcal{F}$ in x ist definiert als

$$\mathcal{F}_x \coloneqq \{\, (U,f) \mid U \in \mathrm{Off}(X), x \in U, s \in \mathcal{F}(U) \,\}/\sim,$$

wobei zwei Paare (U,s) und (U',s') äquivalent sein sollen, wenn es ein $U'' \subseteq U \cap U'$ gibt mit $\rho^U_{U''}(s) = \rho^{U'}_{U''}(s')$.

Zwei Punkte $(X,(a,b))$ und $(X,(a',b'))$ beschreiben genau dann den gleichen Punkt in $\mathcal{F}_0$, wenn $a = \rho^X_{\{0\}}((a,b)) = \rho^X_{\{0\}}((a',b')) = a'$. Also ist $\mathcal{F}_0 \cong M_0$. Ebenso ist $\mathcal{F}_1 \cong M_1$.

Lösung 2

a) Falls es in X offene Mengen U und U' gibt mit $U \cap U' = \emptyset$, dann ist $\mathcal{F}$ keine Garbe:

Seien $f_1 \in \mathcal{F}(U)$ mit $f_1 \equiv 1$ und $f_2 \in \mathcal{F}(U')$ mit $f_2 \equiv 2$. Da $U \cap U' = \emptyset$, ist $f_1|_{U\cap U'} = f_2|_{U\cap U'}$ und $(f_i)_{i\in\{1,2\}}$ ist eine konsistente Familie für die offene Überdeckung $U \cup U'$. Da aber für $f \in \mathcal{F}(U \cup U')$ nicht gleichzeitig $f|_U \equiv 1$ und $f|_{U'} \equiv 2$ gelten kann, gibt es zu der konsistenten Familie kein Amalgam.

b) Zunächst berechnen wir die Halme von $\mathcal{F}$:

$$[(U,f)]_x = [(U',f')]_x \Leftrightarrow \exists U'' \subseteq U \cap U' \text{ mit } x \in U'' : f|_{U''} = f'|_{U''} \Leftrightarrow f(x) = f'(x)$$

Die Halme sind also über $[(U,f)]_x \mapsto f(x)$ alle isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(U) \coloneqq \{\, s\colon U \to \dot{\bigcup_{x\in U}} \mathcal{F}_x \mid\ & \forall\, x \in U : s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ und } \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x,\\ & \exists f \in \mathcal{F}(U_x)\,\forall\, y \in U_x : s(y) = [(U_x,f)]_y \eqqcolon f_y \,\}\,.\end{aligned}$$

Benutzen wir die Isomorphismen $\mathcal{F}_x \ni [(U,f)]_x \mapsto f(x) \in \mathbb{Z}$ der Halme mit $\mathbb{Z}$, sowie die Tatsache, dass $f \in \mathcal{F}(U_x)$ konstant ist, so besagt die letzte Bedingung an s:

$$\forall\, x \in U\ \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x : \forall\, y \in U_x : s(y) = s(x)\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(U) &= \{\ s\colon U \to \mathbb{Z} \mid \forall\, x \in U\, \exists U_x \in \mathrm{Off}(X), x \in U_x : s|_{U_x} \text{ ist konstant}\,\}\\ &= \{\ s\colon U \to \mathbb{Z} \mid s \text{ ist lokal konstant}\,\}\,.\end{aligned}$$

Lösung 3

a) Wir nutzen den Hinweis und definieren $\mathcal{F}$ mit Hilfe des inversen Limes. Für $U \in \mathrm{Off}(X)$ setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U) &\coloneqq \varprojlim_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mathcal{F}'(V)\\ &= \{\, (s_V)_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \in \textstyle\prod_{V\subseteq U, V\in\mathcal{B}} \mathcal{F}'(V) \mid \forall\, W \subseteq V \subseteq U, V, W \in \mathcal{B} : \rho^V_W(s_V) = s_W \,\}\end{aligned}$$

und für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen sei

$$\rho^U_{U'} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U'), (s_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} \mapsto (s_V)_{V \subseteq U', V \in \mathcal{B}} \,.$$

Die Abbildung $\rho^U_{U'}$ bildet die Familie $(s_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}}$ auf die Teilfamilie über den $V \subseteq U'$ ab, also gilt $\rho^U_U = \mathrm{id}_U$ und $\rho^{U'}_{U''} \circ \rho^U_{U'} = \rho^U_{U''}$ und wir haben eine Prägarbe von Mengen definiert.

Die Prägarbe $\mathcal{F}$ stimmt auf den Mengen $V \in \mathcal{B}$ mit $\mathcal{F}'$ überein:

Die Abbildung

$$\psi(V) \colon \mathcal{F}'(V) \to \mathcal{F}(V), s \mapsto (s|_{V'})_{V' \subseteq V, V' \in \mathcal{B}}$$

ist wohldefiniert, da eine $\mathcal{B}$-Garbe insbesondere ein kontravarianter Funktor von $(\mathcal{B}, \subseteq)$ nach $\mathcal{C}$ ist. Außerdem liefert uns die $\mathcal{B}$-Garbeneigenschaft eine wohldefinierte Umkehrabbildung

$$\psi^{-1}(V) \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}'(V), (s_{V'})_{V' \subseteq V, V' \in \mathcal{B}} \mapsto s_V \,.$$

Sowohl ψ als auch ψ^{-1} kommutieren mit den Restriktionsabbildungen.

Weiter ist $\mathcal{F}$ sogar eine Garbe von Mengen auf X:

Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung, $s_i = (s_{i,V})_{V \subseteq U_i, V \in \mathcal{B}} \in \mathcal{F}(U_i)$ und $(s_i)_{i \in I}$ eine konsistente Familie. Ist $s \coloneqq (s_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}}$ ein Amalgam zu der konsistenten Familie $(s_i)_{i \in I}$, so muss für alle $V \subseteq U_i$, $V \in \mathcal{B}$ wegen $\rho^{U_i}_V(s) = s_i$ die Gleichheit $s_V = s_{i,V}$ gelten. Da die Familie konsistent ist, gilt $(s_{i,V})_{V \subseteq U_i \cap U_j, V \in \mathcal{B}} = \rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j) = (s_{j,V})_{V \subseteq U_i \cap U_j, V \in \mathcal{B}}$ und s_V ist auch für $V \in U_i \cap U_j$ wohldefiniert.

Sei nun $V \subseteq U, V \in \mathcal{B}$ beliebig. Dann sind die $(s_{V'})_{V' \subseteq V \cap U_i, V' \in \mathcal{B}}$ bereits alle definiert und stimmen auf den Schnitten $U_i \cap U_j$ überein. Da $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie ist, ist $V = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{V' \subseteq V \cap U_i, V' \in \mathcal{B}} V'$ und nach der $\mathcal{B}$-Garbeneigenschaft gibt es dann genau ein $s_V \in \mathcal{F}'(V) \cong \mathcal{F}(V)$ mit $\rho^V_{V'}(s_V) = s_{V'}$ für alle $i \in I$, $V' \subseteq V \cap U_i$, $V' \in \mathcal{B}$. Folglich existiert das Amalgam s und da wir bei der Konstruktion keine Wahl zu treffen hatten, ist es auch eindeutig.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ bis auf Isomorphie eindeutig ist. Dafür verwenden wir den Aufgabenteil b):

Sei also $\mathcal{G}$ eine weitere Garbe von Mengen auf X, mit $\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}'(V) = \mathcal{F}(V)$ für alle $V \in \mathcal{B}$. Auf den Basismengen V der Topologie sind also $\mathrm{id}(V) \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$ und $\mathrm{id}(V) \colon \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(V)$ wohldefinierte Abbildungen, die mit den Restriktionen kommutieren. Nach b) existieren dann genau ein Garbenmorphismus $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und ein Garbenmorphismus $\varphi' \colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, der id fortsetzt.

Weiterhin ist $\varphi' \circ \varphi(V) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(V)}$ und, wiederum nach b), gibt es genau einen Garbenmorphismus von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}$, der diese fortsetzt. Da sowohl der Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$, als auch $\varphi' \circ \varphi$ solche eine Fortsetzung sind, gilt $\varphi' \circ \varphi \cong \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Genauso zeigt man $\varphi \circ \varphi' \cong \mathrm{id}_G$ und hat damit bewiesen, dass $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$ ist.

b) Seien also $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Garben und für alle $V \in \mathcal{B}$ eine Abbildung $\varphi(V) \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$ gegeben, so dass die $\varphi(V)$ mit den Restriktionsabbildungen kommutieren. Sei nun $U \in \mathrm{Off}(X)$ beliebig. Da $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie auf X ist, gilt $U = \bigcup_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} V$. Damit ist $\varphi(U)$ bereits eindeutig bestimmt:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Sei $f \in \mathcal{F}(U)$. Für alle $V \subseteq U, V \in \mathcal{B}$ sind die Schnitte $\rho_V^U(\varphi(U)(f)) = \varphi(V)(\rho_V^U(f)) \in \mathcal{G}(V)$ festgelegt und bilden eine konsistente Familie in $\mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ eine Garbe ist, ist $\varphi(U)(f) \in \mathcal{G}(U)$ damit eindeutig bestimmt.

Ist $U' \subseteq U \subseteq X$ offen, dann ist jedes $V \subseteq U', V \in \mathcal{B}$ auch in U enthalten. Es gilt $\rho_V^{U'}(\rho_{U'}^U(\varphi(U)(f))) = \rho_V^U(\varphi(U)(f)) = \varphi(V)(\rho_V^U(f))$, also ist $\rho_{U'}^U(\varphi(U)(f))$ ein Amalgam für die $\varphi(V)(\rho_V^U(f))$ und es gilt $\rho_{U'}^U(\varphi(U)(f)) = \varphi(U')(\rho_{U'}^U(f))$.

c) Hier muss man sich klar machen, dass $\mathcal{F}(U)$ eine (abelsche) Gruppe/ein Ring/ein R-Modul ist, falls die $\mathcal{F}'(V)$ es sind und dass die Restriktionsabbildungen in der entsprechenden Kategorie liegen. Auch in b) muss gezeigt werden, dass die $\varphi(U)$ Morphismen aus der richtigen Kategorie sind.

Anmerkung: Natürlich hätte man bei dieser Aufgabe alles noch ein wenig kategorieller formulieren können und vor allem die UAE des inversen Limes mit ins Spiel bringen.

Übung 2 vom 7. Mai 2012

Auf diesem Blatt bezeichne R immer einen kommutativen Ring mit Eins und k einen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweise die Proposition 1.14 aus der Vorlesung: Sei $f\colon X \to Y$ stetig, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Dann ist f^{-1} linksadjungiert zu f_* in der Kategorie der Garben, d. h. es gibt eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeige das folgende Lemma von Krull:

a) Sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $I \subseteq R$ ein Ideal, das disjunkt zu S ist. Dann gibt es ein Primideal $\wp \subseteq R$, das I enthält und ebenfalls zu S disjunkt ist.

b) Es gilt:

$$\bigcap_{\substack{\wp \text{ Primideal in } R \\ I \subseteq \wp}} \wp = \sqrt{I}\,.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Zeige:

a) Jede **abgeschlossene, nicht leere,** irreduzible Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ hat genau einen generischen Punkt.

b) Die irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec} R$ entsprechen bijektiv den minimalen Primidealen in R.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Bestimme $\operatorname{Spec} R$ für folgende Ringe R:

a) $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $R = k[X]/(X^2)$.

c) $R = k[X]_{(X)} = k[X]_S$ mit $S = k[X] \setminus (X)$.

d) $R = \mathbb{C}[A]$, die von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ im Matrizenring $\mathbb{C}^{n\times n}$ erzeugte $\mathbb{C}$-Unteralgebra.
Hinweis: Hier kann die Lineare Algebra helfen.

Direkter Limes:

$(I, \leq)$ gerichtet $:\Leftrightarrow$ teilgeordnet und jede endliche Teilmenge hat obere Schranke

Gerichtetes System in Kategorie $\mathcal{K}$ zu $(I, \leq)$ ist kovarianter Funktor von $(I, \leq)$ nach $\mathcal{K}$. Der direkte Limes (falls er existiert) zu diesem gerichteten System ist ein $\varinjlim A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ zusammen mit $\psi_j : A_j \to \varinjlim A_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A_j, \varinjlim A_i)$, sodass:

$$j \leq k \qquad \begin{tikzcd} A_j \arrow[rr, "\rho^j_k"] \arrow[dr, "\psi_j"'] \arrow[ddr, bend right=60, "h_j"'] & & A_k \arrow[dl, "\psi_k"] \arrow[ddl, bend left=60, "h_k"] \\ & \varinjlim A_i \arrow[d, "\exists!"] & \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_j \arrow[rr, "\rho^j_k"] \arrow[dr, "h_j"'] & & A_k \arrow[dl, "h_k"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$\forall\ B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ zusammen mit $h_j : A_j \to B$ mit Diagramme kommutieren (siehe oben)
$\Rightarrow \exists! f : \varinjlim A_i \to B : f \circ \psi_k = h_k \forall\ k \in I$

Lösung 1
X, Y Räume , $f : X \to Y$ stetig, $\mathcal{F}$ Garbe auf X, $\mathcal{G}$ Garbe auf Y (von abelschen Gruppen)
Erinnerung:

- direkte Bildgarbe: $\forall\ V \subseteq Y : f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$
- Urbildgarbe: $\forall\ U \subseteq X : f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V \in \mathrm{Off}(Y)} \mathcal{G}(V)$

Zu zeigen: f^{-1} adjungiert zu f_*, das heißt es gibt eine in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ natürliche Bijektion $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$
Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$
$\Rightarrow f_*\alpha : f_*f^{-1}\mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ durch $(f_*\alpha)(V) = \alpha(f^{-1}(V)) \rightsquigarrow$ es fehlt noch: $\mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G}$
Sei $V \in \mathrm{Off}(Y)$:

$$f_*f^{-1}\mathcal{G}(V) = f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{f(f^{-1}(V))\subseteq W \in \mathrm{Off}(Y)} \mathcal{G}(W)$$

da $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$
Zum direkten Limes gehört $\psi(V) : \mathcal{G}(V) \to \varinjlim_{f(f^{-1}(V))\subseteq W \in \mathrm{Off}(Y)} \mathcal{G}(W)$.
Sei $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \Rightarrow f^{-1}\beta : f^{-1}\mathcal{G} \to f^{-1}f_*\mathcal{F}$. Sei $U \in \mathrm{Off}(X)$:

$$f^1 f_*\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V \in \mathrm{Off}(Y)} f_*\mathcal{F}(V) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V \in \mathrm{Off}(Y)} \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

$f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V \in \mathrm{Off}(Y)} \mathcal{G}(V)$
Seien $V', V'' \in \mathrm{Off}(Y)$, $f(U) \subseteq V' \subseteq V''$, $\exists! f^{-1}\beta$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(V'') \arrow[r, "\rho^{V''}_{V'}"] \arrow[d, "\beta(V'')"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & \mathcal{G}(V') \arrow[d, "\beta(V')"] \\
f_*\mathcal{F}(V'') \arrow[r, "\rho^{V''}_{V'}"] \arrow[dr, "\widetilde{\psi}(V'')"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "///"] & f_*\mathcal{F}(V') \arrow[d, "\widetilde{\psi}(V'')"] \\
& \varinjlim_{f(U)\subseteq V} f_*\mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(V') \arrow[rr, "\psi_{f^{-1}\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\widetilde{\psi}(V')\circ\beta(V')"'] & & f^{-1}\mathcal{G}(U) \arrow[dl, "f^{-1}\beta"] \\
& f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) &
\end{tikzcd}$$

Es fehlt noch: $\varphi_{\mathcal{F}} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$
Seien V', V'' wie eben. Dann: $U \subseteq f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(V'')$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(f^{-1}(V'')) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "///"] & & \mathcal{F}(f^{-1}(V')) \arrow[dl, "\rho"] \\
& \mathcal{F}(U) &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \exists! \varphi_{\mathcal{F}}(U) : f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) : \varphi_{\mathcal{F}} \circ \tilde{\psi} = \rho$
Definiere:

$$\begin{array}{llcccl} T_1 : & \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \ni & \alpha & \mapsto & f_*\alpha \circ \psi_{\mathcal{G}} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ T_2 : & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) & \ni & \beta & \mapsto & \varphi_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}\beta \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \end{array}$$

Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$, $U \in \mathrm{Off}(X)$. Sei dazu $V \in \mathrm{Off}(Y)$ mit $f(U) \subseteq V$, also $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) = f_*f^{-1}\mathcal{G}(V) \arrow[d, "\alpha(f^{-1}(V)) = f_*\alpha(V)"'] \arrow[rrr, bend left, "\rho_U^{f^{-1}}(V)"] \arrow[rr, phantom, "///"] & & \mathcal{G}(V) \arrow[ll, "\psi_{\mathcal{G}}(V)"'] \arrow[r, "\psi_{f^{-1}\mathcal{G}}(V)"] \arrow[lld, dashed] \arrow[d, phantom, "///"] & f^{-1}\mathcal{G}(U) \arrow[ld, dashed, "f^{-1}(f_*\alpha \circ \psi_{\mathcal{G}})(U)"] \arrow[lldd, bend left, "\hat{\alpha}(U)"] \arrow[ldd, phantom, "///"] \\
\mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{F}(V) \arrow[rr, "\tilde{\psi}(V)"'] \arrow[rd, bend right, "\rho_U^{f^{-1}(V)}"'] \arrow[r, phantom, "///", near start] & & f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) \arrow[ld, "\varphi_{\mathcal{F}}(U)"] & \\
& \mathcal{F}(U) & &
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen: $\hat{\alpha} = \alpha$

Lösung 2

a) Betrachte den kanonischen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to R_S$. Sei $I' = (\varphi(I))$ das von $\varphi(I)$ erzeugte Ideal in R_S, also $I' = \{\frac{f}{a} \in R_S \mid f \in I,\ a \in S\}$.

Zunächst überlegen wir uns, dass $I' \neq R_S$, also $1 \notin I'$. Denn wäre $1 \in I'$, dann gäbe es ein $f \in I$ und ein $a \in S$ mit $1 = \frac{f}{a}$ in R_S, d.h. es gäbe ein

$$s \in S \text{ mit } s(f - a) = 0.$$

Dann wäre $sf = sa$ sowohl in I als auch in S – ein Widerspruch zur Disjunktheit!

Somit ist I' ein echtes Ideal und damit in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}'$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$ ein Primideal, enthält I und hat leeren Schnitt mit S, denn sonst wäre für $s \in S \cap \mathfrak{p}$ das Bild $\varphi(s) \in \mathfrak{m}'$ eine Einheit in R_S.

b) „$\supseteq$“: Ist $f \in \sqrt{I}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in I$. Folglich gilt für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$, dass $f^n \in \mathfrak{p}$, also auch $f \in \mathfrak{p}$.

„$\subseteq$“: Sei $a \in R \setminus \sqrt{I}$ und $S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist S ein multiplikatives System und $I \cap S = \emptyset$. Nach a) gibt es dann ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq I$ und $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Damit liegt a nicht im Schnitt über alle Primideale, die I enthalten.

