

Zusammenfassung des Stoffes zur Vorlesung Formale Systeme

Max Kramer

13. Februar 2009

Diese Zusammenfassung entstand als persönliche Vorbereitung auf die Klausur zur Vorlesung “Formale Systeme” von Prof. Dr. Bernhard Beckert im Wintersemester 08/09 an der Universität Karlsruhe (TH). Sie ist sicherlich nicht vollständig, sondern verzichtet bewusst auf ganze Kapitel und Themen wie Tableaunkalkül, Resolutionskalkül, OCL und viele mehr. Für Verbesserungen, Kritik und Hinweise auf Fehler oder Unstimmigkeiten an third.aht@web.de bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1	Voraussetzungen	2
2	Aussagenlogik	3
3	Prädikatenlogik erster Stufe	6
4	Modale Aussagenlogik	12
5	Temporale Logik	14
6	Automaten	15

1 Voraussetzungen

1.1 Relationen

Sei $R \subset D \times D$.

R irreflexiv $:\Leftrightarrow$

$\forall x \in D$ gilt xRx nicht

R antisymmetrisch $:\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in D$ gilt $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

R asymmetrisch $:\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in D$ gilt $xRy \Rightarrow \neg yRx$

R Ordnung $:\Leftrightarrow$

R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch

R strikte Ordnung $:\Leftrightarrow$

R irreflexiv, transitiv und asymmetrisch

R totale Ordnung $:\Leftrightarrow$

R Ordnung und $\forall x, y \in D$ mit $x \neq y$ gilt entweder xRy oder yRx

R Kongruenzrelation bzgl. Σ $:\Leftrightarrow$

R Äquivalenzrelation und $\forall f \in \Sigma$ mit Stelligkeit n und $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in D$ gilt
 $x_1Ry_1, \dots, x_nRy_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n)Rf(y_1, \dots, y_n)$

2 Aussagenlogik

2.1 Syntax der Aussagenlogik

Σ **Signatur** $:\Leftrightarrow$

Σ abzählbare Menge von Symbolen (auch Atome oder Aussagenvariablen genannt)

Aussagenlogische Formeln über einer Signatur Σ :

- $\{1, 0\} \cup \Sigma \subset For0_\Sigma$
- $\forall A, B \in For0_\Sigma$ und $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ist auch $A \circ B, \neg A \in For0_\Sigma$

2.2 Semantik der Aussagenlogik

I **Interpretation** über einer Signatur Σ $:\Leftrightarrow$

$I : \Sigma \rightarrow \{W, F\}$

Zu einer Interpretation I zugehörige **Auswertung** val_I :

$val_I : For0_\Sigma \rightarrow \{W, F\}$

I **Modell** von $A \in For0_\Sigma$ $:\Leftrightarrow$

I Interpretation über Σ mit $val_I(A) = W$

I **Modell** von $M \subseteq For0_\Sigma$ $:\Leftrightarrow$

$\forall A \in M$ gilt I Modell von A

Aus $M \subseteq For0_\Sigma$ **folgt** $A \in For0_\Sigma$ $:\Leftrightarrow$

$M \models A$ $:\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist auch Modell von A

$A \in For0_\Sigma$ **allgemeingültig** $:\Leftrightarrow$

\forall Interpretationen I gilt $val_I(A) = W \Leftrightarrow$ Jede Interpretation ist Modell von $A \Leftrightarrow \models A$

$A \in For0_\Sigma$ **erfüllbar** $:\Leftrightarrow$

\exists Interpretation I mit $val_I(A) = W \Leftrightarrow \exists$ ein Modell von $A \Leftrightarrow \not\models \neg A$

$A, B \in For0_\Sigma$ **logisch äquivalent** $:\Leftrightarrow$

$A \equiv B$ $:\Leftrightarrow A \models B \wedge B \models A \Leftrightarrow \models A \leftrightarrow B$

2.3 Normalformen

l **Literal** $:\Leftrightarrow$

$l \in \Sigma$ oder $\neg l \in \Sigma$

$F \in For0_\Sigma$ in **disjunktiver Normalform** (DNF) $:\Leftrightarrow$

F Disjunktion von Konjunktionen

$F \in For0_\Sigma$ in **konjunktiver Normalform** (KNF) $:\Leftrightarrow$

F Konjunktion von Disjunktionen

Shannon-Operator:

$$\forall A_1, A_2, A_3 \in For0_\Sigma \text{ gilt } val_I(sh(A_1, A_2, A_3)) = \begin{cases} val_I(A_2) & \text{falls } val_I(A_1) = F \\ val_I(A_3) & \text{sonst} \end{cases}$$

normierte sh-Formeln:

- 0, 1 sind normierte sh-Formeln
- A, B normierte sh-Formeln und für $P_i \in \Sigma$ kommen in A und B nur $P_j \in \Sigma$ mit $j > i$ vor $\Rightarrow sh(P_i, A, B)$ normierte sh-Formel

sh-Graph \rightsquigarrow **DNF:**

Disjunktion aller Pfade zur 1

sh-Graph \rightsquigarrow **KNF:**

Konjunktion aller negierten Pfade zur 0

$F \in For0_\Sigma$ **Horn-Formel** $:\Leftrightarrow$

F in KNF und jede Disjunktion enthält höchstens ein positives Literal $\Leftrightarrow F \cong (A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B) \wedge \dots$

Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ($O(n^2)$):

1. Markiere alle Fakten (Mengen die nur aus einem positiven Literal bestehen)
2. Falls nichts markiert: *erfüllbar*
3. Falls $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ existiert mit A_1, \dots, A_n markiert aber B nicht, dann markiere alle Vorkommen von B . Ansonsten: *erfüllbar*

4. Falls $B = 0$: *unerfüllbar*. Ansonsten: Wiederhole Schritt 3.

Äquivalenzformel-Tautologien:

Falls $A \in For0_\Sigma$ nur aus Aussagenvariablen $v \in \Sigma$, \leftrightarrow , 1 und 0 besteht gilt:

A Tautologie \Leftrightarrow Jede Variable $v \in \Sigma$ und 0 haben eine gerade Anzahl Vorkommen

2.4 Beweistheorie der Aussagenlogik

Kalkül korrekt $:\Leftrightarrow$

$\forall M \subseteq For0_\Sigma$ gilt $M \vdash_{Kal} A \Rightarrow M \models A$

Kalkül vollständig $:\Leftrightarrow$

$\forall M \subseteq For0_\Sigma$ gilt $M \models A \Rightarrow M \vdash_{Kal} A$

Endlichkeitssatz $:\Leftrightarrow$

$\forall M \subseteq For0_\Sigma$ gilt M hat ein Modell \Leftrightarrow Jede endliche Teilmenge von M hat ein Modell

Klauselmengen:

Identifiziere disjunktive Klauseln mit der Menge ihrer Literale und deren Konjunktion mit der Vereinigung ihrer Mengen.

Davis-Putnam-Loveland-Verfahren zur Wiederlegung einer Klauselmenge M :

1. Falls $M = \emptyset$: *erfüllbar*
2. Falls M keine Einerklausel K enthält wähle beliebige Variable A und wiederlege $M_{A=1}$ und $M_{A=0}$
3. Ansonsten streiche alle Klauseln die K enthalten und alle Literale $\neg K$
4. Falls $\{\} \in M$: *unerfüllbar*
5. Ansonsten gehe zu 1.

3 Prädikatenlogik erster Stufe

3.1 Syntax der Prädikatenlogik

Individuenvariablen:

kurz Variablen $Var := \{v_i \in P_\Sigma \mid i \in \mathbb{N}\} \subset$ Sondersymbole

$\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ **Signatur** $:\Leftrightarrow$

F_Σ, P_Σ abzählbar, enthalten keine reservierten Sondersymbole und $\alpha_\Sigma : F_\Sigma \cup P_\Sigma \rightarrow \mathbb{N}$

F_Σ **Funktionssymbole:**

nullstellige Funktionssymbole heißen auch **Konstanten**

P_Σ **Prädikatssymbole:**

nullstellige Prädikatssymbole heißen auch **aussagenlogische Atome**

Terme über einer Signatur $\Sigma :\Leftrightarrow$

- $Var \subseteq Term_\Sigma$
- $\forall f \in F_\Sigma$ mit $n := \alpha_\Sigma(f), t_1, \dots, t_n \in Term_\Sigma$ ist auch $f(t_1, \dots, t_n) \in Term_\Sigma$