Lösung 3

R kommutativer Ring mit Eins.

a) $V \neq \emptyset$, abgeschlossen, irreduzibel, $V \subseteq \mathrm{Spec}\, R$

$\Rightarrow \underbrace{V = V(I)}_{\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}}$, I Primideal

$\Rightarrow \overline{\{I\}} = V(I(\{I\})) = V(I) = V$

Seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ mit $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$
$\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p}) = \{\tilde{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} R | \mathfrak{p} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}\} \Rightarrow \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$
Analog $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$

b) Seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$
$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}} \Leftrightarrow \overline{\{\mathfrak{q}\}} \subseteq \overline{\{\mathfrak{p}\}}$

Lösung 4

Spec : $\underline{\text{Ringe}} \to \underline{\text{Top.}}$ kontravarianter Funktor, $\alpha : R \to R'$, $\operatorname{Spec}(\alpha) : \begin{cases} \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \end{cases}$

Sei R Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und $\pi : R \twoheadrightarrow R/I$ die kanonische Projektion, dann ist $\operatorname{Spec} \pi \colon \operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$ injektiv.

$$\operatorname{Bild}(\operatorname{Spec} \pi) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R | I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

a) $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $I := n\mathbb{Z}$, $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\operatorname{Bild}(\operatorname{Spec} \pi) = \{(p) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z} | p \in \mathbb{P}, p|n\}$, $x, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : D(x) \subseteq D(y) \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} : x^m = z \cdot y$
$\left(x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, D(x) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R | x \in \mathfrak{p}\right)$
$\rho^{D(y)}_{D(x)} : R_y \to R_x$, $\frac{a}{y^k} \mapsto \frac{a \cdot z^k}{x^{m \cdot k}}$

b) Es gilt $\operatorname{Spec}(k[X]) = \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \in k[X] \text{ irreduzibel}\}$. Sei $R = k[X]/(X^2)$, $I \coloneqq (X^2)$ und $\pi \colon k[X] \twoheadrightarrow k[X]/I$. Dann ist

$$\operatorname{Bild}(\operatorname{Spec} \pi) = \{(f) \in \operatorname{Spec} k[X]/(X^2) \mid f \in k[X] \text{ irreduzibel}, (X^2) \subseteq (f)\} = \{(X)\}$$

und somit $Y \coloneqq \operatorname{Spec} R = \{(X)\}$ einelementig. Die Strukturgarbe ist dann offensichtlich:

$$\mathcal{O}_Y(Y) = R \overset{\rho^Y_\emptyset}{\overset{\text{eindeutig}}{\longrightarrow}} \{p\} = \mathcal{O}_Y(\emptyset)$$

c) Nun sei $R = k[X]_{(X)} = k[X]_S$ mit $S = k[X] \setminus (X)$. Der Ring ist als Teilring von $k(X)$ nullteilerfrei und somit ist (0) ein Primideal. Außerdem ist der Ring lokal, mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = R \backslash R^\times = (\frac{X}{1})$. Sei nun $\emptyset \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ und $f \in \mathfrak{p}$. Dann schreiben wir $f = \frac{X}{1}^e \cdot \frac{a}{b}$ mit $a \in k[X], b \in k[X] \backslash (X), X \nmid a$. Dann ist $a \in S$ und $\frac{a}{b}$ somit offensichtlich invertierbar, also gilt $\frac{X}{1}^e \in \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, ist $\frac{X}{1} \in \mathfrak{p}$ und wegen $\mathfrak{p} \subseteq (\frac{X}{1})$ folgt $\mathfrak{p} = (\frac{X}{1})$. Folglich besteht das Spektrum von R aus genau zwei Punkten: $Y \coloneqq \operatorname{Spec} k[X]_{(X)} = \{(0), (\frac{X}{1})\}$. Die offenen Mengen sind $\emptyset, D(\frac{X}{1}) = \{(0)\}$ und Y. Auch hier ist die Strukturgarbe leicht anzugeben:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(Y) \arrow[dd, bend right, "!"'] & = & R & = & k[X]_{(X)} \arrow[dr] & \\
\mathcal{O}_Y(D(\frac{X}{1})) & = & R_{\frac{X}{1}} & = & \mathrm{Quot}(k[X]) = & k(X) \arrow[dllll, "!"] \\
\mathcal{O}_Y(\emptyset) & = & \{p\} & & &
\end{tikzcd}$$

d) Wir betrachten den Einsetzungshomomorphismus $\Psi_A : \mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[A]$. Der Kern von Ψ_A ist $(\mathfrak{m}_A)$, wobei $\mathfrak{m}_A = \prod_{i=1}^{e} (X - \lambda_i)^{r_i}$ das Minimalpolynom von A ist, mit den Eigenwerten λ_i von A. Nach dem Homomorphiesatz ist $\mathbb{C}[A] \cong \mathbb{C}[X]/(\mathfrak{m}_A)$. Unsere Vorüberlegungen liefern dann, genau wie in a) und b),

$$\operatorname{Bild}(\operatorname{Spec} \Psi_a) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X] \mid (\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{q}\} = \{(X - \lambda_i) \mid \lambda_i \text{ ist EW von } A\}$$

und somit $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[A] = \{(A - \lambda_i) \mid \lambda_i \text{ ist EW von } A\}$.

Übung 3 vom 15. Mai 2012

Auf diesem Blatt bezeichne R immer einen kommutativen Ring mit Eins.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ ein affines Schema. Zeige, dass die Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Mor}(X, \operatorname{Spec} R) & \to & \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X))\,, \\ (\varphi, \varphi^\sharp) & \mapsto & \varphi^\sharp(\operatorname{Spec} R) \end{array}$$

bijektiv ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Zeige, dass $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}})$ ein terminales Objekt in der Kategorie der affinen Schemata ist, dass es also zu jedem affinen Schema $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ genau einen Morphismus $(\varphi, \varphi^\sharp)$ von lokal geringten Räumen nach $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}})$ gibt.
b) Finde jeweils einen Ring R, so dass der Morphismus $(\varphi, \varphi^\sharp)$ aus a)
   - genau einen Punkt als Bild hat,
   - genau zwei Punkte als Bild hat,
   - unendlich viele Punkte als Bild hat, aber nicht surjektiv ist,
   - surjektiv ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige:

a) Ein Element $e \in R$ ist genau dann idempotent (d.h. es gilt $e^2 = e$), wenn $1-e$ idempotent ist.
b) Gibt es in R zwei Elemente e_1, $e_2 \notin R^\times$, so dass $e_1 + e_2 = 1$ und $e_1 \cdot e_2$ nilpotent ist, so enthält R mindestens drei idempotente Elemente.
   Hinweis: Betrachte das Ideal $I_n = (e_1^n, e_2^n)$ für $n \in \mathbb{N}$.
c) $\operatorname{Spec} R$ ist genau dann zusammenhängend, wenn R höchstens zwei idempotente Elemente enthält.
d) Gib einen Ring R an, sodass $\operatorname{Spec} R$ nicht zusammenhängend ist.

Lösung 1
$(X, \mathcal{O}_X)$ Schema, $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ affines Schema

Zu zeigen: $\begin{array}{rcl} \operatorname{Mor}(X, \operatorname{Spec} R) & \to & \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X)) \\ (\varphi, \varphi^\#) & \mapsto & \varphi^\#(\operatorname{Spec} R) \end{array}$ ist bijektiv

Konstruiere die Umkehrabbildung. Sei $\Phi : R \to \mathcal{O}_X(X)$ Ringhomomorphismus. Konstruiere $\varphi : X \to \operatorname{Spec} R$ stetig (bezüglich Zariski-Topologie).
Sei $p \in X$, $R \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\Psi_X} \mathcal{O}_{X,p} = \varinjlim_{p \in U \in \operatorname{Off}(X)} \mathcal{O}_X(U)$

$\mathcal{O}_{X,p}$ ist lokaler Ring mit maximalem Ideal m_p. Setze $\varphi(p) := (\Psi_X \circ \Phi)^{-1}(m_p)$.
Behauptung: φ ist stetig
denn: Es reicht das für Basismengen zu überprüfen $\rightsquigarrow$ auf affinen Teilen reicht.
Sei $\operatorname{Spec} S \subseteq X$, $p \in S \operatorname{Spec} S$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[rr, "\Psi_X"] \arrow[d, "\rho^X_{\operatorname{Spec} S}"'] \arrow[rrd, phantom, "///"] & & \mathcal{O}_{X,p} \arrow[d, "\cong"] \\
S = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(\operatorname{Spec} S) = & \mathcal{O}_X(\operatorname{Spec} S) \arrow[rr, "\Psi_{\operatorname{Spec} S}"'] & & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S|_p} = S_p
\end{tikzcd}$$

$(\Psi_X \circ \Phi)^{-1}(m_p) = (\Psi_{\operatorname{Spec} S} \circ \rho^X_{\operatorname{Spec} S} \circ \Phi)^{-1}(p) = \Phi^{-1}(\rho^X_{\operatorname{Spec} S}(p)) \Rightarrow$ auf allen affinen Teilen gilt: $\varphi|_{\operatorname{Spec} S}(p) = \Phi^{-1}(p) \rightsquigarrow$ nach Bemerkung 2.4 stetig.

Konstruiere Garbenmorphismus $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \to \varphi_*\mathcal{O}_X$. Sei $f \in R$, $D(f) = \{p \in \operatorname{Spec} R | f \notin p\} \subseteq \operatorname{Spec} R$.

$$(*) \quad \begin{tikzcd}
v \arrow[d, mapsto] & R \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "i"] \arrow[rrd, phantom, "///"] & & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d, "\rho^X_{\varphi^{-1}(D(f))}"] \\
\frac{v}{1} & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D(f)) = R_f \arrow[rr, dashed, "h = \varphi^\#(D(f))"'] & & \varphi_*\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(D(f))
\end{tikzcd}$$

$$S = \{f^n | n \in \mathbb{N}\}$$

UAE Lokalisierung: Falls $(\rho \circ \Phi)(S) \subseteq \varphi_*\mathcal{O}_X(D(f))^\times \Rightarrow \exists! h : R_f \to \varphi_*\mathcal{O}_*(D(f))$
$\rho \circ \Phi = h \circ i$

$\varphi^{-1}(D(f)) = \{q \in X | \varphi(q) \in D(f)\} = \{q \in X | f \notin \varphi(q)\}$
Für $q \in \operatorname{Spec} S \subseteq X$ gilt:

$$f \notin \varphi(q) = \Phi^{-1}((\rho^X_{\operatorname{Spec} S})^{-1}(q)) \Leftrightarrow \rho^X_{\operatorname{Spec} S}(\Phi(f)) \in q \Leftrightarrow q \in D(\rho^X_{\operatorname{Spec} S}(\Phi(f))) = S_{\rho^X_{\operatorname{Spec} S}(\Phi(f))}$$

$\Rightarrow \rho^X_{\varphi^{-1}(D(f)) \cap \operatorname{Spec} S}(\Phi(f))$ ist invertierbar.
$\mathcal{O}_X$ Garbe $\Rightarrow$ Inverse von $\varphi(\Phi(f))$ setzen sich zu „globalem" Inversen zusammen.
$\overset{\text{UAE}}{\Longrightarrow} \exists! \varphi^\#(D(f)) : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D(f)) \to \varphi_*\mathcal{O}_X(D(f))$ mit $(*)$ $\rightsquigarrow$ passt auch auf $D(f) \cap D(g)$ zusammen.
$\xRightarrow[\text{Aufgabe 3}]{\text{Blatt 1}}$ eindeutige Forsetzung Garbenmorphismus $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \to \varphi_*\mathcal{O}_X$

Zeige: $\varphi^\#$ induziert lokale Ringhomomorphismen auf Halmen.

Für $q \in \operatorname{Spec} S \subseteq X$ gilt $\mathcal{O}_{X,q} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S,q} = S_q$. Setze $p := \varphi(q) \subseteq \operatorname{Spec} R$.

$$\Rightarrow \varphi^\#_p(p) : \begin{cases} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R,p} = R_p & \to & S_q \\ \frac{a}{b} & \mapsto & \frac{\rho^X_{SpecS}(\Phi(a))}{\rho^X_{SpecS}(\Phi(b))} \end{cases}$$

Noch zu zeigen: $f^\#(\operatorname{Spec} R) = \Phi$

$\operatorname{Spec} R = D(1)\checkmark$
$(\varphi, \varphi^\#) \to \varphi^\#(\operatorname{Spec} R) \to (\varphi', (\varphi^\#)')$ ist Identität.

Lösung 2

a) $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}})$ ist terminales Objekt in der Kategorie der Schemata („affin" ist überflüssig). Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ Schema, $\exists! \Phi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to & \mathcal{O}_X(X) \\ 1 & \mapsto & 1 \end{cases}$ Ringhomomorphismus $\xRightarrow{\text{Aufgabe 1}}$ $\exists! (\varphi, \varphi^\#) : X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ Schemamorphismus

b) *Genau ein Punkt im Bild:* $R = K$ Körper $\Rightarrow \operatorname{Spec} K = \{(0)\}$

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & K \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array} \right., \Phi^{-1}((0)) = (p) \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z},\ p = \operatorname{char} K,\ \varphi((0)) = (p)$$

$$\varphi_p^{\#} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z},p} \cong \mathbb{Z}_p & \to & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K,(0)} = K_{(0)} = k \\ \frac{f}{g} & \mapsto & \Phi(f)\big/\Phi(g) \end{array} \right.$$

Genau zwei Punkte: $R = \mathbb{Z}_{(p)}$, $\operatorname{Spec} R = \{(0), (p)\}$

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}(p) \\ 1 & \mapsto & \frac{1}{1} \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi((0)) = \Phi^{-1}((0)) = (0) \\ \varphi((p)) = (p) \end{array}\right. \Rightarrow \text{Bild zweielementig}$$

unendliches Bild, nicht surjektiv: Bemerkung: Ist R kommutativer Ring mit 1, $S \subseteq R$ multiplikatives System, $\Phi : R \to R_S$, $\operatorname{Spec}\Phi : \operatorname{Spec} R_S \to \operatorname{Spec} R \Rightarrow \operatorname{Bild}(\operatorname{Spec}\Phi) = \{p \in \operatorname{Spec} R | p \cap S = \emptyset\}$. $\operatorname{Spec}\Phi$ ist Bijektion auf das Bild (sogar Homöomorphismus).

$R = \mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \operatorname{Bild}(\operatorname{Spec}\Phi) = \{(p) \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} | p \in \mathbb{P}, p \nmid n\}$

$\Rightarrow \operatorname{Bild}(\operatorname{Spec}\Phi) \neq \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ für $n \geq 2$

surjektiv: $\operatorname{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\operatorname{id} : \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$

Lösung 3

a) Sei $e^2 = e$ dann ist $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$. Mit $1 - (1-e) = e$ folgt die andere Richtung.

b) Seien $e_1, e_2 \in R \setminus R^\times$ mit $e_1 + e_2 = 1$, $e_1 e_2$ nilpotent $\Rightarrow R$ enthält mindestens drei idempotente Elemente.

0, 1 sind idempotent

$I_n = (e_1^n, e_2^n)$, $n \in \mathbb{N}$

- $\sqrt{I_n} = R$, denn: $e_1, e_2 \in \sqrt{I_n} \Rightarrow 1 = e_1 + e_2 \in \sqrt{I_n}$
- $I_n = R$, denn sonst: $I_n \subseteq m$, m maximales Ideal $\Rightarrow \sqrt{I_n} \subseteq m$ ↯ zu $\sqrt{I_n} = R$

$\Rightarrow \forall\ n \in \mathbb{N} \exists \alpha_n, \beta_n \in R : \alpha_n e_1^n + \beta_n e_2^n = 1$

$e_1 e_2$ nilpotent $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : (e_1 e_2)^k = 0$

$x = \alpha_k e_1^k = 1 - \beta_k e_2^k$ ist idempotent

$x^2 = \alpha_k e_1^k (1 - \beta_k e_2^k) = \alpha_k e_1^k - \alpha_k \beta_k \underbrace{(e_1 e_2)^k}_{=0} = x$

Es bleibt zu zeigen, dass x weder 1 noch 0 ist. Wäre $x = 0$, so wäre $\beta e_2^k = 1$, also $e_2 \in R^\times$, was im Widerspruch zur gegenteiligen Voraussetzung steht. Analog folgt aus $x = \alpha e_1^k = 1$, dass $e_1 \in R^\times$.

c) Sei zunächst $\operatorname{Spec} R$ zusammenhängend. Wir nehmen an, es gäbe drei verschiedenen idempotente Elemente, $0, 1$ und x. Nach a) ist dann auch $1 - x$ idempotent. Setze $V_1 = V(x)$ und $V_2 = V(1-x)$. Die Mengen sind abgeschlossen (klar) und nichtleer: Wäre $V_1 = \emptyset$, so wäre x in keinem echten Ideal enthalten, also invertierbar und wegen $x^2 = x$ gleich 1. Genauso folgt aus $V_2 = \emptyset$, dass $1 - x \in R^\times$ und mit $(1-x)^2 = (1-x)$, dass $x = 0$.

Angenommen es gäbe ein $\mathfrak{p} \in V(x) \cap V(1-x)$. Für dieses gälte x und $1 - x \in \mathfrak{p}$, also auch $1 \in \mathfrak{p}$, ein Widerspruch. Andererseits ist $V(x) \cup V(1-x) = V(x(1-x)) = V(0) = \operatorname{Spec}(R)$. Damit haben wir eine disjunkte Zerlegung von $\operatorname{Spec}(R)$ in abgeschlossene, nichtleere Teilmengen gefunden, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es höchstens zwei idempotente Elemente in R.

Nun sei $\operatorname{Spec}(R)$ nicht zusammenhängend. Wir finden ein drittes idempotentes Element. Sei $\operatorname{Spec}(R) = V_1 \cup V_2$ eine Zerlegung in abgeschlossene, disjunkte, nichtleere Teilmengen. Es ist $V_1 = V(I_1)$ und $V_2 = V(I_2)$, für Ideale $I_1, I_2 \subseteq R$. Da ihr Durchschnitt $V(I_1) \cap V(I_2) = V(I_1 + I_2) = \emptyset = V(1)$ ist, folgt $I_1 + I_2 = R$, und es gibt $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$ mit $e_1 + e_2 = 1$. Andererseits ist weder e_1 noch e_2 eine Einheit, denn beide Verschwindungsmengen sind nichtleer. Außerdem ist $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cdot I_2) = \operatorname{Spec}(R) = V(\sqrt{0})$ gleich der Verschwindungsmenge des Nilradikals. Also folgt $I_1 \cdot I_2 \subseteq \sqrt{0}$ und damit ist $e_1 e_2$ nilpotent.

d) Es sei R ein beliebiger Ring mit 1 und $S = R \times R$ mit der komponentenweisen Verknüpfung. Dann ist $(1, 0)$ ein idempotentes Element in S, dass weder $(0, 0)$ noch $(1, 1)$ ist. Also ist $\operatorname{Spec} S$ nach c) nicht zusammenhängend.

Übung 4 vom 22. Mai 2012

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien R, S Ringe, $X \coloneqq \operatorname{Spec}(R)$, $Y \coloneqq \operatorname{Spec}(S)$ sowie $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $g\colon Y \to X$ der von φ induzierte Schemamorphismus. Zeige:

a) Ein Element $f \in R$ ist genau dann nilpotent, wenn $D(f)$ leer ist.

b) Der Ringhomomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn der induzierte Morphismus $g^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to g_*\mathcal{O}_Y$ injektiv ist. Ist das der Fall, so ist g dominant, d.h. $g(Y)$ ist dicht in X.

c) Ist φ surjektiv, so ist g ein Homöomorphismus von Y auf eine abgeschlossene Teilmenge von X und $g^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to g_*\mathcal{O}_Y$ ist surjektiv.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Finde einen Ring R und eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf $\operatorname{Spec}(R)$, die nicht quasikohärent ist (und beweise, dass du solche R und $\mathcal{I}$ gefunden hast).

Hinweis: Diskrete Bewertungsringe können helfen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Beweise die Proposition 4.5 aus der Vorlesung:

Eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf einem Schema X ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in M}$ von X durch affine Schemata U_i gibt, so dass $\mathcal{I}|_{U_i}$ für jedes $i \in M$ quasikohärent ist.

Lösung 1
$X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} S$, $\varphi : R \to S$ Ringhomomorphismus $\rightsquigarrow$ Schemamorphismus $(g, g^\#)$

a) *Zu zeigen:* $f \in R$ nilpotent $\Leftrightarrow D(f) = \mathit{emptyset}$

$$f \text{ nilpotent} \Leftrightarrow f \in \sqrt{(0)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} R\\ (0)\subset\mathfrak{p}}} \mathfrak{p} \Leftrightarrow \ \forall\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : f \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow D(f) = \emptyset$$

b) φ injektiv $\Leftrightarrow g^\#$ injektiv

„$\Leftarrow$“: $\varphi = g^\#(\operatorname{Spec} R)$

„$\Rightarrow$“: *Behauptung:* Es reicht zu zeigen: $g^\#$ ist injektiv auf Basis der Topologie.

Denn: $U \in \operatorname{Off}(X)$, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, $g^\#(U_i)$ injektiv, $g^\#(U)(S) = 0 \Rightarrow g^\#(U)(S)|_{U_i} = g^\#(U_i)(S|_{U_i}) = 0 \xRightarrow[\text{injektiv}]{g^\#(U_i)} S|_{U_i} = 0 \xRightarrow{\text{Garbe}} S = 0$

$$\text{Sei } f \in R,\ g^\#(D(f)) : \begin{cases} \mathcal{O}_X(D(f)) = R_f & \to \quad \mathcal{O}_Y(g^{-1}(D(f)) = \mathcal{O}_Y(D(\varphi(f)) \\ \frac{a}{f^n} & \mapsto \quad \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^n} \end{cases}$$

Zu zeigen: $g^\#(D(f))$ injektiv:

Sei $\frac{g}{f^n} \in \mathcal{O}_X(D(f))$ mit $g^\#(D(f))(\frac{a}{f^n}) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^n} = 0$

$\Rightarrow \exists\ m \in \mathbb{N} : \underbrace{\varphi(f)^m \cdot \varphi(a)}_{=\varphi(f^m\cdot a)} = 0$ in $S \xRightarrow{\varphi \text{ inj.}} f^m \cdot a = 0 \Rightarrow \frac{a}{f^n} = 0$ in R_f

Zu zeigen: φ injektiv $\Rightarrow g$ dominant $(g : Y \to X)$

Annahme: $\overline{g(Y)} \neq X$

$\Rightarrow\ X \setminus \overline{g(Y)} \neq \emptyset$ offen $\Rightarrow\ \exists\ f \in R$ mit $D(f) \neq \emptyset$ und $D(f) \cap \overline{g(Y)} = \emptyset \Rightarrow g^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f)) = \emptyset \Rightarrow \exists\ m \in \mathbb{N} : \underbrace{\varphi(f)^m}_{=\varphi(f^m)} = 0 \xRightarrow{\varphi \text{ inj.}} f^m = 0 \xRightarrow{\text{a)}} D(f) = \emptyset$ ↯

c) Ist $\varphi\colon R \to S$ surjektiv, so ist $S \cong R/I$ mit $I = \text{Kern}(\varphi)$. Bei der Lösung von Aufgabe 4 auf Übungsblatt 2 haben wir bereits eingesehen, dass $g = \text{Spec}(\varphi)$ injektiv ist und dass $\text{Bild}(g) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I)$. Die Umkehrabbildung $g^{-1}\colon V(I) \to \text{Spec}(S), \mathfrak{p} \mapsto \varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} + I$ ist folglich wohldefiniert.

Es bleibt zu zeigen, dass g^{-1} stetig ist. Sei dazu $V(J) \subseteq \operatorname{Spec} S$ abgeschlossen. Dann ist

$$\begin{aligned}(g^{-1})^{-1}(V(J)) = g(V(J)) &= g(\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S \mid J \subseteq \mathfrak{q}\}) \\ &= \{\mathfrak{p} \in V(I) \mid J \subseteq g^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{p})\} \\ &= \{p \in \operatorname{Spec} R \mid \varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\varphi^{-1}(J))\end{aligned}$$

abgeschlossen. Somit ist g ein Homöomorphismus auf $V(I)$.