Grundterme $:\Leftrightarrow$

$Term_\Sigma^0 := \{t \in Term_\Sigma \mid t \text{ enthält keine Variablen}\}$

Atomare Formeln:

$At_\Sigma := \{t \doteq u \mid t, u \in Term_\Sigma\} \cup \{p(t_1, \dots, t_n) \mid p \in P_\Sigma, n = \alpha_\Sigma(p), t_1, \dots, t_n \in Term_\Sigma\}$

Formeln For_Σ :

- $\{1, 0\} \cup At_\Sigma \subseteq For_\Sigma$
- $\forall x \in Var, A, B \in For_\Sigma$ sind mit $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ auch $\neg A, A \circ B, \forall x A, \exists x A \in For_\Sigma$

Wirkungsbereich:

Für die Formeln $\forall x A, \exists x A$ heißt $A \in For_\Sigma$ der Wirkungsbereich von $\forall x$ bzw. $\exists x$

Auftreten von $x \in Var$ **gebunden** $:\Leftrightarrow$
 x im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$

Gebundenen Variablen von $A \in For_\Sigma$:

$Bd(A) := \{x \in Var \mid x \text{ kommt in } A \text{ mindestens einmal gebunden vor} \}$

Auftreten von $x \in Var$ **frei** $:\Leftrightarrow$

Auftreten nicht gebunden

Freien Variablen von $A \in For_\Sigma$:

$Frei(A) := \{x \in Var \mid x \text{ kommt in } A \text{ mindestens einmal frei vor} \}$

$A \in For_\Sigma$ **geschlossen** $:\Leftrightarrow$

$Frei(A) = \emptyset \Leftrightarrow$ jede Variable kommt nur gebunden vor

3.2 Semantik der Prädikatenlogik

(D, I) **Interpretation** von einer Signatur Σ $:\Leftrightarrow$

- D beliebige, nichtleere Menge
- $\forall f \in F_\Sigma, n = \alpha_\Sigma(f)$ gilt $I(f) : D^n \rightarrow D$
- $\forall P \in P_\Sigma$ mit $\alpha_\Sigma(P) = 0$ gilt $I(P) \in \{W, F\}$
- $\forall p \in P_\Sigma$ mit $n := \alpha_\Sigma(p) > 0$ gilt $I(p) \subseteq D^n$

Variablenbelegung über D :

$\beta : Var \rightarrow D$

Modifikation von β an der Stelle $x \in Var$ zu $d \in D$:

$\forall y \in Var$ gilt $\beta_x^d(y) := \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$

Auswertung einer Belegung β zu einer Interpretation (D, I) über Σ :

- $val_{D, I, \beta} : Term_\Sigma \cup For_\Sigma \rightarrow D \cup \{W, F\}$

- $\forall x \in Var$ sei $val_{D,I,\beta}(x) := \beta(x)$
- $\forall f \in F_\Sigma, n = \alpha_\Sigma(f), t_1, \dots, t_n \in Term_\Sigma$ sei
 $val_{D,I,\beta}(f(t_1, \dots, t_n)) := (I(f))(val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n))$
- $\forall t, u \in Term_\Sigma$ sei $val_{D,I,\beta}(t \doteq u) := \begin{cases} W & \text{falls } val_{D,I,\beta}(t) = val_{D,I,\beta}(u) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$
- $\forall P \in P_\Sigma$ mit $\alpha_\Sigma(P) = 0$ sei $val_{D,I,\beta}(P) := I(P)$
- $\forall p \in P_\Sigma$ mit $n := \alpha_\Sigma(p) > 0, t_1, \dots, t_n \in Term_\Sigma$ sei
 $val_{D,I,\beta}(p(t_1, \dots, t_n)) := \begin{cases} W & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_n)) \in I(p) \\ F & \text{sonst} \end{cases}$
- $\forall A \in For_\Sigma$ sei $val_{D,I,\beta}(\forall x A) := \begin{cases} W & \text{falls } \forall d \in D \text{ gilt } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$
- $\forall A \in For_\Sigma$ sei $val_{D,I,\beta}(\exists x A) := \begin{cases} W & \text{falls } \exists d \in D \text{ mit } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$
- Für aussagenlogische Teilformen sei $val_{D,I,\beta}$ wie in der Aussagenlogik definiert

(D, I) **Modell** von $A \in For_\Sigma$ ohne freie Variablen über $\Sigma := \Leftrightarrow$