Nun sollte noch gezeigt werden, dass $g^\sharp$ surjektiv ist, falls φ surjektiv ist. Nach Bemerkung 1.10 aus der Vorlesung sollten wir dazu zeigen, dass für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ die induzierte Abbildung $g^\sharp_\mathfrak{p}$ surjektiv ist.

Sei zunächst $\mathfrak{p} \notin V(I)$. Dann gibt es ein offenes $U \subseteq X$ mit $\mathfrak{p} \in U$ und $U \cap V(I) = \emptyset$. Dann ist $g_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(\emptyset) = \{0\}$ und somit auch $(g_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} = \{0\}$. Folglich ist $g^\sharp_\mathfrak{p}\colon \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \to (g_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p}$ surjektiv.

Ist $\mathfrak{p} \in V(I)$, dann ist $(g_*\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} = \varinjlim\limits_{\mathfrak{p}\in U} \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U)) \cong \varinjlim\limits_{\mathfrak{q}\in V} \mathcal{O}_Y(V) = \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}}$ mit $\mathfrak{q} = g^{-1}(\mathfrak{p})$. Der Isomorphismus zwischen den Halmen kommt daher, dass g ein Homöomorphismus auf $V(I)$ ist und $\mathfrak{p} \in V(I)$. Weiter gilt $\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} = S_\mathfrak{q} \cong (R/I)_{\mathfrak{p}+I} \cong R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$. Mit der Identifizierung $S \cong R/I$ wird $g^\sharp_\mathfrak{p}$ zur kanonischen Projektion $R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$ und ist damit surjektiv.

Lösung 2

Zum Beispiel: $R = k[x]_{(x)}$, $Y = \operatorname{Spec} R = \{(0), (x)\}$, $\text{Off}(Y) = \{\emptyset, U = \underbrace{\{(0)\}}_{=D(x)}, Y\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_Y(Y) &= k[x]_{(x)} \\ & \qquad \text{(inklusion)} \\ \mathcal{O}_Y(U) &= k(x) \\ & \qquad \text{Nullabb.} \\ \mathcal{O}_Y(\emptyset) &= \{0\}\end{aligned}$$

Definiere Idealgarbe: $\mathcal{I}(Y) = \{0\} \to \mathcal{I}(U) = k(x) \to \mathcal{I}(\emptyset) = \{0\}$. Wäre $\mathcal{I}$ quasikohärent, so gälte $\mathcal{I}(U) = \rho^Y_U(\mathcal{I}(Y)) \cdot k(x) = 0$.

$\Rightarrow \mathcal{I}$ nicht quasikohärent.

Definition 4.4 (Präzisierung)

a) Eine Garbe $\mathcal{I}$ von abelschen Gruppen auf X (Schema $(X, \mathcal{O}_X)$, Restriktionabbildung ρ) heißt ***Idealgarbe***, wenn $\forall\, U \in \text{Off}(X)\mathcal{I}(U)$ Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$ ist und die Restriktionsabbildungen $\tilde\rho$ $\mathcal{O}_X$-linear sind:

$$\forall\, U' \subseteq U \in \text{Off}(X), r \in \mathcal{O}_X(U), i \in \mathcal{I}(U) : \tilde\rho^U_{U'}(r, i) = \underbrace{\rho^U_{U'}(r)}_{\in \mathcal{O}_X(U')} \cdot \tilde\rho^U_{U'}(i)$$

Lösung 3

$\mathcal{F}$ Idealgarbe auf Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ mit Restriktionsabbildung $\tilde{\rho}$ beziehungsweise ρ.

Behauptung: $\mathcal{F}$ quasikohärent $\Leftrightarrow$ $\exists$ offene, affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i : \mathcal{F}|_{U_i}$ quasikohärent

„$\Rightarrow$“: ✓ nach Definition

„$\Leftarrow$“: Schreibweise: R Ring, $\mathcal{J} \subseteq R$ Ideal definiert quasikohärente Idealgarbe auf $Y = \operatorname{Spec} R$ durch $\tilde{\mathcal{J}}(U) := \rho^Y_U(\mathcal{J}) \cdot \mathcal{O}_Y(U)$

(*) $U_i \cong \operatorname{Spec} R_i$, $\mathcal{F}|_{U_i}$ quasikohärent, das heißt $\exists \mathcal{J}_i \subseteq R_i$ Ideal mit $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{\mathcal{J}}_i$.

Verfeinern der Überdeckung erhält (*) $\Rightarrow$ Œ bilden U_i eine Basis der Topologie.

Zu zeigen: $\forall\ \hat{U} \subseteq X$ offen, affin: $\mathcal{F}_{\hat{U}}$ quasikohärent

$\hat{U} = \bigcup_{i \in I'} U_i \Rightarrow$ Œ $X = \operatorname{Spec} R$, also affin und Œ $U_i = D(g_i) \subseteq R$ mit $g_i \in R \rightsquigarrow$ Insbesodnere $\mathcal{O}_X(U_i) = R_g$, $U_i \cong \operatorname{Spec} R_{g_i}$, $\mathcal{J} := \mathcal{F}(X)$

Voraussetzung: $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{\mathcal{J}}_i$, *zu zeigen:* $\mathcal{F} \cong \tilde{\mathcal{J}}$

Definiere Garbenmorphismus $\alpha : \tilde{\mathcal{J}} \to \mathcal{F}$ durch

$$\text{für } f \in R : \alpha(D(f)) : \begin{array}{rcl} \tilde{\mathcal{J}}(D(f)) = \mathcal{J} \cdot R_f & \to & \mathcal{F}(D(f)) \subseteq R_f \text{ Ideal} \\ \frac{a}{f^n} & \mapsto & \frac{1}{f^n} \tilde{\rho}^X_{D(f)}(\alpha) \end{array}$$

Behauptung 1: $\forall\ i \in I : \alpha(\underbrace{D(g_i)}_{U_i})$ ist Isomorphismus

$\xRightarrow[\text{Aufg. 3b)}]{\text{Blatt 1}} \alpha$ Garbenisomorphismus

Behauptung 2: $\forall\ s \in \mathcal{F}(X)$ mit $\tilde{\rho}^X_{D(f)}(s) = 0$ für ein $f \in R$
$\Rightarrow \exists n \geq 0 : f^n \cdot s = 0$ in R

Behauptung 3: Sei $f \in R$
$\forall\ t \in \mathcal{F}(D(f)) \exists n \geq 0 : \exists s \in \mathcal{F}(X) : \tilde{\rho}^X_{D(f)}(s) = f^n(f)$

Beweis 1:

•$\alpha(U_i)$ *injektiv:* Sei $\frac{a}{g_i^n} \in \tilde{\mathcal{J}}(U_i)$, also $a \in \mathcal{J}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\underbrace{\alpha_i(U_i)(\frac{a}{g_i^n})}_{\frac{1}{g_i^n} \cdot \tilde{\rho}^X_{U_i}(a)} = 0$ in R_{g_i}.

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \underbrace{\tilde{\rho}^X_{U_i}(a) \cdot g_i^m}_{\tilde{\rho}^X_{U_i}(a \cdot g_i^m)} = 0 \text{ in } R$$

$\xRightarrow{\text{Beh. 2}} \exists m' \in \mathbb{N} : g_i^{m'} \cdot a = 0$ in R
$\Rightarrow \frac{a}{g_i^n} = 0$ in R

•$\alpha(U_i)$ *surjektiv:* Sei $t \in \mathcal{F}(U_i) \xRightarrow{\text{Beh. 3}} \exists n \geq 0 : \exists s \in \mathcal{F}(X) : \tilde{\rho}^X_{U_i}(s) = g_i^n \cdot t$
$\Rightarrow \alpha(U_i)(\frac{s}{g_i^n}) = \frac{1}{g_i^n} \cdot \tilde{\rho}^X_{U_i}(s) = t$

Beweis 2:

$s \in \mathcal{F}(X)$, $\tilde{\rho}^X_{D(f)}(s) = 0$ für ein $f \in R$
$s_i := \tilde{\rho}^X_{U_i}(s) \in \mathcal{F}(U_i) \subseteq R_{g_i}$
$D(f) \cap D(g_i) = D(g_i f) \subseteq D(g_i)$, $\mathcal{F}(D(fg_i)) = \tilde{\mathcal{J}}_i(D(fg_i)) = \mathcal{J}_i R_{fg_i}$
$\tilde{\rho}^{U_i}_{D(f) \cap U_i}(s_i) = \tilde{\rho}^X_{D(f) \cap U_i}(s) = 0$ in R_{fg_i}
$\xRightarrow[\rightsquigarrow\text{Überd. endl.}]{X \text{ quasikoh.}} \exists N > 0 : \forall\ i$ ist $f^N s_i = 0$ in $R_{g_i} \xRightarrow{\text{Garbe}} f^N s = 0$ in R

Beweis 3:

$t \in \mathcal{F}(D(f))$, $\rho^{D(f)}_{D(fg_i)}(f) \in \mathcal{J}_i R_{g_i f} \Rightarrow \exists n \geq 0, t_i \in \mathcal{J}_i : \tilde{\rho}^{D(f)}_{D(fg_i)}(t) = \frac{t_i}{f^n}$
$\xRightarrow[\text{endlich}]{\text{Überd.}} \exists N > 0 : \forall\ i \in I \exists t_i \in \mathcal{J}_i : \tilde{\rho}^{D(f)}_{D(g_i f)}(t) = \frac{t_i}{f^N}$
$\Rightarrow \rho^{D(g_i)}_{D(fg_ig_j)}(t_i) = \rho^{D(g_i f)}_{D(g_ig_jf)} \underbrace{\rho^{D(g_i)}_{D(g_i f)}(t_i)}_{f^N \rho^{D(f)}_{D(g_i f)}(t)} = \rho^{D(f)}_{D(fg_ig_j)}(f^N(t))$
$\xRightarrow{\text{Beh. 2}} \exists m > 0 : f^m(t_i - t_j) = 0$ in $D(g_ig_j)$
$\xRightarrow[\text{Überd.}]{\text{endliche}} \exists M > 0 : \forall\ i, j \in I$ gilt $f^M(t_i - t_j) = 0$ in $D(g_ig_j)$
$\Rightarrow f^M t_i$ bilden konsistente Familie $\Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(X) : \tilde{\rho}^X_{D(f)}(s) = f^{M+N} t$

Übung 5 vom 29. Mai 2012

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Bestimme die folgenden Faserprodukte:

a) $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R[Y]$ für die Inklusionen $R \to R[X]$ und $R \to R[Y]$.

b) $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R[Y]} \operatorname{Spec} R$ für die Ringhomomorphismen

$$R[Y] \to R\,, \quad Y \mapsto 0 \qquad \text{und} \qquad R[Y] \to R[X]\,, \quad Y \mapsto X^2.$$

c) $\operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \overline{k}$, wobei L/k eine endliche separable Körpererweiterung ist und $\overline{k}$ der algebraische Abschluss von k.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien S ein Schema und T ein S-Schema. Ergänze die Zuordnung $X \mapsto X \times_S T$ zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der T-Schemata.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$. Wir betrachten die elliptische Kurve $E = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subset \mathbb{A}^2(k)$. Außerdem sei $f\colon E \to \mathbb{A}^1(k)$ der von

$$k[X] \to k[X,Y]/(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) = k[E]\,, \quad X \mapsto X$$

induzierte und $g\colon E \to \mathbb{A}^1(k)$ der von $k[Y] \to k[E], Y \mapsto Y$ induzierte Schemamorphismus.

a) Wir betrachten das Faserprodukt $V = E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$ mit
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^1(k) \end{tikzcd}.$$

Zeige, dass V reduzibel und singulär ist.

b) Sei nun $Y = E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$ mit
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "g"] \\ E \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^1(k) \end{tikzcd}.$$

Ist das Faserprodukt noch immer singulär?

Hinweis: Durch den Funktor t aus Proposition 3.8 können affine Varietäten als Schemata aufgefasst werden. Damit ist ihr Faserprodukt definiert.

Lösung 1
a) $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R[Y] = \operatorname{Spec}(R[X] \otimes_R R[Y])$ mit $R \hookrightarrow R[X], R \hookrightarrow R[Y]$

$$\begin{tikzcd} C & & \\ & R[X,Y] \arrow[ul, dashed] \arrow[r, phantom, "///" above, shift left=4] \arrow[d, phantom, "///" left, shift right=6] & R[Y] \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[ull, bend right, "\psi"'] \\ & R[X] \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[uul, bend left, "\varphi"] & R \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

UAE Polynomring: $\exists! f : R[X,Y] \to C$ mit $f(X) = \varphi(X), f(Y) = \psi(Y)$ und $\psi : R[Y] \to C$ mit $\psi(Y) = f(Y)$ ist eindeutig $\Rightarrow f \circ i = \psi$

Genauso: $\varphi = f \circ i$

b) $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R[Y]$, $\begin{matrix} R[Y] & \twoheadrightarrow & R \\ Y & \mapsto & 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} R[Y] & \to & R[X] \\ Y & \mapsto & X^2 \end{matrix}$, $R = R[Y]/(Y)$ als $k[Y]$-Algebra.

Behauptung: $A \otimes_R R/I \cong A/\varphi(I)A$, wobei A durch $\varphi : R \to A$ zur R-Algebra wird.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
 & A/\varphi(I)A \arrow[u, dashed, "\exists! f"'] & \\
A \arrow[ur, "\pi"] \arrow[uur, bend left, "\alpha"] & & R/I \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "\beta"'] \\
 & R \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gilt $\alpha(\varphi(I)) = \beta(p(I)) = \beta(0) = 0 \xRightarrow[\text{Satz von } A/\varphi(I)A]{\text{Homomorphie-}} \exists! f : A/\varphi(I)A \to C : f \circ \pi = \alpha$

$f \circ h \circ p = \alpha \circ \varphi = \beta \circ p \xRightarrow{p \text{ surj.}} f \circ h = \beta \qquad \square$

$\Rightarrow \operatorname{Spec}(R[X]) \otimes_{R[X]} R[Y]/(Y) = \operatorname{Spec}\left(R[X]/(X^2)\right)$

c) L/K endliche seperable Körpererweiterung, $\overline{k}$ algebraischer Abschluss von k, $\operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \overline{k} \cong \operatorname{Spec}(L \otimes_k \overline{k})$

Satz von primitiven Element $\Rightarrow L = k(\alpha), \alpha \in L$ algebraisch, f_a sei Minimalpolynom von α.
$L \cong k[X]/(f_\alpha)$, $k[X]/(f_\alpha) \otimes_k \overline{k} \cong \overline{k}[X]/(f_\alpha)$

$$\begin{tikzcd}
 & & C & \\
 & & \overline{k}[X]/(f_\alpha) \arrow[u, dashed] & \\
 & k[X]/(f_\alpha) \arrow[ur, hook] \arrow[uur, bend left, "\alpha"] & & \overline{k} \arrow[ul, hook'] \arrow[uul, bend right, "\beta"'] \\
k[X] \arrow[ur] \arrow[uuurr, bend left] & & k \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

$f_\alpha = \prod_{i=1}^{d} (X - \beta_i)$, $d = \deg f_\alpha$, $\beta_i \in \overline{k}$

$\xRightarrow[\text{Restsatz}]{\text{Chinesischer}} \overline{k}[X]/(f_\alpha) = \prod_{i=1}^{d} \overline{k}[X]/(X - \beta_i) \cong \prod_{i=1}^{d} \overline{k}$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} \ldots = \operatorname{Spec}\left(\prod \overline{k}[X]/(X - \beta_i)\right) = \coprod \operatorname{Spec}\left(\overline{k}[X]/(X - \beta_i)\right) = \coprod \operatorname{Spec} \overline{k}$

Koprodukt ($\coprod$) in der Kategorie der Schemata ist die disjunkte Vereinigung.

Lösung 2

S Schema, T S-Schema, das heißt $T \xrightarrow[b]{} S$, $X \mapsto X \times_S T$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "///"] & Y \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}
\overset{\text{konstruiere}}{\rightsquigarrow}
\begin{tikzcd}
X \times_S T \arrow[rr, "f \times_S T"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "///"] & Y \times_S T \arrow[dl] \\
& T &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \times_S T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\substack{\text{UAE } Y \times_S T:\\ \exists! f \times_S T}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "a"] \arrow[dd, bend left] \\
T \arrow[r, "b"'] & S \\
Y \times_S T \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Y \arrow[u, "c"']
\end{tikzcd}
$$

Noch zu zeigen: $\mathrm{id}_X \times_S T = \mathrm{id}_{X \times_S T}$, $(f \circ g) \times_S T = (f \times_S T) \circ (g \times_S T)$

$$
\begin{tikzcd}
X \times_S T \arrow[rrr] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right] & & \square & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl] \arrow[dd, bend left, "///"] \\
Y \times_S T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rrr, bend right, "\square"] & T \arrow[r] & S & Y \arrow[l] \arrow[d, "g"] \\
Z \times_S T \arrow[rrr] \arrow[ur] & & \square & Z \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Lösung 3

k algebraisch abgeschlossen, $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, $E = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$

a) $V = E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$, $I := (Y^2 - X(X-1)(X-\lambda))$, $k[E] = {}^{k[X,Y]}/_{I}$, $t(E) = \operatorname{Spec}(k[E])$, $t(\mathbb{A}^1(k)) = \operatorname{Spec}(k[X])$, $\operatorname{Spec} A \times_{\operatorname{Spec} B} \operatorname{Spec} C \cong \operatorname{Spec}(A \otimes_B C)$

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& V \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "f"] \\
& E \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^1(k)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
C & & \\
& R \arrow[ul, dashed] & k[E] \arrow[l, hook', "\substack{z \,\mapsfrom\, y \\ x \,\mapsfrom\, x}"'] \arrow[llu, bend right, "h_2"'] \\
& k[E] \arrow[u, hook, "x \mapsto x"] \arrow[luu, bend left, "h_1"] & k[X] \arrow[l, "x \mapsfrom x"] \arrow[u, "x \mapsto x"']
\end{tikzcd}
$$

$R = {}^{k[X,Y,Z]}\big/_{\underbrace{(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), Z^2 - Y^2)}_{=:I}}$

Anmerkung: $I = ((Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), Z^2 - X(X-1)(X-\lambda))$

UAE Polynomring: $\exists! h' : k[X,Y,Z] \to C$ mit $h'(X) = h_1(X) = h_2(X)$, $h'(Y) = h_1(Y)$, $h'(Z) = h_2(Y)$

$h'(I') = 0 \Rightarrow h'$ faktorisiert über R

$\Rightarrow t(V) = t(E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E) = \operatorname{Spec}({}^{k[X,Y,Z]}\big/_{I'})$

$$\begin{aligned}\Rightarrow V = V(I') &= V(Y^2 - Z^2, Y^2 - X^2(X-1)(X-\lambda))\\ &= V((Y-Z)(Y+Z), Y^2 - X^2(X-1)(X-\lambda))\end{aligned}$$

$(0,0,0) \in V(Y - Z, Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \cap V(Y+Z, Y^2 - X(X-1)(X-\lambda))$

$\Rightarrow (0,0,0)$ singulärer Punkt

b) $R = {}^{k[X,Y,Z]}\big/_{I''}$

$$\begin{tikzcd} R & k[E] \arrow[l, "{y \mapsfrom y,\; x \mapsfrom x}"'] \\ k[E] \arrow[u, "{z \mapsfrom x,\; x \mapsfrom y}"] & k[X] \arrow[l, "y \mapsfrom x"] \arrow[u, "x \mapsto x"'] \end{tikzcd}$$

$I'' = (Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), X^2 - Z(Z-1)(Z-\lambda))$

$k[E] \otimes_{k[X]} k[E] = R$

$\Rightarrow E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), X^2 - Z(Z-1)(Z-\lambda))$

$$A := \begin{pmatrix} -(X-1)(X-\lambda) - X(X-\lambda) - X(X-1) & 2Y & 0 \\ 2X & 0 & -(Z-1)(Z-\lambda) - Z(Z-\lambda) - Z(Z-1) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Kriterium: $(x,y,z) \in V$ ist singulär $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A(x,y,z)) < \underbrace{n}_{=3} - \dim V$

$\dim V \geq 1$

Sei $(x,y,z) \in V$ mit $\operatorname{Rang}(A(x,y,z)) < 2$

1. Spalte $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2y = 0 \wedge 1 - (Z-1)(Z-\lambda) - Z(Z-1) - Z(Z-\lambda) = 0 ↯ (x,y,z) \in V$

$\Rightarrow V$ ist regulär.

Bemerkung

t ist injektiv auf Objekten und volltreu $\Rightarrow$ man kann $E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$ auch in Kategorie der affinen Varietäten berechnen

$\rightsquigarrow$ dort ist Faserprodukt $\cong \{(x,y) \in X \times Y \mid g(x) = f(y)\}$, $g : X \to S, f : Y \to S$

Übung 6 vom 5. Juni 2012

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachte die Abbildung $X \times_S Y \to \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ aus Bemerkung 6.2, die das Faserprodukt von zwei S-Schemata $f\colon X \to S$ und $g\colon Y \to S$ in das topologische Faserprodukt von X und Y über S abbildet.

Zeige, dass die Abbildung im Allgemeinen nicht injektiv ist.

Hinweis: Es gibt ein Beispiel, bei dem das topologische Faserprodukt $\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ *einelementig ist.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien S ein Schema, $\xi\colon X \to S$ ein S-Schema und $Y \hookrightarrow S$ ein abgeschlossenes Unterschema von S. Zeige:

a) Der topologische Raum $X \times_S Y$ ist homöomorph zu $\xi^{-1}(Y)$.

b) Ist $X \to S$ ein abgeschlossenes Unterschema von S, so ist $X \times_S Y$ homöomorph zu $X \cap Y$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $Y = \operatorname{Spec}(k[t])$.

a) Seien weiter
$$X = \operatorname{Spec}(k[x,y,t]/(ty - x^2))$$
und $f\colon X \to Y$ der Schemamorphismus, der von dem natürlichen k-Algebren-Homomorphismus $k[t] \to k[x,y,t]/(ty - x^2), t \mapsto t$ induziert wird.

Zeige: Für $a \in k \setminus \{0\}$ ist die Faser $X_{(t-a)}$ irreduzibel und reduziert, wohingegen die Faser $X_{(t)}$ zwar irreduzibel, aber nicht reduziert ist.

b) Nun sei
$$Z = \operatorname{Spec}(k[x,y,t]/(xy - t))$$
und $f\colon Z \to Y$ der Schemamorphismus, der von dem natürlichen Homomorphismus $k[t] \to k[x,y,t]/(xy - t), t \mapsto t$ induziert wird.

Zeige: Auch hier ist die allgemeine Faser $Z_{(t-a)}$ irreduzibel und reduziert, wohingegen $Z_{(t)}$ reduziert, aber nicht irreduzibel ist.

Lösung 1
Blatt 5, Aufgabe 1c): $\operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} X} \operatorname{Spec} \overline{k} = \overbrace{\coprod_{i=1}^{n} \operatorname{Spec} \overline{k}}^{n\text{-elementig}}$, $L|k$ seperabel, endlich, $\operatorname{Spec} L, \operatorname{Spec} k, \operatorname{Spec} \overline{k}$ alle einelementig

$\Rightarrow$ topologisches Faserprodukt ist auch einelementig.

Beispiel: $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$
$\operatorname{Spec} \mathbb{C} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ zweielementig

Lösung 2
S Schema, $\xi : X \to S$, $\eta : Y \hookrightarrow S$, Y abgeschlossenes Unterschema von S.

a) *Zu zeigen:* $X \times_S Y \cong \xi^{-1}(Y)$ homöomorph

Sei zunächst $S = \operatorname{Spec} R$ affin $\Rightarrow Y = \operatorname{Spec} {}^{R}\!/_{I}$, $I \subseteq R$ Ideal

Schreibe $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i \subseteq X$ offen und affin, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$

$\xi_i := \xi|_{U_i} : \underset{=\operatorname{Spec} A_i}{U_i} \to \underset{=\operatorname{Spec} R}{S} \rightsquigarrow \varphi_i : R \to A_i$

$X \times_S Y = (\bigcup_{i\in I} U_i) \times_S Y = \bigcup_{i\in I}(U_i \times_S Y) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Spec}(\underbrace{A_i \otimes_R R/I}_{A_i/\varphi_i(I)\cdot A}) = \bigcup_{i\in I} \underbrace{\operatorname{Spec}(A_i/\varphi_i(I)\cdot A_i)}_{=:Z_i}$

$Z_i \cong \{p \in \operatorname{Spec} A_i | \varphi_i(I) \subseteq p\} = V(\varphi_i(I)A_i) = \xi_i^{-1}(Y)$

Sei $p \in Z_i \Rightarrow \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi_i(I))}_{\subseteq I} \subseteq \varphi_i^{-1}(p) = \xi(p) \Rightarrow \xi(p) \in \operatorname{Spec}(R/I) = Y \Rightarrow Z_i \subseteq \xi^{-1}(Y)$

$\xRightarrow{X\times_S Y \twoheadrightarrow \xi(Y)} X \times_S Y = \xi^{-1}(Y)$

in tolopogischen Räumen:

$$\begin{tikzcd}
\{(x,y) \in X \times Y | f(x) = g(x)\} = f^{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r, hook] & S
\end{tikzcd}$$

Sei nun S beliebig: $S = \bigcup_{i\in I} S_i$, S_i offen und affin, $X_i := \xi^{-1}(S_i)$, $Y_i := \eta^{-1}(S_i)$

$$\begin{tikzcd}
? \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \bigcup_{i\in I} X_i \arrow[d] \\
\bigcup_{i\in I} Y_i \arrow[r] & \bigcup_{i\in I} S_i
\end{tikzcd}$$

$X \times_S Y = \bigcup_{i\in I} X \times_S Y \overset{\text{Vorl.}}{=} \bigcup_{i\in I} X_i \times_{S_i} Y_i \overset{\text{s. o.}}{=} \bigcup_{i\in I} \xi^{-1}(Y_i) = \xi^{-1}(\bigcup_{i\in I} Y_i) = \xi^{-1}(Y)$

b) $\xi : X \hookrightarrow S$ abgeschlossenes Unterschema $\Rightarrow X \times_S Y \overset{\text{a)}}{=} \xi^{-1}(Y) \overset{\xi \text{ Inklusion}}{=} X \cap Y$

Lösung 3

k algebraisch abgeschlossen, $Y = \operatorname{Spec}(k[t])$

a) $X = \operatorname{Spec}(k[x,y]/(ty - x^2))$

Anmerkung: Großbuchstaben stehen in dieser Aufgabe für Schemata, Kleinbuchstaben für Variablen.

$f : X \to Y$ induziert durch $\begin{array}{ccc} k[t] & \to & R \\ t & \mapsto & t \end{array}$

Berechne Faser $X_{(t-a)}$:

$p := (t-a) \in Y$

$\mathcal{O}_{Y,p} = k[t]_p$

Restklassenkörper: $\kappa(p) = \mathcal{O}_{Y,p}/m_{Y,p}$

$\kappa(p) = k[t]_p/p \cdot k[t]_p = k[t]_p/(t-a)$ Anmerkung: $(R/I)_{\pi(S)} = R_S/I \cdot R_S$, $\pi : R \twoheadrightarrow R/I$

$X_{(t-a)} = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(p)$

$= \operatorname{Spec}(\underbrace{k[x,y,t]/(ty - x^2)}_{A} \underbrace{\otimes_{k[t]}}_{R} \underbrace{k[t]/(t-a)}_{R/I})$

$= \operatorname{Spec}\left(k[x,y,t]/(ty - x^2, t - a)\right)$

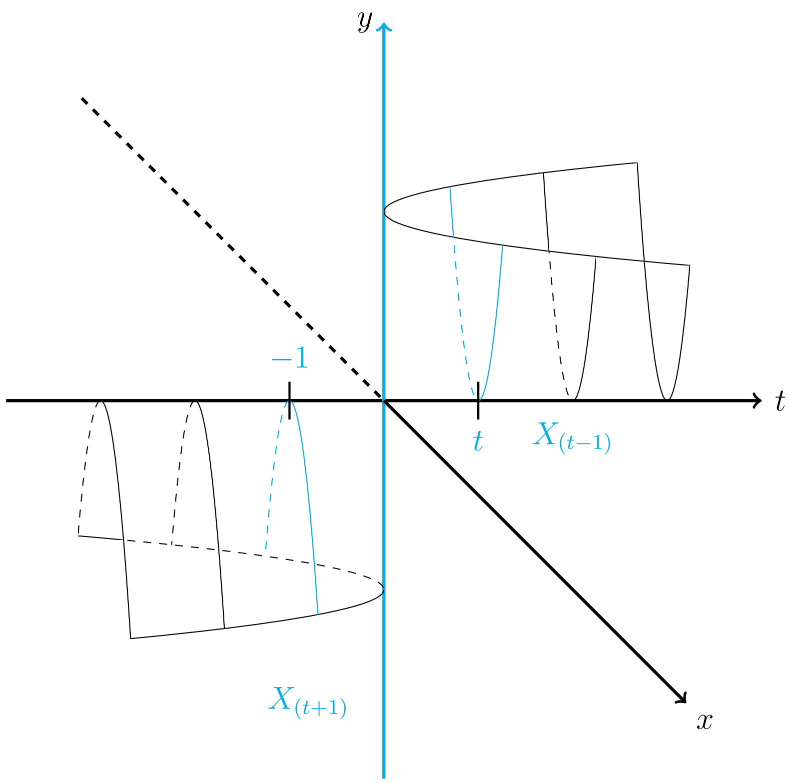
$\cong \operatorname{Spec}\left(k[x,y]/(ay - x^2)\right) \cong V(ay - x^2) \subseteq \operatorname{Spec} k[x,y]$

$I := (ay - x^2)$

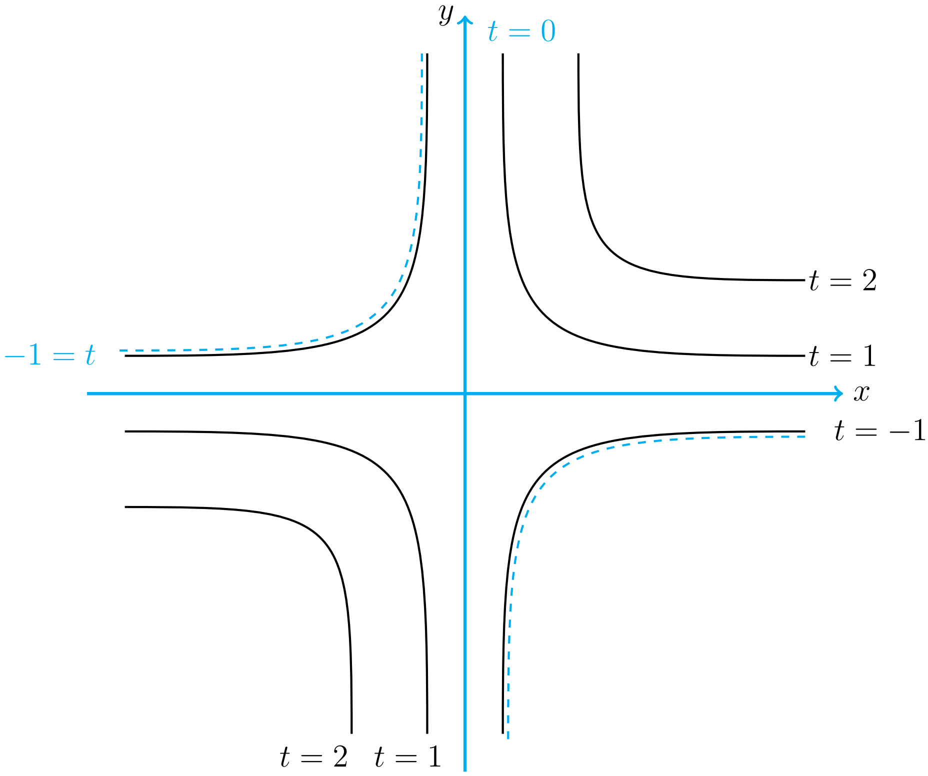
$X_{(t-a)}$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow \sqrt{I}$ prim

$\underline{a \neq 0}$: ay ist kein Quadrat in $k[y]$
$\Rightarrow ay - x^2$ irreduzibel in $k[y][x]$
$\Rightarrow I$ prim
$\Rightarrow \sqrt{I} = I$ prim
$\Rightarrow X_{(t-a)}$ irreduzibel
Außerdem ${}^{k[x,y]}\!/_{I}$ ist nullteilerfrei $\Rightarrow X_{(t-a)}$ reduziert

$\underline{a = 0}$: $X_{(t)} = \operatorname{Spec}({}^{k[x,y]}\!/_{x^2})$
$I = (x^2) \Rightarrow \sqrt{I} = (x)$ prim
$\Rightarrow X_{(t)}$ irreduzibel
X nilpotent in ${}^{k[x,y]}\!/_{x^2} \Rightarrow X_{(t)}$ ist nicht reduziert



b) $Z := \operatorname{Spec}\left({}^{k[x,y,t]}\!/_{(xy-t)}\right)$



$\kappa((t-a)) \cong {}^{k[t]}\!/\!_{(t-a)}$

$Z_{(t-a)} = \operatorname{Spec}\left({}^{k[x,y,t]}\!/\!_{(xy-t)} \otimes_{k[t]} {}^{k[t]}\!/\!_{(t-a)}\right) = \operatorname{Spec}\left({}^{k[x,y]}\!/\!_{(xy-a)}\right)$

$\underline{a \neq 0}$: $(xy-a)$ ist prim $\Rightarrow Z_{(t-a)}$ reduziert und irreduzibel

$\underline{a = 0}$: $Z_{(t)} = \operatorname{Spec}\left({}^{k[x,y]}\!/\!_{(xy)}\right) \cong V(xy) \subseteq \operatorname{Spec} k[x,y]$

$V(xy) = V(x) \cup V(y)$

$\Rightarrow Z_{(t)}$ reduzibel

$\sqrt{(xy)} = (xy) \Rightarrow$ keine nilpotenten Elemente in ${}^{k[x,y]}\!/\!_{(xy)} \Rightarrow Z_{(t)}$ reduziert

Übung 7 vom 12. Juni 2012

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ heißt *quasikompakt*, wenn es eine offene, affine Überdeckung $Y = \bigcup\limits_{i\in I} V_i$ gibt, sodass jedes $f^{-1}(V_i)$ quasikompakt ist. Zeige:

a) Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ ist genau dann quasikompakt, wenn für jede offene, affine Teilmenge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ quasikompakt ist.

b) Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ ist genau dann von endlichem Typ, wenn er lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei k ein Körper und X die affine Gerade über k mit doppeltem Nullpunkt. X ist also das Schema, das entsteht, wenn wir $U = \operatorname{Spec} k[X]$ mit $V = \operatorname{Spec} k[Y]$ entlang $D(X)$ und $D(Y)$ vermöge des Isomorphismus $k[Y, Y^{-1}] \to k[X, X^{-1}]$, $Y \mapsto X$ verkleben.

Zeige, dass X nicht separiert über k ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Zeige, dass ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ genau dann separiert ist, wenn das Bild von X unter der von f induzierten Diagonalabbildung $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien S ein Schema und X, Y zwei S-Schemata. Weiter seien zwei Morphismen f und g von X nach Y gegeben, die auf einer offenen, dichten Teilmenge von X übereinstimmen. Zeige:

a) Ist X reduziert und Y separiert über S, so gilt $f = g$.

b) Die Aussage ist falsch, wenn X nicht reduziert ist oder wenn Y nicht separiert ist.

Lösung 1
$f : X \to Y$ quasikomp. $:\Leftrightarrow \exists$ offene, affine Überd. $Y = \bigcup\limits_{i\in I} V_i$ mit $\forall i \in I : f^{-1}(V_i)$ quasikomp.

a) *Behauptung:* f quasikompakt $\Leftrightarrow$ für alle $V \subseteq Y$ offen, affin gilt $f^{-1}(V)$ quasikompakt

„$\Rightarrow$“: $\checkmark$

„$\Leftarrow$“: Sei $Y = \bigcup\limits_{i\in I} V_i$, $V_i = \operatorname{Spec} R_i$, $f^{-1}(V_i)$ quasikomp., $V = \operatorname{Spec} R \subseteq Y$, $V = \bigcup\limits_{i\in I} V \cap V_i$.

Überdecke $\underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{quaskomp.}}$ affin: $f^{-1}(V_i) = \bigcup\limits_{j\in J_i} \operatorname{Spec} A_{ij} \Rightarrow$ ŒE J_i endlich

$f|_{\operatorname{Spec} A_{ij}} : \operatorname{Spec} A_{ij} \to \operatorname{Spec} R_i \rightsquigarrow \varphi_{ij} : R_i \to A_{ij}$

Sei $x \in V \cap V_i \Rightarrow x \in \operatorname{Spec} R_i \Rightarrow \exists\, g_{x,i} \in R_i : x \in D(g_{x,i}),\ D(g_{x,i}) = \operatorname{Spec} R_i[\frac{1}{g_{x,i}}]$

$f^{-1}(D(g_{x,i})) \cap \operatorname{Spec} A_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}[\frac{1}{\varphi_{ij}(g_{x,i})}]$ quasikompakt

$V = \bigcup\limits_{i\in I} \bigcup\limits_{x\in V\cap V_i} (D(g_{x,i})) \underset{\text{quasikomp.}}{\overset{V}{=}} \bigcup\limits_{\text{endl.}} D(g_{x,i})$

$\Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\text{endl.}} f^{-1}(D(g_{x,i})) = \bigcup\limits_{\substack{\text{endl.}\\ g_{x,i}}} \bigcup\limits_{j\in J_i} f^{-1}(D(g_{x,i}))\cap \operatorname{Spec} A_{ij} = \bigcup\limits_{\text{endl.}} \bigcup_{j\in J_i} \operatorname{Spec} A_{ij}[\frac{1}{\varphi_{ij}(g_{x,i})}]$

ist quasikompakt, da endliche Vereinigung von quasikompakten Mengen.

b) f lokal von endlichem Typ $\Leftrightarrow \exists\ Y = \bigcup \operatorname{Spec} R_i : f^{-1}(\operatorname{Spec} R_i) = \bigcup_{j \in J} \operatorname{Spec} A_{ij},\ A_{ij}$ endlich erzeugte R_i-Algebra

f von endlichem Typ $\Leftrightarrow$ zusätzlich J endlich

Zu zeigen: von endlichem Typ $\Leftrightarrow$ lokal von endlichem Typ und quasikompakt

„$\Leftarrow$“: ✓

„$\Rightarrow$“: *Zu zeigen:* f quasikompakt

$Y = \bigcup \operatorname{Spec} R_i,\ f^{-1}(\operatorname{Spec} R_i) = \bigcup\limits_{j \in J} \operatorname{Spec} A_{ij},\ J$ endlich

$\Rightarrow$ endliche Vereinigung von quasikompakten Mengen ✓ (endliche Vereinigung von quasikompakten Mengen ist quasikompakt)

Lösung 2

Wir wollen eine offene, affine Teilmenge $W \subseteq X \times_{\operatorname{Spec} k} X$ finden, so dass $W \cap \Delta(X)$ kein abgeschlossenes Unterschema von W ist. Damit das klappen kann, sollte W etwas mit $U \cap V$ zu tun haben. Es gilt: $U \cap V \cong D(x) \cong D(y) \cong \operatorname{Spec} k[t, t^{-1}]$, durch $k[x, x^{-1}] \to k[t, t^{-1}], x \mapsto t$ und $k[y, y^{-1}] \to k[t, t^{-1}], y \mapsto t$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "\Delta"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
 & X \times_k X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
 & \operatorname{Spec} k &
\end{tikzcd}$$

Beh.: Es gilt $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) \cong U \times_{\operatorname{Spec} k} V \subseteq X \times_{\operatorname{Spec} k} X$.

Wir zeigen, dass $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ die UAE von $U \times_{\operatorname{Spec} k} V$ erfüllt. Dazu seien ein Schema T mit $\operatorname{Spec} k$-Morphismen $\varphi_1 \colon T \to U$ und $\varphi_2 \colon T \to V$ vorgegeben mit $s \circ i_1 \circ \varphi_1 = s \circ i_2 \circ \varphi_2$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[rrrd, bend left, "\varphi_2"] \arrow[ddrr, bend right, "\varphi_1"'] & & & \\
 & p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dr, "\subset"] \arrow[dd, "p_1"] & & V \arrow[d, "i_2"] \\
 & & X \times_{\operatorname{Spec} k} X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d, "s"] \\
 & U \arrow[r, "i_1"] & X \arrow[r, "s"] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

Aus der UAE von $X \times_k X$, angewendet auf $i_1 \circ \varphi_1$ und $i_2 \circ \varphi_2$, erhalten wir $\theta \colon T \to X \times_{\operatorname{Spec} k} X$ das diese Morphismen faktorisiert. Daraus folgt, dass $p_1(\theta(T)) \subseteq U$ und $p_2(\theta(T)) \subseteq V$ gilt, wir also einen eindeutigen Morphismus $\theta \colon T \to p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j)$ erhalten haben.

Wir erhalten $\Delta^{-1}(U \times_{\operatorname{Spec} k} V) = \Delta^{-1}(p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)) = U \cap V$, also einen Morphismus $\Delta|_{U \cap V} \colon U \cap V \to U \times_{\operatorname{Spec} k} V \cong \operatorname{Spec} k[x, y]$ von affinen Schemata mit zugehörigem Ringhomomorphismus

$$\varphi : \begin{cases} k[x,y] & \to & k[t, t^{-1}] \\ x & \mapsto & t \\ y & \mapsto & t \end{cases}.$$

Da φ nicht surjektiv ist, wird der Ringhomomorphismus nicht von einem Ideal in $k[x, y]$ induziert und $\Delta_* \mathcal{O}_X|_{U \times_{\operatorname{Spec} k} V}$ ist nicht quasikohärent. Also ist $U \times_{\operatorname{Spec} k} V$ das W, das wir finden wollten.

Lösung 3
$f : X \to Y$ separiert $\Leftrightarrow \Delta_f(X) \subseteq X \times_Y X$ abgeschlossen

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
& X \times_Y X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & \square & X \arrow[dl, "f"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

f separiert $\Leftrightarrow \Delta_f(X) \subseteq X \times_Y X$
abgeschlossenes Unterschema

„$\Rightarrow$“: Nach Definition
„$\Leftarrow$“:
- Δ_f hat Linksinverse $p_1 \Rightarrow \Delta_f$ injektiv
- Noch zu zeigen: $\underbrace{\mathcal{O}_{\Delta_f(X)}}_{(\Delta_f)_*\mathcal{O}_X} = \mathcal{O}_{X\times_Y X}{}_{/\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}$ quasikohärente Idealgarbe auf $X \times X$.