(D, I) Interpretation über Σ mit $val_{D,I}(A) = W$

(D, I) **Modell** von $M \subseteq For_\Sigma$ ohne freie Variablen $:= \Leftrightarrow$

$\forall A \in M$ gilt (D, I) Modell von A

Aus $M \subseteq For_\Sigma$ ohne freie Variablen **folgt** $A \in For_\Sigma$ ohne freie Variablen $:= \Leftrightarrow$

$M \models A := \Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist auch Modell von A

Aus $M \subseteq For_\Sigma$ **folgt lokal** $A \in For_\Sigma := \Leftrightarrow$

$M \models^\circ A := \Leftrightarrow$ Für jede Belegung ist jedes Modell von M auch Modell von A

$A \in For_\Sigma$ ohne freie Variablen **allgemeingültig** $:= \Leftrightarrow$

$\models A$

$A \in For_\Sigma$ ohne freie Variablen **erfüllbar** $:= \Leftrightarrow$

$\neq \neg A$

$A \in For_\Sigma$ **Tautologie** $:\Leftrightarrow$

- \exists endliche aussagenlogische Signatur $\Sigma' = \{P_1, \dots, P_n\}$, $A' \in For_{0\Sigma'}$, $A_1, \dots, A_n \in For_\Sigma$, so dass
- A' aussagenlogisch allgemeingültig über Σ' ist und
- A aus A' durch das Ersetzen aller P_i durch A_i ($1 \leq i \leq n$) entsteht

$A, B \in For_\Sigma$ **logisch äquivalent** $:\Leftrightarrow$

$A \equiv B \quad :\Leftrightarrow \models A \leftrightarrow B$

($\Rightarrow \equiv$ ist eine Kongruenzrelation)

3.3 Normalformen

$A \in For_\Sigma$ in **Negations-Normalform** $:\Leftrightarrow$

In A steht jedes \neg vor einer atomaren Teilformel

$A \in For_\Sigma$ **bereinigt** $:\Leftrightarrow$

$Frei(A) \cap Bd(A) = \emptyset$ und die quantifizierten Variablen paarweise verschieden sind

$A \in For_\Sigma$ in **Pränex-Normalform** $:\Leftrightarrow$

$A = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B$ mit $B \in For_\Sigma$ quantorenfrei und $\forall 1 \leq i \leq n$ gilt $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $x_i \in Var$

$A \in For_\Sigma$ in **Skolem-Normalform** $:\Leftrightarrow$

$A = \forall x_1 \dots \forall x_n B$ geschlossen mit $B \in For_\Sigma$ quantorenfreie KNF und $\forall 1 \leq i \leq n$ gilt $x_i \in Var$

$\forall A \in For_\Sigma \exists$ endliche Erweiterung Σ_{sk} von Σ und eine **erfüllbarkeits-äquivalente** $A_{sk} \in For_{\Sigma_{sk}}$ in Skolem-Normalform

Interpretation (D, I) von einer Signatur Σ **Herbrand-Interpretation** $:\Leftrightarrow$

- $D = Term_\Sigma^0$

- $\forall f \in F_\Sigma$ mit $n := \alpha_\Sigma(f), t_1, \dots, t_n \in \text{Term}_\Sigma^0$ gilt $I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$

3.4 Beweistheorie der Prädikatenlogik erster Ordnung

Kompaktheitssatz:

$\forall M \subseteq \text{For}_\Sigma, A \in \text{For}_\Sigma$ gilt $M \models A \Leftrightarrow \exists$ endliches $E \subseteq M$ mit $E \models A$

Endlichkeitssatz:

$M \subseteq \text{For}_\Sigma$ hat ein Modell \Leftrightarrow Jede endliche Teilmenge von M hat ein Modell

Nichtcharakterisierbarkeit der Endlichkeit:

$\nexists M \subseteq \text{For}_\Sigma$, so dass $\forall (D, I)$ gilt (D, I) Modell von $M \Leftrightarrow D$ endlich

3.5 Reduktionssysteme

(D, \succ) **Reduktionssystem** $:\Leftrightarrow$

D nichtleere Menge und $\succ \subseteq D \times D$

\forall Reduktionssysteme (D, \succ) sei \rightarrow die **reflexive, transitive Hülle** und \leftrightarrow die **reflexive, transitive, symmetrische Hülle** von \succ