$\rightsquigarrow$ finde offene, affine Überdeckung $X \times_Y X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, sodass $\forall i \in I : \mathcal{I}_{U_i}$ quasikohärent.

$Y = \bigcup \operatorname{Spec} R_i$
$X = \bigcup \underbrace{f^{-1}(\operatorname{Spec} R_i)}_{X_i}$, $X_i = \bigcup \operatorname{Spec} A_{ij}$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} A_{ij} \times_{\operatorname{Spec} R_i} \operatorname{Spec} A_{ij}$ überdecken $\Delta_f(X)$
$f|_{\operatorname{Spec} A_{ij}} : \underbrace{\operatorname{Spec} A_{ij}}_{=:Z_{ij}} \to \operatorname{Spec} R_i$ separiert

$\Rightarrow \Delta_f|_{Z_{ij}} : Z_{ij} \to Z_{ij} \times_{\operatorname{Spec} R_i} Z_{ij}$ ist abgeschlossene Einbettung
$\Rightarrow \mathcal{O}_{\Delta_f(X)|_{Z_{ij}}} = \mathcal{O}_{Z_{ij}\times_{\operatorname{Spec} R} Z_{ij}}{}_{/I}$, I quasikohärent
$\mathcal{I}|_{Z_{ij}} = I$

Lösung 4
X, Y S-Schemata, $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, $f = g$ auf $U \subseteq X$ offen, dicht.
a) *Behauptung:* X reduziert, $Y \to S$ separiert $\Rightarrow f = g$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "(f,g)_S"'] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & U \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, dashed] \\
& Y \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
Y \arrow[dr] & \square & Y \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

$f \circ j = g \circ j : U \to Y$ faktorisiert über $p_i \circ (f,g)_S$
$\Rightarrow (f,g)_S \circ j = (f \circ j, g \circ j)_S = (f \circ j, f \circ j)_S$

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[d, dashed, "(m,m)_S"'] \arrow[dl, bend right, "m"'] \arrow[dr, bend left, "m"] & \\
Z & Z \times_S Z \arrow[l, "\tilde{p}_1"'] \arrow[r, "\tilde{p}_2"] & Z \arrow[l, bend left, "\Delta_Z"]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \tilde{p}_i \circ \Delta_Z = \mathrm{id}_Z \Rightarrow \tilde{p}_i \circ \Delta_Z \circ m = m$
$\Rightarrow (m,m)_S = \Delta_Z \circ m$

$\Rightarrow \underbrace{(f,g)_S}_{=:h} \circ j = (f \circ j, f \circ j) = \Delta_f \circ (f \circ j)$

$h(j(U)) \subseteq \Delta_Y(Y) \Rightarrow j(U) \subseteq h^{-1}(\Delta_Y(Y))$. $\Delta_Y(Y)$ ist abgeschlossen $\xRightarrow{h \text{ stetig}} h^{-1}(\Delta_Y(Y))$ ist abgeschlossen $\xRightarrow{U \text{ dicht}} h^{-1}(\Delta_Y(Y)) = X \Rightarrow h(X) \subseteq \Delta_Y(Y) \Rightarrow \forall\, y \in h(X) : p_1(y) = p_2(y)$. Für alle $x \in X$ gilt $f(x) = p_1(h(x)) = p_2(h(x)) = g(x) \Rightarrow$ topologisch: $f = g$

Noch zu zeigen: $f^\# = g^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, beziehungsweise $f^\# - g^\# = 0$

Behauptung: Für alle $V \subseteq Y$ offen, affin, $W \subseteq f^{-1}(Y)$ offen, affin gilt $f = g : W \to V \Rightarrow f = g$

Denn: $Y = \bigcup_{i\in I} V_i$ affine, offene Überdeckung, $V' \subseteq Y$ offen, $S \in \mathcal{O}_Y(V')$

$t := (f^\#_{V'} - g^\#_{V'})(S) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V')) = 0 \Leftrightarrow t_i := t|_{f^{-1}(V_i \cap V')} = 0\ \forall\, i \in I$, $f^{-1}(V_i \cap V') = \bigcup W_j$ offen, affin. Nach Voraussetzung: $f = g : W_j \to V_i \cap V' \Rightarrow t_i|_{W_j} = (f^\#|_{W_j} - g^\#|_{W_j})(S) = 0 \xRightarrow{\text{Garbe}} t_i = 0$

Sei also Œ $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} A$. Seien $\varphi, \psi : A \to B$ Ringhomomorphismen zu f, g, $f|_U = g|_U$ als Garbenmorphismus $\Rightarrow$ für alle $\mathfrak{p} \in U$ ist $\varphi_\mathfrak{p} = \psi_\mathfrak{p} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_\mathfrak{p}$

Sei $a \in A$. *Annahme:* $\varphi(a) \neq \psi(a)$

Behauptung: $D(\varphi(a) - \psi(a)) = \emptyset$, sonst $U \cap D(\varphi(a) - \psi(a)) \neq \emptyset$, enthält q

$\Rightarrow 0 = \varphi_q(\frac{a}{1}) - \psi_q(\frac{a}{1}) = \frac{\varphi(a)-\psi(a)}{1} \in B_q \Leftrightarrow t \notin q : \underset{\notin q}{t}\underbrace{(\varphi(a) - \psi(a))}_{\notin q} = \underset{\in q}{0} \in B \lightning$

$\xRightarrow[\text{Aufg. 1}]{\text{Blatt 4}} \varphi(a) - \psi(a) \in \sqrt{0} \overset{B \text{ red.}}{=} \{0\}$

b) X aus Aufgabe 2 ist nicht separiert $\rightsquigarrow$ wähle das X als Y

$\Rightarrow Y = U \cup V$, $f : \operatorname{Spec} k[x] \xrightarrow{\sim} U$, $g : \operatorname{Spec} k[x] \xrightarrow{\sim} V$

$D(X) \xrightarrow{f|_{D(X)}} U \cap V \xrightarrow{g^{-1}|_{U\cap V}} D(X)$ ist Identität $\Rightarrow f \equiv g$ auf $D(X) \subseteq \operatorname{Spec} k[x]$ offen dicht, aber $f((x)) \neq g((x))$.

In der Übung hat noch ein Beispiel dafür gefehlt, dass die Aussage aus a) nicht gilt, falls X nicht reduziert ist.

Ist $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy, y^2)$, $Y = \operatorname{Spec} k[x,y]$ und seinen $\overline{x}$ und $\overline{y}$ die Restklassen von x und y in $k[x,y]/(xy,y^2)$. Dann sind

$$\varphi : k[x,y] \to k[x,y]/(xy,y^2)\ , \quad x \mapsto \overline{x}\ , \quad y \mapsto \overline{y}$$

und

$$\psi : k[x,y] \to k[x,y]/(xy,y^2)\ , \quad x \mapsto \overline{x}\ , \quad y \mapsto 0$$

zwei unterschiedliche Ringhomomorphismen, liefern also unterschiedliche Schemamorphismen

$$f : \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy,y^2) \to \operatorname{Spec} k[x,y]$$

und

$$g : \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy,y^2) \to \operatorname{Spec} k[x,y].$$

Diese sind beide abgeschlossene Einbettungen mit Bild jeweils $V(xy,y^2) = V(y) \subset \operatorname{Spec} k[x,y]$, also die “$x$-Achse” in der affinen Ebene. Weiter ist $D(x) \cap V(y)$ offen und dicht in $V(y)$, also auch $D(\overline{x}) = f^{-1}(D(x)) = g^{-1}(D(x)) \subset \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy,y^2)$ offen und dicht. Wir behaupten dass f und g auf $D(\overline{x})$ übereinstimmen. Dazu reicht es, zu zeigen, dass die induzierten Morphismen

$$\varphi_x = \psi_x : k[x,y,x^{-1}] \to (k[x,y]/(xy,y^2))_{\overline{x}}$$

übereinstimmen. Aber in $(k[x,y]/(xy,y^2))_{\overline{x}}$ gilt $\overline{xy} = 0$ und $0 = \overline{x}^{-1}\overline{xy} = \overline{y}$, also stimmen φ_x und ψ_x auf x und y – und damit überall – überein.

Übung 8 vom 19. Juni 2012

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeige, dass für Morphismen von noetherschen Schemata gilt:

a) Die Verkettung von separierten Morphismen ist separiert.

b) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Schemamorphismen. Ist $g \circ f$ separiert, so auch f.

c) Die Eigenschaft, separiert zu sein, ist stabil unter Basiswechsel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Zeige: Ist $Y \subset \mathbb{P}^2(k)$ eine irreduzible Kurve und $y \in \mathbb{P}^2_k$ ihr generischer Punkt, so ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k,y}$ ein diskreter Bewertungsring.

b) Finde eine irreduzible quasiprojektive Fläche X über k und eine irreduzible Kurve $Y \subset X$ mit generischem Punkt $y \in t(X)$, so dass $\mathcal{O}_{t(X),y}$ kein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei X ein Schema von endlichem Typ über einem Körper k, d.h. $X \to \operatorname{Spec} k$ ist von endlichem Typ. Zeige:

a) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Körpererweiterung $\kappa(x)/k$ endlich ist. Hierbei sei $\kappa(x)$ der Restklassenkörper im Punkt x.

b) Die abgeschlossenen Punkte von X sind dicht in X.

c) Wenn X nicht von endlichem Typ über einem Körper ist, dann stimmen a) und b) im Allgemeinen nicht.

Hinweis: Erinnere dich an die algebraische Version von Hilberts Nullstellensatz.

Lösung 1

a) *Zu zeigen:* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ separiert $\Rightarrow$ $g \circ f$ separiert. Sei R diskreter Bewertungsring, $R = \operatorname{Quot}(R)$, $U = \operatorname{Spec} k$, $T = \operatorname{Spec} R$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "h_0"] \arrow[dd] & X \arrow[d, "f"] \\
 & Y \arrow[d, "g"] \\
T \arrow[r, "h_1"'] \arrow[uur, dashed, shift left, "h"] \arrow[uur, dashed, shift right, "\tilde{h}"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Bewertungsdiagramm von $f \circ g$.
Sind $h, \tilde{h} : T \to X$ mit $h \circ i = \tilde{h} \circ i = h_0$ und $g \circ f \circ h = g \circ f \circ \tilde{h} = h_1$

g separiert $\Rightarrow f \circ h = f \circ \tilde{h}$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f \circ h = f \circ \tilde{h}"'] \arrow[ur, shift left, "h"] \arrow[ur, shift right, "\tilde{h}"'] & Y
\end{tikzcd} \quad \xRightarrow{f \text{ sep.}} h = \tilde{h}$$

b) *Zu zeigen:* $g \circ f$ separiert $\Rightarrow$ f separiert

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[rru, "h"] \arrow[rru, dashed, "\tilde{h}"'] \arrow[rr, "h_1"'] \arrow[rrd, "g \circ h_1"'] & & Y \arrow[d, "g"] \\
& & Z
\end{tikzcd}
\quad \overset{g \circ f \text{ sep.}}{\Longrightarrow} h = \tilde{h}$$

c) $f : X \to Y$, $g : Y' \to Y$

$$\overset{f \text{ sep.}}{\Longrightarrow} \mathrm{pr}_X \circ h = \mathrm{pr}_X \circ \tilde{h}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "h_0"] \arrow[d] & X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"'] \arrow[ur, bend right] \arrow[urr, bend left, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[r] \arrow[r, "h_1"'] & Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

UAE $X \times_Y Y'$: $\exists! \to$, $h, \tilde{h}$ gehen als $\to$ $\Rightarrow h = \tilde{h} \Rightarrow$ Behauptung

Lösung 2

k algebraisch abgeschlossener Körper

a) $Y \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ irreduzible Kurve, $y \in \mathbb{P}^2_k = t(\mathbb{P}^2(k))$ ihr generischer Punkt. *Zu zeigen:* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k, y}$ ist diskreter Bewertungsring, das heißt noethersch, nullteilerfrei, 1-dimensional, regulär.

Proj$(k[X_0, X_1, X_2]) = \mathbb{P}^2_k$ wird überdeckt von

$$\begin{tikzcd}
D_f(X_0) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \cup & D_f(X_1) & \cup & D_f(X_2) \\
\mathrm{Spec}(k[\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}]) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & & & & \\
\mathbb{A}^2_k \arrow[uurr, bend right, "\sim"'] \arrow[uurrrr, bend right, "\sim"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \text{Wähle offene affine Umgebung } V \cong \mathbb{A}^2_k \text{ von } y \Rightarrow y \in \begin{array}{c} \mathrm{Spec}(k[X_1, X_2]) \\ \updownarrow t \\ U \cong \mathbb{A}^2(k) \end{array}$$

$\underbrace{Y \cap U}_{V(f)} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ ist irreduzible Kurve in $\mathbb{A}^2(k)$, $f \neq 0$, f irreduzibel

$\{y\}$ liegt dicht in $Y \Rightarrow \forall\, U \subseteq \mathbb{A}^2_k$ offen: $U \cap \{y\} \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap Y \neq \emptyset$ (*)

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k, y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k, y} = \varinjlim_{\substack{Y \subseteq U \subseteq \mathbb{A}^2_k \\ \text{offen}}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k}(U) \overset{(*)}{=} \varinjlim_{\substack{Y \cap\ U \neq \emptyset \\ =V(f)}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k}(U) = \varinjlim_{\substack{D(g) \cap V(f) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow (g) \notin (f)}} = \lim_{g \notin (f)} k[X_1, X_2]_g = k[X_1, X_2]_{(f)}$$

- $\dim k[X_1, X_2]_{(f)} = \mathrm{ht}((f)) = 1$ ✓
- nullteilerfrei (nullteilerfreie Ring wurde lokalisiert) ✓
- noethersch (noetherscher Ring wurde lokalisiert) ✓
- lokal (lokalisiert) ✓
- regulär ✓

b) *Finde:* X irreduzible Fläche über k, $Y \subseteq X$ irreduzible Kurve mit generischem Punkt $y \in t(X)$, sodass $\mathcal{O}_{t(X),y}$ kein diskreter Bewertungsring ist.
Sei $X = V(y^2 - x^3 + x^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ und $Y = V(X, Y) \subseteq X \rightsquigarrow \operatorname{Spec}(k[Z]) = t(Y) \hookrightarrow t(X) = \operatorname{Spec}\left(k[X,Y,Z]/(y^2 - x^3 + x^2)\right)$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(k[Z]) = t(Y) & \hookrightarrow & t(X) = \operatorname{Spec}\left(k[X,Y,Z]/(y^2 - x^3 + x^2)\right) \\ \uparrow \,\Psi & \begin{array}{ccc} 0 & \leftarrow\!\shortmid & x \\ 0 & \leftarrow\!\shortmid & y \\ z & \leftarrow\!\shortmid & z \end{array} & \uparrow \,\Psi \\ (0) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

$\overset{\text{wie in}}{\underset{\text{a)}}{\rightsquigarrow}}$ $\mathcal{O}_{t(X),(x,y)} \cong \left(k[X,Y,Z]/(y^2 - x^3 + x^2)\right)_{(x,y)}$
Zeige: nicht regulär
Restklassenkörper: $\tilde{k} = \mathcal{O}_{t(X),(x,y)}/(x,y) \cdot 0 \ldots = k(z)$
$m = (x,y), m/m^2 = (x,y)/(x^2, xy, y^2)$, x, y sind i. u. über $\tilde{k}$ in $\mathcal{O}_{t(X),(x,y)} \Rightarrow \dim_{\tilde{k}} m/m^2 \geq 2$, aber $\dim \mathcal{O}_{t(X),(xy)} = 1$ ↯

Lösung 3
$X \to \operatorname{Spec} k$ von endlichem Typ $\Rightarrow \exists$ offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, A_i endlich erzeugte k-Algebren

a) *Zu zeigen:* $x \in X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow K(x)|k$ endliche Körpererweiterung
(*) **Behauptung:** x abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall\, i \in I : \{x\} \cap U_i$ abgeschlossen
„$\Rightarrow$“: $\exists\, i \in I : x \in U_i = \operatorname{Spec} A_i$
x abgecshlossen in $U_i \Rightarrow x$ maximales Ideal
$K(x) = A_{ix}/x \cdot A_X \cong \left(A_i/x\right)_{A_i/x \setminus \{0\}} \overset{x \text{ max.}}{=} A_i/x$
$\overset{\text{HNS}}{\Longrightarrow}$ Körpererweiterung ist algebraisch ($\rightsquigarrow$ endlich)
„$\Leftarrow$“: Behauptung $\rightsquigarrow$ bleibt zu zeigen: $\forall\, i \in I : \{x\} \cap U_i$ abgeschlossen
- •) $x \notin U_i \Rightarrow \{x\} \cap U_i = \emptyset$ ist abgeschlossen ✓
- •) $x \in U_i : x = p \in \operatorname{Spec} A_i$
$k \hookrightarrow A_i/p \hookrightarrow K(x)$ endliche Körpererweiterung $\Rightarrow$ algebraische
Behauptung: A_i/p Körper
$r \in A_i/p \setminus \{0\} \Rightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}_0, a_i \in k, a_0 \neq 0$ mit
$$r^d + a_{d-1} r^{d-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$
$\Rightarrow \frac{1}{r} = -\frac{1}{a_0}(r^{d-1} + a_{d-1} \cdot r^{d-2} + \ldots + a_1) \in A_i/p \Rightarrow r \in (A_i/p)^\times \Rightarrow$ Behauptung
$\Rightarrow p$ maximales Ideal $\Rightarrow \{p\}$ abgeschlossen

Beweis von (*): „$\Leftarrow$“: $X \setminus \{x\} = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i \setminus \{x\}}_{\text{offen}}$ offen

b) abgeschlossene Punkte liegen dicht

Zeige: Für eine Basis der Topologie: Jede Basismenge enthält abgeschlossene Punkte $D(f) \subseteq U_i \subseteq X$ offen, affin bilden Basen.

Sei also $\operatorname{Spec}(A_{if}) = D(f) \subseteq U_i \subseteq X$ offen. $X \to \operatorname{Spec} k$ von endlichem Typ $\Rightarrow A_i$ endlich erzeugte k-Algebra, $R := A_{if}$ endlich erzeugte k-Algebra. R enthält maximales Ideal m. $\xRightarrow{\text{HNS}} K(x) = R/m$ ist endliche Körpererweiterung $\xRightarrow{\text{(a)}} m$ bgeschlossener Punkt.

c) Gegenbeispiel zu a):

„$\Rightarrow$“: $X = \operatorname{Spec} k(t)$, $k \hookrightarrow k(t)$ induziert $X \to \operatorname{Spec} k$, $(0) \in \operatorname{Spec} k(t)$ ist abgeschlossen, aber $K((0)) = k(t)$ ist nicht endlich über k.

„$\Leftarrow$“: Gilt nicht über $\operatorname{Spec} k$, aber $X = \operatorname{Spec} k[s] \to \operatorname{Spec} k[t], s^2 \leftarrow\!\shortmid t \Rightarrow (0) \in X$ nicht abgeschlosen. $K_X((0)) = k(t) \to K_Y((0)) = k(s), t \mapsto s^2$ hat Grad 2.

Gegenbeispiel zu b): $k[t]_{(f)}$, $f \neq 0$ irreduzibel

Allgemein: R diskreter Bewertungsring:

- offene Mengen in $\operatorname{Spec} R$: $\{\emptyset, \{(0)\}, \operatorname{Spec} R\}$
- abgeschlossene Mengen in $\operatorname{Spec} R$: $\{\emptyset, m, \operatorname{Spec} R\}$
- abgeschlossene Punkte: $m, \{\overline{m}\} = \{m\} \neq \operatorname{Spec} R \rightsquigarrow$ nicht dicht

Übung 9 vom 26. Juni 2012

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ heißt **quasi-endlich**, wenn $f^{-1}(y)$ für alle $y \in Y$ eine endliche Menge ist.

Finde ein Beispiel für einen Schemamorphismus $f\colon X \to Y$, so dass

a) f lokal von endlichem Typ, aber nicht von endlichem Typ ist.

b) f von endlichem Typ, aber nicht endlich ist.

c) f quasi-endlich, aber nicht endlich ist.

d) f eigentlich, aber nicht endlich ist.

e) f quasi-endlich, aber nicht lokal von endlichem Typ ist.

f) f von endlichem Typ, aber nicht quasi-endlich ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ heißt **projektiv**, wenn es für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ein kommutatives Diagramm
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$
gibt, in dem i eine abgeschlossene Einbettung ist.

Dabei sei $\mathbb{P}^n_Y := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} Y$.

Zeige:

a) Ist $Y = \mathrm{Spec}(R)$ affin, so ist $\mathbb{P}^n_Y \cong \mathbb{P}^n_R$.

b) Die Komposition von projektiven Morphismen ist projektiv.

c) Abgeschlossene Einbettungen sind projektiv.

d) Projektiv zu sein ist stabil unter Basiswechsel.

e) Projektive Morphismen noetherscher Schemata sind eigentlich.

Hinweis: Erinnere dich an die Segre-Einbettung von Blatt 7, Aufgabe 4, aus der Algebraischen Geometrie I.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Zeige:

a) Für jedes $f \in k(X)^\times$ ist $\mathcal{L}(\mathrm{div}(f))$ isomorph zu $\mathcal{O}_X$.

b) Für jeden Divisor D auf X gibt es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ und rationale Funktionen $f_i \in k(X)$, sodass $\mathcal{L}(D)(U_i) = \frac{1}{f_i}\mathcal{O}_X(U_i)$ für jedes $i \in I$ gilt.

c) Für je zwei Divisoren D_1 und D_2 auf X ist $\mathcal{L}(D_1 + D_2)$ isomorph zu $\mathcal{L}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)$.

Lösung 1
Schemamorphismus $f : X \to Y$ quasi-endlich $\Leftrightarrow \forall y \in Y : |f^{-1}(y)| < \infty$

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{eigentlich} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow, "/" marking, "d)"'] & \\
\text{quasi-endlich} \arrow[r, Rightarrow, bend left, "/" marking, "c)"] \arrow[rrr, Rightarrow, bend right=40, "/" marking, "e)"'] & \text{endlich} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{von endlichem Typ} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "/" marking, "b)"] \arrow[ll, Rightarrow, bend left=50, "/" marking, "f)"] \arrow[r, Rightarrow] & \text{lokal von endlichem Typ} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "/" marking, "a)"]
\end{tikzcd}$$

a) $Y = \operatorname{Spec} k$, $X = \dot{\bigcup\limits_{i \in N}} \operatorname{Spec} k[t]$, $k \hookrightarrow k[t]$ induziert $f : X \to Y$. f ist lokal von endlichem Typ. $X = \operatorname{Spec}(\underbrace{\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} k[t]}_{\substack{\text{nicht endl.} \\ \text{erz. über } k}})$

b) f von endlichem Typ, aber nicht endlich.
$X = \operatorname{Spec} k[t]$, $Y = \operatorname{Spec} k$, $k \hookrightarrow k[t]$ induziert $f : X \to Y$, $f^{-1}(Y) = \operatorname{Spec} k[t]$, $k[t]$ nicht endlich erzeugt als k-Modul.

c) Sei $L|K$ unendliche Körpererweiterung. $\Rightarrow L$ ist nicht endlich erzeugt als k-Modul $\Rightarrow f : \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k$ nicht endlich. $f^{-1}(\operatorname{Spec} k) = \operatorname{Spec} L$ ist endlich.

d) $f : \mathbb{P}^n_k \to \operatorname{Spec} k$ ist eigentlich, $f^{-1}(\operatorname{Spec} k) = \mathbb{P}^n_k$ ist nicht affin.

e) Beispiel aus c): L ist nicht endlich erzeugt als k-Algebra.

f) Beispiel aus b): $f^{-1}(\operatorname{Spec} k) = \operatorname{Spec} k[t]$ ist unendlich.

Anmerkungen zur Lösung: Die Aufgabe haben wir in der Übung bereits gelöst. Da aber die Diskussion zu der Lösung zu einem falschen Ende gekommen ist, hier noch eine Anmerkung:

In der Definition von quasi-endlich ist mit $f^{-1}(y)$ die Faser (als Schema) über y gemeint. In meinen Gegenbeispielen für c), e), f) hatte ich immer $Y = \operatorname{Spec} k$, also Y einelementig, gewählt. Auf Übungsblatt 6 Aufgabe 2 haben wir aber schon eingesehen, dass $f^{-1}(Y)$, aufgefasst als topologischer Raum, homöomorph zum Urbild von Y unter f ist, wenn wir f als stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y auffassen. In meinen Gegenbeispielen gab es daher keinen Unterschied zwischen „topologisches urbild nehmen“ und „Ausrechnen der Faser mit anschließendem Vergessen der Strukturgarbe“.

Lösung 2

$f : X \to Y$ projektiv $:\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] \arrow[dl, phantom, "///"] \\ & Y \end{tikzcd}$, i abgeschlossene Einbettung.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\
\operatorname{Proj}(\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_n]) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

a) *Zu zeigen:* $Y = \operatorname{Spec} R \Rightarrow \mathbb{P}^n_Y \cong \mathbb{P}^n_R$

$D_+(X_i) \cong \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}] \cong \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ überdecken $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$

$\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}_n \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}] \otimes_{\mathbb{Z}} R) = \operatorname{Spec}(R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]) = \mathbb{A}^n_R$

$\Rightarrow \mathbb{P}^n_Y = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times \operatorname{Spec} R \cong \mathbb{P}^n_R$

b) **Behauptung 1:** Abgeschlossene Einbettung zu sein ist stabil unter Basiswechsel.

Beweis: Sei $i : X \hookrightarrow Y$ abgeschlossene Einbettung, $g : Z \to Y$

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d, "i'"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & X \arrow[d, "i"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Zu zeigen: i' ist abgeschlossene Einbettung
i' ist injektiv ✓ (Monotonie, UAE)

Sei Œ X, Y, Z affin, $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} S$, $Z = \operatorname{Spec} 1$.

$$\begin{tikzcd} R \otimes_S T & R \arrow[l] \\ T \arrow[u] & S \arrow[l] \arrow[u, two heads] \arrow[ul, phantom, "///"] \end{tikzcd}$$

R wird als S-Modul von 1 erzeugt $\Rightarrow \{1 \otimes t \mid t \in T\}$ erzeugt $R \otimes_S T$ als S-Modul.

$\Rightarrow \begin{array}{ccc} T & \to & R \otimes_S T \\ t & \mapsto & 1 \otimes t \end{array}$ surjektiv

Seien also $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ projektiv und m, n die natürlichen Zahlen, für die es eine abgeschlossene Einbettungen $i \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y$ bzw. $i' \colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}^m_Z$ gibt, über die f bzw. g faktorisiert.

Betrachte das Faserprodukt von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_Z$ und Y über $\mathbb{P}^m_Z$. Da für Schemata allgemein $A \times_B B = B$ und $(A \times_R B) \times_S C = A \times_R (B \times_S C)$ gilt, gilt auch $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_Z \times_{\mathbb{P}^m_Z} Y \cong \mathbb{P}^n_Y$. Somit ist das obere rechte Viereck im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_Z \arrow[d] \\ & Y \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{P}^m_Z \arrow[d, "\mathrm{pr}_Z"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt und nach Behauptung 1 ist damit $\tilde{i}$ eine abgeschlossene Einbettung.

Weiter erinnern wir uns an die Segre-Einbettung $\Psi \colon \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k) \to \mathbb{P}^N(k)$ mit $N = (n+1)(m+1) - 1$ von Übungsblatt 7 Aufgabe 3 aus der Algebraischen Geometrie I. Dort haben wir gelernt, dass das Bild abgeschlossen in $\mathbb{P}^N(k)$ ist, nämlich $V(J)$ für ein J, das wir konkret angegeben hatten. Nun kann man sich klar machen, dass die durch J gegebenen Gleichungen alle schon über $\mathbb{Z}$ definiert sind und die Konstruktion somit auch über $\mathbb{Z}$ klappt. Alternativ (da wir das Tensorprodukt dieses Semester nicht mehr scheuen) definieren wir in Analogie zu Ψ einen Schemamorphismus $\Psi' \colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}$ lokal auf $D_+(x_r) \times D_+(y_s)$ durch den surjektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\frac{z_{ij}}{z_{rs}} \mid (i,j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\frac{x_0}{x_r}, \dots, \frac{x_n}{x_r}] \otimes \mathbb{Z}[\frac{y_0}{y_s}, \dots, \frac{y_m}{y_s}] \\ \frac{z_{ij}}{z_{rs}} & \mapsto & \frac{x_i}{x_r} \otimes \frac{y_j}{y_s} \end{array}.$$

Aus der lokalen Darstellung von Ψ' folgt sofort, dass Ψ' eine abgeschlossene Einbettung ist.

Basiswechsel mit dem Morphismus $\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}}$ liefert $j\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \times Z \to \mathbb{P}^N_Z$. Nach Behauptung 1 ist j wieder eine abgeschlossene Einbettung. Die Komposition von abgeschlossenen Einbettungen ist eine abgeschlossene Einbettung, also ist $j \circ \tilde{i} \circ i$ eine abgeschlossene Einbettung und das folgende kommutative Diagramm beweist, dass $g \circ f$ ein projektiver Morphismus ist.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_Z \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & \mathbb{P}^N_Z \arrow[dl, "\mathrm{pr}_Z"] \\
& Y \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{P}^m_Z \arrow[d, "\mathrm{pr}_Z"] & \\
& & Z &
\end{tikzcd}$$

c) *Zu zeigen:* abgeschlossene Einbettungen sind projektiv
$\mathbb{P}^0_{\mathbb{Z}} \cong \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \Rightarrow Y \cong Y \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \cong Y \times \mathbb{P}^0_{\mathbb{Z}} = \mathbb{P}^0_Y$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "i"] & Y \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{P}^0_Y \arrow[l, bend left, "\sim", "\mathrm{pr}_Y"']
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f$ projektiv

d) Sei $f\colon X \to Y$ projektiv und $g\colon Y' \to Y$ ein beliebiger Schemamorphismus (der Basiswechsel).

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Y' \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_Y"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y &
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen ist nun, dass auch f' projektiv ist.

Dazu machen wir uns klar, dass $\mathbb{P}^n_{Y'} = \mathbb{P}^n_Y \times_Y Y'$ und, dass $\mathbb{P}^n_{Y'} \times_{\mathbb{P}^n_Y} X = Y' \times_Y X$. Dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Y' \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dd, bend left=60, "f"] \\
\mathbb{P}^n_{Y'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{Y'}"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"'] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Der Morphismus i ist nach Voraussetzung eine abgeschlossene Einbettung, nach Behauptung 1 also auch i'. Die beiden inneren Vierecke sind Faserprodukte und somit auch das äußere Viereck. Damit gilt $\mathrm{pr}_{Y'} \circ i' = f'$ und f' ist ein projektiver Schemamorphismus.

e) Seinen X, Y noethersche Schemata und $f\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus. Wir zeigen, dass $f = \mathrm{pr}_Y \circ i$ eigentlich ist.

Nach Proposition 8.10 ist $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ eigentlich. Alle beteiligten Schemata sind noethersch, also ist nach Folgerung 8.9. „eigentlich“ stabil unter Basiswechsel und pr_Y eigentlich.

Abgeschlossene Einbettungen sind nach Bemerkung 8.4 separiert und nach Bemerkung 7.6 endlich (also insbesondere von endlichem Typ). Nach Behauptung 1 ist eine abgeschlossene Einbettung auch universell abgeschlossen. Damit ist i eigentlich.

Die Komposition von eigentlichen Morphismen ist eigentlich und somit ist f eigentlich.

Lösung 3

X nichtsinguläre projektive Kurve über algebraisch abeschlossenem Körper $k \Rightarrow \forall p \in X$: $\mathcal{O}_{X,p}$ ist diskreter Bewertungsring

a) *Zu zeigen:* $\forall f \in k(X)^\times : \mathcal{L}(\operatorname{div}(f)) \cong \mathcal{O}_X$

$\operatorname{div}(f) = \sum\limits_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p$

$$\mathcal{L}(\operatorname{div}(f)) = \{g \in k(X)^\times | \underbrace{\operatorname{div} g + \operatorname{div} f \geq 0}_{\substack{\Leftrightarrow \operatorname{div}(g \cdot f) \geq 0 \\ \Rightarrow g \in \mathcal{L}(\operatorname{div}(f)) \Leftrightarrow g \cdot f \in \mathcal{O}_X(U)}} \} \cup \{0\}$$

b) $D = \sum_{p \in X} e_p \cdot p$, $P = \{p \in X | e_p \neq 0\} = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Sei $U \subseteq X$ offen, $|U \cap P| \leq 1 \rightsquigarrow$ solche U überdecken X.

Zu zeigen: $\mathcal{L}(D)(U) \cong \mathcal{O}_X(U)$

1. Fall: $U \cap P = \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{L}(D)(U) = \{g \in k(X)^\times | \forall\, p \in U : \operatorname{ord}_p(g) \geq 0\} \cup \{0\} = \mathcal{O}_X(U)$

2. Fall: $U \cap P = \{p_i\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(D)(U) = \{g \in k(X) | \forall\, q \in U, q \neq p_i : \operatorname{ord}(g) \geq 0 \text{ und } \operatorname{ord}_{p_i}(g) + e_{p_i} \geq 0\}$

Wähle Uniformisierende t_i von $\mathcal{O}_{X,p_i} \Rightarrow \operatorname{ord}_{p_i}(t_i) = 1$. Mache U eventuell kleiner, so dass $\operatorname{ord}_q(t_i) = 0\ \forall\, q \in U \setminus \{p_i\}$.

$\Rightarrow \operatorname{ord}_{p_i}(t_i^{e_{p_i}} g) = e_{p_i} \cdot \underbrace{\operatorname{ord}_{p_i}(t_i)}_{=1} + \operatorname{ord}_{p_i}(g))\ \forall\, q \in U \setminus \{p_i\} : \operatorname{ord}_q(t_i^{e_{p_i}} g) = \operatorname{ord}_q(g)$

$\Rightarrow g \in \mathcal{L}(D)(U) \Leftrightarrow t_i^{e_{p_i}} \cdot g \in \mathcal{O}_X(U) \Leftrightarrow g \in \frac{1}{t_i^{e_{p_i}}} \cdot \mathcal{O}_X(U)$

c) *Zeige:* $\mathcal{L}(D_1 + D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)$

$\mathcal{L}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)(U)$ ist garbenassoziiert zu $U \mapsto \mathcal{L}(D_1)(U) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)(U)$. Wähle Überdeckung $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ wie in b). Auf U_i sei t_i Uniformisierende.

$\Rightarrow \mathcal{L}(D_1)(U_i) = \frac{1}{t_i^{e_{p_i}}} \mathcal{O}_X(U_i)$, $\mathcal{L}(D_2)(U_i) = \frac{1}{t_i^{\tilde{e}_{p_i}}} \mathcal{O}_X(U_i)$ $(D_1 = \sum e_p \cdot p,\ D_2 = \sum \tilde{e}_p \cdot p)$

$$\mathcal{L}(D_1 + D_2)(U) = \frac{1}{t_i^{e_{p_i} + \tilde{e}_{p_i}}}$$

$\Rightarrow$ lokal haben wir Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(D_1)(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{L}(D_2)(U_i) & \to & \mathcal{L}(D_1 + D_2)(U_i) \\ \frac{f}{t_i^{e_p}} \otimes \frac{g}{t_i^{\tilde{e}_p}} & \mapsto & \frac{fg}{t_i^{e_p + \tilde{e}_p}} \\ h(\frac{1}{t_i^{e_p}} \otimes \frac{1}{t_i^{\tilde{e}_p}}) & \leftarrow\!\shortmid & \frac{h}{t_i^{e_p + \tilde{e}_p}} \end{array}$$

Übung 10 vom 3. Juli 2012

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf U. Ist $j\colon U \hookrightarrow X$ die Inklusion, so ist die ***durch Null fortgesetzte Garbe***, $j_!(\mathcal{F})$, definiert als die zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{für } V \subseteq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziierte Garbe auf X.

Sei nun X ein Schema und $U \neq X$ ein offenes, dichtes Unterschema von X.
Zeige, dass $j_!(\mathcal{O}_U)$ nicht quasikohärent ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien X und Y noethersche Schemata und $f\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus.

a) Zeige: Ist $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so ist $f_*(\mathcal{F})$ eine kohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe.
b) Finde ein Beispiel dafür, dass a) selbst für Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k falsch ist, wenn f nicht endlich ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X. Zeige:

a) Die Garbe $\mathcal{F}$ ist genau dann lokal frei, wenn für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{F}_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist.
b) Ist A ein lokaler Ring und sind M und N endlich erzeugte A-Moduln mit $M \otimes_A N \cong A$, dann gilt $M \cong A \cong N$.

   Hinweis: Lemma von Nakayama
c) Gibt es eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$, so ist $\mathcal{F}$ lokal frei vom Rang 1, d.h. invertierbar.

Lösung 1
X top. Raum, $U \subseteq X$, $\mathcal{F}$ Garbe auf U, $j : U \hookrightarrow X$, Prägarbe $\mathcal{P} : V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & , V \subseteq U \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \rightsquigarrow$ assoziierte Garbe $j_!(\mathcal{F})$

X Schema, $U \subseteq X$ offen, dicht, $U \neq X$

Zu zeigen: $j_!(\mathcal{O}_U)$ nicht quasikohärent

Sei $\operatorname{Spec} R \cong V \subseteq X$ offen, affin, irreduzibel, $V \nsubseteq U$ (existiert, da $U \neq X$). U dicht $\Rightarrow V \cap U \neq 0$. Sei $x \in U \cap V \rightsquigarrow x \in \operatorname{Spec} R \Rightarrow \mathcal{O}_{U,x} = R_X$

$$j_!(\mathcal{O}_U)_X = \mathcal{O}_{U \cap V,x} = \mathcal{O}_{U,x} = R_X$$

Annahme: $j_!(\mathcal{O}_U)$ ist quasikohärent

$\Rightarrow j_!(\mathcal{O}_U)|_V = \widetilde{j_!(\mathcal{O}_U)(V)}$ (die Tilde geht über den ganzen Term)

Sei $s \in j_!(\mathcal{O}_U)(V)$, $x \in V \setminus U$. Für alle U_x Umgebung von x gilt $\mathcal{P}(U_x) = 0$

$\Rightarrow j_!(\mathcal{O}_U)_X = 0$

$\Rightarrow s_X = 0$

$\Rightarrow \exists\ U_x \subseteq V$ offene Umgebung von x mit $s|_{D(f)} = 0$, insbesondere gibt es $f \in R \setminus \{0\}$ mit $s|_{D(f)} = 0 \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N} : f^n \cdot s = 0 \xRightarrow[R \text{ nullteilerfrei}]{f \neq 0} s = 0$

$\Longrightarrow j_!(\mathcal{O}_U)|_V \equiv 0 \lightning$

Lösung 2

X, Y noethersche Schemata, $f : X \to Y$ endlich

a) *Zu zeigen:* $\mathcal{F}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\Rightarrow f_*(\mathcal{F})$ kohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe

$\mathcal{F}$ kohärent $:\Leftrightarrow X$ noethersch und für alle $\overset{=\operatorname{Spec} R}{U} \subseteq X$ offen, affin gibt es endlich erzeugten R-Modul M_U mit $\mathcal{F}|_U = \tilde{M}_U$

Sei $\operatorname{Spec} S \cong V \subseteq Y$ offen, affin. $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} R$ affin, offen in X, R endlich erzeugter S-Modul (S-Modul durch f).

$\mathcal{F}$ kohärent $\Rightarrow \exists$ endlich erzeugter R-Modul N mit $\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)} = \tilde{N}$, $f|_{f^{-1}(V)} : \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} S$, $\rightsquigarrow \alpha : S \to R$

Bemerkung 9.7 $\Rightarrow f_*\tilde{N} =_\alpha \tilde{N}$, wobei ${}_\alpha N = N$, aufgefasst als S-Modul durch α.

N endlich erzeugter R-Modul, R endlich erzeugter S-Modul $\Rightarrow_\alpha N$ endlich erzeugter S-Modul

$\Rightarrow f_*\mathcal{F}|_V = f_*\tilde{N} =_\alpha \tilde{N} \Rightarrow f_*\mathcal{F}$ kohärent

b) $k \hookrightarrow k[x]$, $k[x]$ nicht endl. erzeugbar als k-Modul $\Rightarrow f : \underbrace{\operatorname{Spec} k[x]}_{X} \to \underbrace{\operatorname{Spec} k}_{Y}$ nicht endlich

$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \Rightarrow \mathcal{F}$ kohärent ✓

$f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{F}(X) = k[x] \to$ nicht kohärent

Lösung 3

X noethersches Schema, $\mathcal{F}$ kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modulring

a) *Zu zeigen:* $\mathcal{F}$ lokal frei $\Leftrightarrow \forall\, x \in X : \mathcal{F}_X$ ist freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul

Hier habe ich in der Übung einen Fehler gemacht (das mit dem von den Relationen erzeugten Untermodul macht leider doch keinen Sinn), daher hier noch einmal mein Weg (Jonathans gilt noch), in richtig:

„$\Rightarrow$“: ✓

„$\Leftarrow$“: Sei $U = \operatorname{Spec} R$ eine offene affine Umgebung von $x \in X$. Die Garbe $\mathcal{F}$ ist kohärent, also existiert ein endlich erzeugter R-Modul M, so dass $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$. Weiter ist $\mathcal{F}_x = M_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x} = R_x$-Modul. Wie in der Übung, wähle ich freie Erzeuger $[(U_1, s_1)], \dots, [(U_n, s_n)]$ von $\mathcal{F}_x$ als R_x-Modul. Da wir ohne Einschränkung U durch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ ersetzen können, gilt ohne Einschränkung $U = U_1 = \dots = U_n$. Dann können wir die s_i zu einem Erzeugendensystem $\{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+m}\}$ von M ergänzen. In $\mathcal{F}_x$ gilt $s_{n+j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} s_i$ mit $\alpha_{i,j} \in R_x$. Es gibt demnach eine offene affine Umgebung $V_j \subseteq U$ von x, auf der gilt $s_{n+j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} s_i$. Wieder schneiden wir diese (endlich vielen) V_j und finden im Schnitt eine offene, affine Umgebung V von x mit $\mathcal{F}|_V = \widetilde{N}$, wobei $N = \langle s_1|_V, \dots, s_n|_V \rangle_{R-Mod}$. Dieser Modul ist frei, den jede Relation in N würde eine Relation in $\mathcal{F}_x$ ergeben (wähle V irreduzibel - wie in Aufgabe 1), im Widerspruch dazu, das $M_x = N_x$ frei in den s_i ist.

b) *Zeige:* A lokaler Ring, M, N endlich erzeugte A-Moduln, $M \otimes_A N \cong A \Rightarrow M \cong N \cong A$

Sei m maximales Ideal von A, $k := {}^{A}\!/_{m}$

$$ {}^{A}\!/_{m} \otimes_A M \otimes_A N \cong {}^{A}\!/_{m} \otimes_A A = {}^{A}\!/_{m} = k $$

Behauptung: $k \otimes_A (M \otimes_A N) \cong (k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N)$

Denn: $a \otimes m \otimes n \mapsto (a \otimes m) \otimes (1 \otimes n)$

A-lineare Fortsetzung $\rightsquigarrow \varphi : k \otimes_A \ldots \to \ldots$

$(ab \otimes m) \otimes (1 \otimes n) = (a \otimes m) \otimes (b \otimes n) \Rightarrow \varphi$ surjektiv $\Rightarrow \dim_k (k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N) \leq 1$

Annahme: „$= 0$“

$\Rightarrow k \otimes_A M = 0$ oder $k \otimes_A N = 0$

Œ $k \otimes_A M = 0$ $(k \otimes_A M = {}^{A}\!/_{m} \otimes_A M = {}^{M}\!/_{mM})$

$\Rightarrow M = mM + 0 \xRightarrow{\text{Nakayama}} M = 0$

$\Rightarrow A = M \otimes_A N = 0 \lightning$

$\Rightarrow \dim_k (k \otimes_A M) = 0$

${}^{M}\!/_{mM} \cong {}^{A}\!/_{m} \xRightarrow{\text{Nakayama}} M \cong A$, $N \cong A$ analog

$M = mM + (X)$ A-Modul

c) *Zeige:* $\mathcal{G}$ kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X \Rightarrow \mathcal{F}$ lokal frei von Rang 1

$\underbrace{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x}_{=\mathcal{F}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_X} \cong \mathcal{O}_{X,x}$

$\overset{b)}{\Rightarrow} \mathcal{F}_X \cong \mathcal{O}_{X,x} \xRightarrow{\text{Bew. v. a)}} \mathcal{F}$ ist lokal frei von Rang 1.

Übung 11 vom 10. Juli 2012

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachte das integre Schema $X := \operatorname{Proj}(\, k[x,y,z]/(y^2z - x^3)\,)$.

a) Finde einen Primdivisor W auf X, für den ord_W keine diskrete Bewertung auf $k(X) = \operatorname{Quot}\mathcal{O}_{X,W}$ **mit Bewertungsring** $\mathcal{O}_{\mathbf{X,W}}$ ist.
b) Berechne den Hauptdivisor von $\frac{\overline{x}+\overline{y}}{\overline{z}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei X ein noethersches integres ~~separiertes~~ Schema. Sei weiter V eine echte abgeschlossene Teilmenge von X und $U := X \setminus V$. Zeige:

a) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cl}(X) & \to & \mathrm{Cl}(U) \\ \sum n_i Y_i & \mapsto & \sum n_i (Y_i \cap U) \end{array}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus. Dabei gehe die Summe auf der rechten Seite nur über die nichtleeren Schnitte $Y_i \cap U$.
b) Ist $\operatorname{codim}_X V \geq 2$, so ist die Abbildung in a) ein Isomorphismus.
c) Ist V irreduzibel und $\operatorname{codim}_X V = 1$, so ist die Sequenz

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U) \to 0$$

exakt. Dabei sei die erste Abbildung definiert durch $k \mapsto k \cdot V$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $R := k[x,y,z]/(xy - z^2)$ und $X := \operatorname{Spec}(R)$. Zeige:

a) X ist ein noethersches integres separiertes Schema, das nicht lokal faktoriell ist.
b) $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Hinweis: Benutze Aufgabe 2 c) mit $V := x$-Achse. Zeige: $2 \cdot V = \operatorname{div}(y)$, wobei y als rationale Funktion auf X aufgefasst wird. Benutze Proposition 11.3 und zeige, dass V kein Hauptdivisor ist.
c) $\mathrm{CaCl}(X) = 0$.
Hinweis: Cartier-Divisoren sind die Weil-Divisoren, die lokal Hauptdivisoren sind.

Lösung 1
$X = \operatorname{Proj}\left({}^{k[x,y,z]}\big/_{(y^2z - x^3)} \right)$

a) Finde Primdivisor W, so dass ord_W nicht diskrete Bewertung auf $k(X) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,W})$ mit Bewertungsring $\mathcal{O}_{X,W}$ ist.
Ein singlärer Punkt von X ist $(x,y) \widehat{=} (0:0:1)$. $W = \{(x,y)\}$ ist integres, abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1 $\rightsquigarrow$ Primdivisor $\rightsquigarrow$ affine Umgebung von W:

$$D_+(z) = \operatorname{Spec}\left({}^{k[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}]}\Big/_{\frac{y^2}{z^2} - \left(\frac{x}{z}\right)^3} \right) \cong \operatorname{Spec}\left({}^{k[x,y]}\big/_{y^2 - x^3} \right)$$

$$(*) \qquad \pi : R \twoheadrightarrow {}^{R}\!/_{I}, \quad I \trianglelefteq \text{Ideal}, \quad \varphi : R \to R_s, \quad \left({}^{R}\!/_{I}\right)_{\pi(s)} \cong {}^{R_s}\!/_{\varphi(I) R_s}$$

$\mathcal{O}_{X,W} = \left(k[x,y]\big/ y^2 - x^3\right)_{(x,y)}$

$$\mathcal{K}(W) = \mathcal{O}_{X,W}\big/ m_W \overset{(*)}{\cong} \left(k[x,y\big/(y^2 - x^3, x, y)\right)_{(0)} \cong k$$

$\operatorname{ord}_W x = \dim_{\mathcal{K}(W)} \left(\mathcal{O}_{X,W}\big/(x)\right) \overset{(*)}{=} \dim_k (\underbrace{k[y]\big/ y^2}_{\cong \bar{1}k + \bar{y}k})_{(y)} = 2$

$\operatorname{ord}_W y = \dim_k \left(\mathcal{O}_{X,W}\big/(y)\right) \overset{(*)}{=} \dim(k[x]\big/ x^3)_{(x)} = 3$

$\operatorname{ord}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{ord}_W y - \operatorname{ord}_W x = 3 - 2 = 1 \geq 0$, aber $\frac{y}{x} \in \mathcal{O}_{X,W} \Rightarrow$ Bewertungsring zu ord_W nicht $\mathcal{O}_{X,W}$.

b) Hauptdivisor zu $\frac{x+y}{z}$:

Das Schema X ist 2-dimensional. Primdivisoren haben Kodimension 1, sind hier also eindimensional und entsprechen damit den abgeschlossenen Punkten in der projektiven Varietät, die von dem Funktor t aus Proposition 3.8 auf X abgebildet wird. Für die Punkte $(0{:}0{:}1)$ und $(0{:}1{:}0)$, d.h. für die Primdivisoren $W = \{(x,y)\}$ und $\widehat{W} = \{(x,z)\}$, rechnen wir die Ordnung von $\frac{x+y}{z}$ wie folgt aus:

$\operatorname{ord}_W x + y = \dim_k \left(k[x,y]\big/(y^2 - x^3, x+y)\right)_{(x,y)} = \dim_k \left(k[x]\big/ \underbrace{x^2 - x^3}_{x^2\ (1-x)\ \text{Einh. in}\ k[x]_{(x)}}\right)_{(x)} = 2$

$$\left(k[x]\big/ x^2 - x^3\right)_{(x)} = \left(k[x]\big/ x^2\right)_{(x)}$$

$\hat{W} = \{(x,z)\} \rightsquigarrow$ gehört zu $(0:1:0)$, hat affine Umgebung $D_+(y) = \operatorname{Spec}\left(k[\frac{x}{y}, \frac{z}{x}]\big/ \frac{z}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^3\right) \cong \operatorname{Spec}\left(k[x,z]\big/ z - x^3\right)$

$$\frac{x+y}{z} \rightsquigarrow \frac{x+1}{z}$$

$\mathcal{O}_{X,\hat{W}} = \left(k[x,z]\big/ z - x^3\right)_{(x,z)}$, $\mathcal{K}(\hat{W}) \cong k$, $\mathcal{O}_{X,\hat{W}}\big/(z) \cong \left(k[x]\big/ x^3\right)_{(x)} \Rightarrow \operatorname{ord}_{\hat{W}} z = 3$

$\mathcal{O}_{X,\hat{W}}\big/(x+1) \cong \left(k[z]\big/ z+1\right)_{(z)} \cong 0 \Rightarrow \operatorname{ord}_{\hat{W}}(x+1) = 0 \Rightarrow \operatorname{ord}_{\hat{W}} \frac{x+1}{z} = -3$

Alle anderen Punkte auf X haben die Form $(a{:}b{:}1)$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ und gehören zu Primdivisoren der Form $\widetilde{W} = \{(x-a, y-b)\}$. Wegen $b^2 = a^3$ folgt aus $a = 0$, $b = 0$ und umgekehrt, es gilt also $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Eine affine Umgebung von $\widetilde{W}$ ist

$$D_+(z) = \operatorname{Spec}\left(k\left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right] / \left(\left(\frac{y}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{z}\right)^3\right)\right) \cong \operatorname{Spec}\left(k[x,y]/(y^2 - x^3)\right).$$

Daher gilt $\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}} \cong (k[x,y]/(y^2 - x^3))_{(x-a,y-b)}$ und $\kappa(\widetilde{W}) = \mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/m_{\widetilde{W}} \cong k$. Die rationale Funktion $\frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ wird zu $x + y$.

Gilt $a + b \neq 0$, so ist $x - a + y - b \neq x + y$. Da $x + y$ Grad 1 hat und k nullteilerfrei ist, liegt $x + y$ nicht in $(x - a, y - b)$, ist also eine Einheit in $\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}$. Hier gilt demnach $\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/(x+y) = 0$ und $\operatorname{ord}_{\widetilde{W}}(x+y) = 0$.

Gilt $a+b=0$, so ist $x-a+y-b=x+y$ und $x+y$ ist keine Einheit. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/(x+y) &\cong (k[x,y]/(y^2-x^3,x+y))_{(x-a,y-b)}\\ &\cong (k[x]/(x^2-x^3))_{(x-a,-x-b)}\\ &\overset{a+b=0}{\cong} (k[x]/(x^2(1-x)))_{(x-a)}\end{aligned}$$

Wegen $a\neq 0$ ist x^2 in obigem Ring auf jeden Fall eine Einheit. Ist zusätzlich $a\neq 1$, so ist auch $(1-x)$ eine Einheit und wie oben gilt $\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/(x+y)=0$ und $\operatorname{ord}_{\widetilde{W}}(x+y)=0$. Für $a=1$ (also $b=-1$) ist

$$\mathcal{O}_{X,\widetilde{W}}/(x+y)\cong (k[x]/(1-x))_{(0)}\cong k$$

also gilt $\operatorname{ord}_{\widetilde{W}}(x+y)=1$.

Der Divisor zu $x+y$ hat somit die folgende Gestalt:

$$\operatorname{div}\left(\frac{x+y}{z}\right)=2\cdot\{(x,y)\}-3\cdot\{(x,z)\}+\{(x-1,y+1)\}$$

Lösung 2

a) Sei Y ein Primdivisor auf X, d.h. ein integres abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1. Ohne Einschränkung betrachten wir nur die Y mit $Y\cap U\neq\emptyset$.

Das Unterschema $Y\cap U$ ist abgeschlossen in U. Da X irreduzibel ist, liegt U dicht in X und die Dimensionen von Y und $U\cap Y$ sind gleich. Die Reduziertheit von Y überträgt sich direkt auf alle Unterschemata, also insbesondere auf $Y\cap U$. Eine Zerlegung von $Y\cap U$ in echte abgeschlossene Teilmengen induziert eine Zerlegung von Y, also folgt aus der Irreduzibilität von Y die von $Y\cap U$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass $Y\cap U$ ein Primdivisor auf U ist.

Nun betrachten wir ein $f\in k(X)=\operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,Y})$. Dann ist $f|_U$ ein Element im Funktionenkörper $k(U)=\operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{U,Y\cap U})$ und da die Ordnung eine lokale Eigenschaft ist und $U\cap Y\neq\emptyset$ gilt, ist $\operatorname{ord}_Y f=\operatorname{ord}_{Y\cap U} f|_U$. Hauptdivisoren werden also auf Hauptdivisoren abgebildet und damit ist die angegebene Abbildung wohldefiniert.

Es bleibt noch die Surjektivität zu zeigen: Sei $Y\subseteq U$ ein Primdivisor. Es gilt $\overline{Y}\cap U=Y$, weil Y abgeschlossen in U ist. Da U dicht in X ist gilt $\operatorname{codim}_X(\overline{Y})=\operatorname{codim}_U(Y)=1$. Wir haben also einen Primdivisor auf X gefunden, der auf Y abgebildet wird.

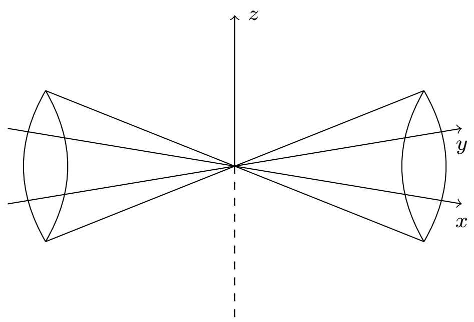
b) Ist die Kodimension von V mindestens 2, so kann V keine Teilmenge von Kodimension 1 enthalten. Daher gilt für alle Primdivisoren Y in X, $Y\cap U\neq\emptyset$ und die oben definierte Abbildung ist injektiv.

c) Nach a) wissen wir bereits, dass $\varphi\colon \operatorname{Cl}(X)\to\operatorname{Cl}(U)$ surjektiv ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $\operatorname{Kern}(\varphi)=\operatorname{Bild}(i)$ mit $i\colon\mathbb{Z}\to\operatorname{Cl}(X), k\mapsto k\cdot V$.

Wegen $U\cap V=\emptyset$ ist $\varphi(V)=0$ und somit $\operatorname{Kern}(\varphi)\supseteq\operatorname{Bild}(i)$. Ist umgekehrt W ein Primdivisor aus $\operatorname{Kern}(\varphi)$, so gilt $U\cap W=\emptyset$, also $W\subseteq V$. Da V und W beide irreduzibel sind und dieselbe Dimension haben, folgt $V=W$, was $\operatorname{Kern}(\varphi)\subseteq\operatorname{Bild}(i)$ beweist.

Lösung 3

$R={}^{k[x,y,z]}\!\big/\!_{(xy-z^2)}$, $X=\operatorname{Spec} R$



a) *Zu zeigen:* X noethersches, integres, separiertes Schema, nicht lokal faktoriell (das heißt nicht alle $\mathcal{O}_{X,x}$ sind faktoriell)

X ist noethersch, integer, separiert ✓

Betrachte $p = (x, y, z)$, $R_p = \left(k[x,y,z]\big/xy - z^2\right)_{(x,y,z)}$

$xy = z^2$, x, y, z sind keine Einheiten, x, y, z sind irreduzibel.

b) $V := V((y, z))$ („x-Achse“) ist irreduzibel, hat Kodimension 1.

Aufgabe 2 c): $\underset{k}{\mathbb{Z}} \underset{\mapsto}{\twoheadrightarrow} \underset{k\cdot V}{\mathrm{Cl}(X)} \to \mathrm{Cl}(\overset{X\setminus V}{\overset{\|}{U}}) \to 0$ exakt. y rationale Funktion auf X.

In X: $y = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$

$$\mathcal{O}_{X,V} = \left(k[x,y,z]\big/xy - z^2\right)_{(y,z)} \overset{\substack{x \text{ Einh.}\\ \Rightarrow y=\frac{1}{x}z^2}}{=} (k[x,z])_{(z)}$$

$k(V) = \mathcal{O}_{X,V}\big/(z) \cong k[x]_{(0)} \cong k(x)$, $\mathcal{O}_{X,V}\big/(y) = \left(k[x,z]\big/z^2\right)_{(z)}$

$\dim_{\underset{\mathcal{K}(V)}{\overset{\|}{k(X)}}} y = 2 \Rightarrow \operatorname{div} y = 2 \cdot V$

$X \setminus V = \operatorname{Spec}(D(y)) = \operatorname{Spec} R$, $R_y = k[x,y,y^{-1},z]\big/xy - z^2 \cong k[y, y^{-1}, z] = k[y,z]_y$

R noethersch $\Rightarrow R_y$ noethersch $\xRightarrow{\text{Prop. 11.3}} \mathrm{Cl}(X \setminus V) = 0$

Wir wissen, dass $\mathrm{Cl}(X)$ von V erzeugt wird und dass $2 \cdot V$ ein Hauptdivisor ist. Zu zeigen bleibt, dass V kein Hauptdivisor ist, was wir in zwei Schritten beweisen:

Behauptung 1: $q := (y, z)$ ist kein Hauptideal (Erinnerung: $V = V(q)$).

Wäre q ein Hauptideal, so gäbe es ein f mit $f|y$ und $f|z$. Die einzige Relation in R verändert den Grad eines Polynoms nicht und kann nicht auf Elemente von Grad 1 angewendet werde, also müsste f sogleich x und y sein, was nicht möglich ist.

Behauptung 2: Wäre $V = \operatorname{div}(f)$ für ein $f \in k(X)$, so wäre q ein Hauptideal.

Siehe Beweis von Proposition 6.2 im Hartshorne.

c) Aus dem Beweis von Satz 3 b) sehen wir, dass der Hinweis stimmt und Cartier-Divisoren genau die Weil-Divisoren sind, die lokal Hauptdivisoren sind. V ist kein Hauptdivisor, auch nicht lokal (er hat nur an einer Stelle einen Wert $\neq 0$, so dass „lokal“ hier keine Abschwächung ist). Es gibt folglich keinen Cartier-Divisor zu V. Dagegen ist $2 \cdot V$ ein Hauptdivisor, also erst recht lokal ein Hauptdivisor und somit in $\mathrm{CaCl}(X)$ gleich 0. Das zeigt die Behauptung.

Übung 12 vom 17. Juli 2012

Aufgabe 1 (5 Punkte)
In einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ seien zwei Objekte A und B mit injektiven Auflösungen $0 \to A \to I^\bullet$ und $0 \to B \to J^\bullet$ gegeben sowie ein Morphismus $f\colon A \to B$. Zeige:

a) Der Morphismus f kann zu einem Morphismus der Kettenkomplexe fortgesetzt werden, d.h. es gibt Morphismen $\alpha^k\colon I^k \to J^k$ für $k \geq 0$, die das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0"'] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\alpha^1"'] & I^2 \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "\alpha^2"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"'] & J^1 \arrow[r, "e^1"'] & J^2 \arrow[r, "e^2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

b) Ist $(\beta^k)_{k\geq 0}$ eine weitere Fortsetzung von f auf die Kettenkomplexe, so sind $(\alpha^k)_{k\geq 0}$ und $(\beta^k)_{k\geq 0}$ „(ketten)homotop“, d.h. es gibt für $k \geq 0$ diagonale Morphismen $h^k\colon I^k \to J^{k-1}$ mit $\alpha^k - \beta^k = h^{k+1} \circ d^k + e^{k-1} \circ h^k$ (dabei ist $J^{-1} = B$).

c) Nun sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Zeige, dass die Garbenkohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ nicht von der gewählten injektiven Auflösung von $\mathcal{F}$ abhängt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei k ein Körper, $X \coloneqq \operatorname{Spec}(k[x,y]) = \mathbb{A}_k^2$ und $U \coloneqq X \setminus \{(0,0)\}$. Betrachte eine offene affine Überdeckung von U und berechne die Čech-Kohomologie der Strukturgarbe auf U bezüglich dieser Überdeckung. Gib eine schöne Basis für den (unendlichdimensionalen) Vektorraum an, der dir dabei über den Weg läuft.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechne die Čech-Kohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ auf der Sphäre S^2 für die folgenden zwei Überdeckungen von S^2:

a) durch zwei echte offene Teilmengen.

b) durch drei echte offene Teilmengen, so dass der Schnitt von je zweien homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe und der Schnitt von allen dreien homöomorph zu zwei offenen Kreisscheiben ist. Natürlich sollte man sich dafür zunächst per Skizze davon überzeugen, dass eine solche Überdeckung existiert.

Aufgabe 4 (zum Nachdenken, keine Abgabe)
In der Vorlesung haben wir die Čech-Kohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ auf S^1 zu einer Überdeckung berechnet, die aus zwei einfach zusammenhängenden Teilmengen U und V besteht.

Mache dir an geeigneten Beispielen klar, dass die Kohomologie sich nicht mehr ändert, wenn man die Überdeckung noch weiter verfeinert, d.h. durch $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ersetzt mit $U_i \subseteq U$ oder $U_i \subseteq V$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Lösung 1
$\mathcal{A}$ abelsche Kategorie, $A, B \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$, $0 \to A \to I^\bullet$, $0 \to B \to J^\bullet$ injektive Auflösungen, $f : A \to B$

a) Setze f zu Morphismus $(\alpha^k)_{k\geq 0}$ der Kettenkomplexe fort, $\alpha^k : I^k \to J^k$. Seien $\alpha^{-1} = f, \alpha^0, \ldots, \alpha^n$ gegeben.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, phantom, "///", shift left=6] & I^0 \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha^0"'] & \cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha^{n-1}"'] \arrow[dd, phantom, "///", shift left=8] & I^n \arrow[rr] \arrow[dd, "\alpha^n"'] \arrow[dr] & & I^{n+1} \arrow[dd, dashed, "\alpha^{n+1}"] \\
& & & & & & I^n/\operatorname{Kern}(d^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi"'] & J^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & J^{n-1} \arrow[r, "e^{n-1}"'] & J^n \arrow[rr, "e^n"'] & & J^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Für $x \in \operatorname{Kern}(d^n) = \operatorname{Bild}(d^{n-1})$ gilt: es gibt ein $y \in I^{n-1}$ mit $d^{n-1}(y) = x \Rightarrow e^n(\alpha^n(x)) = e^n(\alpha^n(d^{n-1}(y))) = \underbrace{e^n(e^{n-1}}_{=0}(\alpha^{n-1}(y))) = 0 \Rightarrow e^n \circ \alpha^n$ ist auf ${I^n}/{\operatorname{Kern}(d^n)}$ wohldefiniert.

J^{n+1} injektiv, ${I^n}/{\operatorname{Kern}(d^n)} \hookrightarrow I^{n+1}$ Monomorphismus $\Rightarrow$ Es gibt Fortsetzung $\alpha^{n+1} : I^{n+1} \to J^{n+1}$ von $e^n \circ a^n$. Nach Konstruktion gilt: $\alpha^{n+1} \circ d^n = e^n \circ \alpha^n$

b) Seien $(\alpha^k)_{k\geq 0}$ und $(\beta^k)_{k\geq 0}$ Fortsetzungen von f auf die Kettenkomplexe. Wir konstruieren diagonale Morphismen $h^k\colon I^k \to J^{k-1}$ mit $\alpha^k - \beta^k = h^{k+1} \circ d^k + e^{k-1} \circ h^k$, wobei $J^{-1} = B$, $I^{-1} = A$ und $J^{-2} = 0$.

Setzen wir $h^{-1}\colon A \to 0$ und $h^0\colon I^0 \to B$ konstant 0, so gilt $f - f = h^0 \circ \varphi + 0 \circ h^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f-f"'] \arrow[dl, bend right, "h^{-1}"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0 - \beta^0"] \arrow[dl, bend right, "h^0"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Seien nun $h^{-1}, \ldots, h^n$ mit der gewünschten Eigenschaft gegeben.

Für $x \in \operatorname{Kern}(d^n) = \operatorname{Bild}(d^{n-1})$ gilt: Es gibt ein $y \in I^{n-1}$ mit $d^{n-1}(y) = x$, also gilt

$$\begin{aligned}
(\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n)(x) &= (\alpha^n - \beta^n - e^{n-1} \circ h^n)(d^{n-1}(y)) \\
&= (\alpha^n \circ d^{n-1} - \beta^n \circ d^{n-1} - e^{n-1} \circ h^n \circ d^{n-1})(y) \\
&= (e^{n-1} \circ \alpha^{n-1} - e^{n-1} \circ \beta^{n-1} - e^{n-1} \circ h^n \circ d^{n-1})(y) \\
&= (e^{n-1} \circ (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} - h^n \circ d^{n-1}))(y) \\
&= (e^{n-1} \circ e^{n-2} \circ h^{n-1})(y) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
& I^n \arrow[rr, "d^n"] \arrow[dl, bend right, "h^n"'] \arrow[d, "\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n"] \arrow[r] & & I^{n+1} \arrow[dll, dashed, bend left, "h^{n+1}"] \\
& & I^n/\operatorname{Kern}(d^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}^{n+1}"] & \\
J^{n-1} \arrow[r, "e^{n-1}"'] & J^n & &
\end{tikzcd}$$

Also faktorisiert $\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n$ über $I^n/\operatorname{Kern}(d^n)$ und induziert einen Morphismus $\tilde{h}^{n+1}\colon I^n/\operatorname{Kern}(d^n) \to J^n$. Da J^n injektiv ist und $I^n/\operatorname{Kern}(d^n) \hookrightarrow I^{n+1}$ ein Monomorphismus, gibt es eine Fortsetzung $h^{n+1}\colon I^{n+1} \to J^n$ von $\tilde{h}^{n+1}$. Nach Konstruktion gilt $h^{n+1} \circ d^n = \alpha^n - \beta^n - e^{n-1} \circ h^n$.

c) Mit Hilfe von a) und b) zeigen wir nun, dass die Garbenkohomologie nicht von der gewählten injektiven Auflösung abhängt.

Seinen $0 \to \mathcal{F} \to I^\bullet$ und $0 \to \mathcal{F} \to J^\bullet$ zwei injektive Auflösungen der Garbe $\mathcal{F}$ auf dem Schema X. Nach a) lässt sich $\mathrm{id}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ zu $(\alpha^k)_{k\geq 0}\colon I^\bullet \to J^\bullet$ und zu $(\beta^k)_{k\geq 0}\colon J^\bullet \to I^\bullet$ fortsetzen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0"'] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\alpha^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\psi"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"'] & J^1 \arrow[r, "e^1"'] & \cdots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & J^0 \arrow[r, "e^0"] \arrow[d, "\beta^0"'] & J^1 \arrow[r, "e^1"] \arrow[d, "\beta^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"'] & I^0 \arrow[r, "d^0"'] & I^1 \arrow[r, "d^1"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dann sind $(\mathrm{id})_{k\geq 0}$ und $(\beta^k \circ \alpha^k)_{k\geq 0}$ beides Fortsetzungen von $\mathrm{id}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ nach $I^\bullet \to I^\bullet$. Nach b) gibt es also Morphismen $h^k\colon I^k \to I^{k-1}$ so dass $\beta^k \circ \alpha^k - \mathrm{id} = h^{k+1} \circ d^k + d^{k-1} \circ h^k$. Wir entfernen die erste Spalte, wenden den globalen Schnittfunktor an und erhalten das folgende Diagramm von abelschen Gruppen (die zum Garbenmorphismus g gehörige Abbildung auf ganz X, $g(X)$, nennen wir $\tilde{g}$):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X,I^0) \arrow[r, "\tilde{d}^0"] \arrow[d, "\tilde{\beta}^0 \circ \tilde{\alpha}^0 - \mathrm{id}"'] & \Gamma(X,I^1) \arrow[r, "\tilde{d}^1"] \arrow[d, "\tilde{\beta}^1 \circ \tilde{\alpha}^1 - \mathrm{id}"'] \arrow[dl, bend right, "\tilde{h}^0"'] & \Gamma(X,I^2) \arrow[r, "\tilde{d}^2"] \arrow[d, "\tilde{\beta}^2 \circ \tilde{\alpha}^2 - \mathrm{id}"'] \arrow[dl, bend right, "\tilde{h}^1"'] & \cdots \arrow[dl, bend right, "\tilde{h}^2"'] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,I^0) \arrow[r, "\tilde{d}^0"'] & \Gamma(X,I^1) \arrow[r, "\tilde{d}^1"'] & \Gamma(X,I^2) \arrow[r, "\tilde{d}^2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Für $k \geq 0$ gilt: Wegen $\alpha^k \circ d^{k-1} = d^{k-1} \circ \alpha^{k-1}$ und $\beta^k \circ d^{k-1} = d^{k-1} \circ \beta^{k-1}$, ist $\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \mathrm{id}$ auf $H^k(\Gamma(X, I^\bullet))$ wohldefiniert. Sei $\overline{x} = x + \mathrm{Bild}(\tilde{d}^{k-1}) \in H^k(\Gamma(X, I^\bullet))$, d.h. $x \in \mathrm{Kern}(\tilde{d}^k)$. Dann gilt:

$$(\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \mathrm{id})(\overline{x}) = \overline{(\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \mathrm{id})(x)} = \overline{\tilde{h}^{k+1} \circ \underbrace{\tilde{d}^k(x)}_{=0} + \underbrace{\tilde{d}^{k-1} \circ \tilde{h}^k(x)}_{\in \mathrm{Bild}(\tilde{d}^{k-1})}} = 0$$

Es folgt $\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k = \mathrm{id}$. Ganz analog erhält man $\tilde{\alpha}^k \circ \tilde{\beta}^k = \mathrm{id}$ und somit $H^k(\Gamma(X, I^\bullet)) = H^k(\Gamma(X, J^\bullet))$.

Lösung 2

k Körper, $X := \mathrm{Spec}(k[x,y]) = \mathbb{A}^2_k$, $U = X \setminus \{(0,0)\}$. Überdecke U affin durch $D(x)$ und $D(y) \rightsquigarrow$ Koordinatenringe $k[x,y]_x$, $k[x,y]_y$

In Schemawelt: $U_1 := \mathrm{Spec}(k[x,y,\frac{1}{x}])$, $U_2 := \mathrm{Spec}(k[x,y,\frac{1}{y}])$

$$\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$$

Berechne die Čech-Kohomologie von $\mathcal{O}_U$:

$C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U(U_1) \times \mathcal{O}_U(U_2) = k[x,y,\frac{1}{x}] \times k[x,y,\frac{1}{y}]$

$C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U(U_1 \cap U_2) = k[x,y]_{xy} = k[x,y,\frac{1}{x},\frac{1}{y}]_{xy}$

$k \geq 2$: $C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U) = 0$

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d} C^1 \to 0$$

$$d^0 : \begin{cases} C^0 & \to & C^1 \\ (f,g) & \mapsto & g - f \end{cases}$$

$f \in k[x,y,\frac{1}{x}]$, $g \in k[x,y,\frac{1}{y}]$ mit $f - g = 0$ in $k[x,y]_{xy} \Rightarrow f = g \in k[x,y] \Rightarrow \mathrm{Kern}(d^0) \cong k[x,y] = \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U)$

Sei $f = \sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ j\geq 0}} f_{ij}x^iy^j$, $g = \sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i\geq 0}} g_{ij}x^iy^j \rightsquigarrow g - f = \sum\limits_{\substack{i\geq 0\\ j\geq 0}} (f_{ij} - g_{ij})x^iy^j + \sum\limits_{\substack{i<0\\ j\geq 0}} f_{ij}x^iy^j + \sum\limits_{\substack{j<0\\ i\geq 0}} g_{ij}x^iy^j$

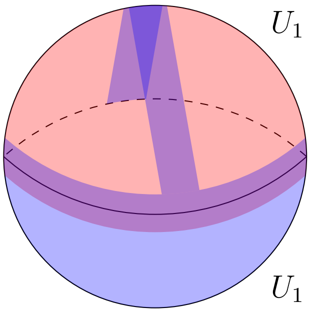
$\Rightarrow \mathrm{Bild}(d^0) = \{k = \sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i\geq 0 \vee j\geq 0}} h_{ij}x^iy^j\}$

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U) = {}^{\mathrm{Kern}(d^1)}\!\big/_{\mathrm{Bild}(d^0)} = \langle x^iy^j \mid i < 0, j < 0 \rangle \qquad k\text{-Vektorraum}$$

Lösung 3

Čech-Kohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ auf der S^2

a) $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$, U_1, U_2 echte, offene, *zusammenhängende* Teilmengen



$U_1 \cap U_2$ ist zusammenhängend

$\Rightarrow C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, für alle $k \geq 2$ gilt $C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$

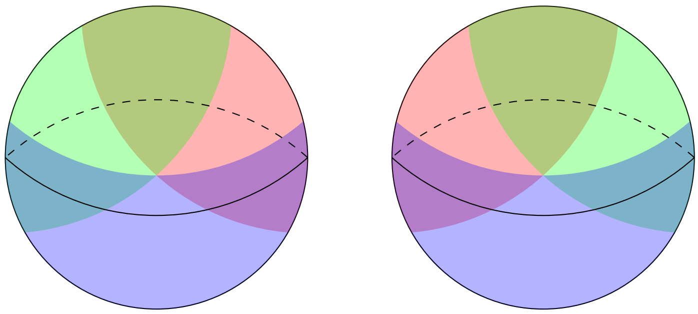
$$0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \to 0$$

$$d^0 : \begin{cases} C^0 & \to & C^1 \\ (f, g) & \mapsto & g - f \end{cases} \quad \begin{array}{l} \operatorname{Kern}(d^0) = \mathbb{Z} \\ \operatorname{Bild}(d^0) = \mathbb{Z} \end{array}$$

$\Rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$, für alle $k \geq 2$ gilt $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$

b) $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, $U_i \cap U_j \cong$ Kreisscheibe für $i \neq j$, $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ homöomorph zu zwei offenen Kreisscheiben.

Vorderseite Rückseite



$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_1) \times \mathbb{Z}(U_2) \times \mathbb{Z}(U_3) \cong \mathbb{Z}^3$, $C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_2 \cap U_3) \times \mathbb{Z}(U_1 \cap U_3) \times \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z}^3$, $C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \cong \mathbb{Z}^3$, für alle $k \geq 3$ gilt $C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \to 0$$

$$d^0 : \begin{cases} C^0 & \to & C^1 \\ (f, g, h) & \mapsto & (h - g, h - f, g - f) \end{cases}$$

$\operatorname{Kern}(d^0) = \{(f, f, f) | f \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$

$\operatorname{Bild}(d^0) = \{(h - g, h - f, g - f) | h, g, f \in \mathbb{Z}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 | x = y - z\} \cong \mathbb{Z}^2$

$$d^1 : \begin{cases} C^1 & \to & C^2 \cong \mathbb{Z}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + z, x - y + z) \end{cases}, \operatorname{Kern}(d^1) \cong \mathbb{Z}^2, \operatorname{Bild}(d^1) \cong \mathbb{Z}$$

$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \operatorname{Kern}(d^1)/\operatorname{Bild}(d^0) = \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2 = 0$, $\check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, für alle $k \geq 3$ gilt $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$

Stichwortverzeichnis

Glossar

F | **G** | **H** | **I** | **K** | **L** | **M** | **R** | **T** | **V**

F

Funktor Eine Abbildung zwischen Kategorien. Es wird zwischen kovarianten Funktoren und kontravarianten Funktoren unterschieden. F"ur einen kovarianten Funktor F gilt $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, im kontravarianten Fall hingegen gilt $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_c alD(F(Y),F(X))$. 7

G

GL$_n$ (GL) Allgemeine lineare Gruppe, Gruppe aller regul"aren $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus einem K"orper K. 45

H

Halm Ein Halm $\mathcal{O}_{V,x}$ einer quasiprojektiven Variet"at V "uber einem K"orper K in $x \in V$ ist definiert als $\mathcal{O}_{V,x} = \{[(U,f)]_\sim : U$ offene Umgebung von $x, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$ wobei $(u,f) \sim (U',f') \Leftrightarrow f_{U\cap U'} = f'_{U\cap U'}$. 18
Holomorphe Funktion In jedem Punkt aus $U \subseteq \mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion. Ist sie auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wird sie auch eine ganze Funktion genannt. 9

I

Ideal Eine Untergruppe der additiven Gruppe eines Ringes die abgeschlossen bez"uglich der Linearkombination ist (also ein Modul). Das bedeutet, dass f"ur jedes $r \in R$, $a \in I$ stets $ra \in I$ ist, man also mit der Multiplikation nicht aus dem Ideal herauskommen kann. In nicht kommutativen Ringen muss zwischen Links- und Rechtsidealen unterschieden werden, dabei werden Ideale, die sowohl Links- und Rechtsideale sind, als zweiseitige Ideale bezeichnet.
  Primideal Ein Ideal, bei dem f"ur jedes Produkt auch mindestens ein Faktor darin liegt, also f"ur $ab \in \mathfrak{p}$ ist $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$. 14
integer irreduzibel und reduziert (auf englisch „integral“). 48, 110

K

Kategorie Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, Mengen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ von Morphismen von Objekten und Verkn"upfungsabbildungen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z), (g,f) \mapsto g \circ f$ (das $\circ$ wird h"aufig weggelassen). Dabei ist das neutrale Element der Identit"atsmorphismus $\mathrm{id}_X : X \to X$. Mit $\mathrm{dom}(f)$ bezeichnet man die Quelle (domain) eines Morphismus f, mit $\mathrm{cod}(f)$ das Ziel (co-domain). 7
Keim Die Elemente eines Helmes, Schreibweise $f_x := (U,f)_\sim$. 9

L

Lokaler Ring . 18

M

Modul "Uber einem kommutativen Ring mit Eins eine additiv abelsche Gruppe, deren Multiplikationen mit Ringelementen eines Ringes wieder im Modul liegen. Es gelten die Assoziativit"at und das Distributivgesetz. Man kann das ganze als „Multiplikation mit Skalaren" interpretieren, wobei die Ringelemente die „Skalare" und die Modulelemente die „Vektoren" sind. 25

Morphismus Allgemein eine Abbildung zwischen zwei Objekten X und Y einer Kategorie $\mathcal{C}$. Die Menge der Morphismen einer Kategorie wird mit $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ bezeichnet (siehe auch Definition 1.5). 7

Homomorphismus Eine Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen, die die Verk"upfungen erh"alt. 16

Isomorphismus Ein Morphismus $f : X \to Y$ mit beidseitigem Inversen $g : Y \to X$, das heißt $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Allgemein gesprochen ist ein Isomorphismus eine Abbildung, die zwei algebraische Strukturen umkehrbar eindeutig aufeinander abbildet, beide sind also „sozusagen gleich". Dazu muss die Abbildung ein bijektiver Homomorphismus sein. 10

R

Reguläre Funktion Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{A}^1(K)$, die regul"ar ist f"ur alle $p \in U$, wobei $U \subseteq V$ offen und $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Variet"at ist. f heißt dabei regul"ar in p, wenn es eine Umgebung $U_p \subseteq U$ von p gibt und $g, h \in K[V]$ mit $h(x) \neq 0$ und $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ f"ur alle $x \in U_p$. Dieser Begriff wurde in der Vorlesung „Algebraische Geometrie I" im Semester zuvor definiert. 7

T

Topologischer Raum Eine Menge X zusammen mit einer Topologie T, das heißt einem Mengensystem das offene Teilmengen von X definiert, wobei die leere Menge, die Grundmenge, der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen offen sind. 7

V

Varietät Eine algebraische Variet"at ist ein geometrisches Objekt, das durch Polynomgleichungen beschrieben werden kann.

Affine Variet"at Eine irreduzible affine algebraische Menge "uber einem K"orper. Affine algebraische Mengen sind definiert als Teilmengen $\{x \in K^n | f_1(x) = \dots f_k(x) = 0\}$ eines affinen Raumes K^n, wobei K ein K"orper und $\{f_1, \dots, f_k\}$ eine Menge von Polynomen in $K[X_1, \dots, X_n]$ ist. Eine quasi-affine Variet"at ist eine offene Teilmenge einer affinen Variet"at. 15

Projektive Varietät Eine irreduzible projektive algebraische Menge "uber einem K"orper. Projektive algebraische Mengen sind definiert als Teilmengen $\{x \in \mathbb{P}^n | f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$ eines Projektiven Raumes $\mathbb{P}^n$ "uber einem K"orper K. Dabei sind $f_1, \dots, f_k$ homogene Polynome in $K[X_0, \dots, X_n]$ und $x = [x_0 : \dots : x_n]$ ein Punkt in $\mathbb{P}^n$. Eine quasi-projektive Variet"at ist eine offene Teilmenge einer projektiven Variet"at. 7

Literaturverzeichnis

[AM94] Atiyah, Michael F. ; MacDonald, Ian G.: *Introduction To Commutative Algebra.* Westview Press, 1994

[Har77] Hartshorne, Robin: *Algebraic Geometry.* Springer, 1977

Anhang B

Gästebuch

Hier kann jeder, der gößere Änderungen oder Korrekturen am Skript vorgenommen hat, seinen Namen und einen Kommentar hinterlassen. Kleinigkeiten wie Rechtschreibfehler müssen nicht unbedingt sein (und bei meinen Tippfehlern wäre das Gästebuch größer als das Skript), aber ein korrigierter Satz, ein vervollständigter Beweis, solche Sachen, einfach damit jemand der eine ältere Version des Skriptes hat schnell den Unterschied finden kann. Oder hinterlasst einfach ein Paar nette Worte :-)

Zum Schreiben im Gästebuch stehen euch folgende Umgebungen zur Verfügung (neben den üblichen aus dem Skript):

```
\begin{gast}        \begin{komm}        \begin{korr}
   ...                 ...                 ...
\end{gast}          \end{komm}          \end{korr}
```

Gästebucheinträge sind für alle Arten von Einträgen gedacht. Kommentare sollten nur für wichtige Sachen verwendet werden und auch bloß, wenn man sie nicht direkt in das Skript einbauen kann. Korrekturen sind da um größere und wichtige Korrekturen festzuhalten, damit man schnell weißwas sich seit der letzten Version wichtiges geändert hat.

Dieser Teil ist absichtlich am Ende, damit man ihn beim Drucken einfach weglassen kann. Wenn jemand einen weiteren Anhang einfügen möchte, dann tut das bitte *vor* dem Gästebuch.

Gästebucheintrag (von Aleks am 23. April 2012)
Ich habe das Gästebuch angelegt. Ihr könnt hier Aufzählungen verwenden:

1) Ist das nicht toll?
2) Ich kann sogar einen Link zu einem Eintrag setzen, wie zum Beispiel Definition 1.3

Kommentar (von Aleks am 13. Mai 2012)
Eine Sache, die mich immer gewurmt hat, ist dass das Skript einfach runtergeleiert aussah, es sah nicht wie ein Buch aus. Das war auch kein Wunder, schließlich hatte ich die Dokumentenklasse `report` verwendet gehabt. Ich habe das endlich geändert, und wo ich schon dabei war dachte ich mir, ich könnte auch gleich diese `KOMA Script` Klassen ausprobieren, also in diesem Fall `scrbook`.

Das war eine gute Idee, die Klasse ist sehr anpassbar, ohne großen Aufwand, man muss sich nur in der riesigen Dokumentation zurechtfinden. Wo ich schon dabei war habe ich den Code ein wenig besser kommentiert und aufgeräumt, falls jemand in Zukunft dieses Skript als Vorlage verwenden möchte.