Reduktionssystem (D, \succ) **konfluent** $:\Leftrightarrow$

$\forall s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \rightarrow s_1, s \rightarrow s_2$ gilt $\exists t \in D$ mit $s_1 \rightarrow t, s_2 \rightarrow t$

Reduktionssystem (D, \succ) **lokal konfluent** $:\Leftrightarrow$

$\forall s, s_1, s_2 \in D$ mit $s \succ s_1, s \succ s_2$ gilt $\exists t \in D$ mit $s_1 \rightarrow t, s_2 \rightarrow t$

Reduktionssystem (D, \succ) **noethersch** oder **terminierend** $:\Leftrightarrow$

\nexists unendliche Folge $s_0 \succ s_1 \succ \dots$

Reduktionssystem (D, \succ) **kanonisch** $:\Leftrightarrow$

(D, \succ) noethersch und konfluent

$s \in D$ **irreduzibel** in einem Reduktionssystem (D, \succ) $:\Leftrightarrow$

$\nexists t \in D$ mit $s \succ t$

$s_n \in D$ **Normalform** für $s \in D$ in einem Reduktionssystem (D, \succ) : \Leftrightarrow
 s_n irreduzibel und $s \rightarrow s_n$

\forall **kanonischen** Reduktionssysteme (D, \succ) gilt:

$\forall s, t \in D \exists$ **eindeutige Normalformen** $irr(s), irr(t)$ mit $s \leftrightarrow t \Leftrightarrow irr(s) = irr(t)$

Reduktionssystem (D, \succ) noethersch und lokal konfluent $\Rightarrow (D, \succ)$ konfluent

4 Modale Aussagenlogik

4.1 Syntax der modalen Aussagenlogik

Formeln der modalen Aussagenlogik über einer aussagenlogischen Signatur Σ :

- $\{1, 0\} \cup \Sigma \subset mFor0_\Sigma$
- $\forall A, B \in mFor0_\Sigma$ und $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ist auch $\neg A, A \circ B, \Box A, \Diamond A \in mFor0_\Sigma$

4.2 Semantik der modalen Aussagenlogik

$\mathcal{R} = (S, R)$ **Kripke-Rahmen** $:\Leftrightarrow$

- S nichtleere Menge von Zuständen
- $R \subseteq S \times S$

$\mathcal{K} = (S, R, I)$ **Kripke-Struktur** über Σ $:\Leftrightarrow$

- (S, R) Kripke-Rahmen
- $I : (\Sigma \times S) \rightarrow \{W, F\}$

Auswertung einer Kripke-Struktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$:

- $val_{\mathcal{K},s} : mFor0_\Sigma \rightarrow \{W, F\}$ vollkommen analog zur Aussagenlogik bis auf:
- $\forall A \in \Sigma$ gilt $val_{\mathcal{K},s}(A) := I(A)(s)$
- $\forall A \in \Sigma$ gilt $val_{\mathcal{K},s}(\Box A) := \begin{cases} W & \text{falls } \forall s' \in S \text{ mit } sRs' \text{ gilt } val_{\mathcal{K},s}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$
- $\forall A \in \Sigma$ gilt $val_{\mathcal{K},s}(\Diamond A) := \begin{cases} W & \text{falls } \exists s' \in S \text{ mit } sRs' \text{ gilt } val_{\mathcal{K},s}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$

Die Begriffe **Modell**, **allgemeingültig** und **erfüllbar** ergeben sich analog zur Aussagenlogik jedoch mit \mathcal{K} anstatt I und zusätzlichem ebenso quantifizierten $s \in S$

4.3 Charakterisierungen der modalen Aussagenlogik

$A \in mFor_{0\Sigma}$ **charakterisiert** Klasse von Kripke-Rahmen $K : \Leftrightarrow$

\forall Kripke-Rahmen $(S, R), \forall$ Interpretationen $I, \forall s \in S$ gilt:

$$val_{(S,R,I),s}(A) = W \Leftrightarrow (S, R) \in K$$

$\forall A \in Var$ gelten folgende **Charakterisierungen**:

- $\Box A \rightarrow A$ charakterisiert reflexive \mathcal{R}
- $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ charakterisiert transitive \mathcal{R}
- $A \rightarrow \Box \Diamond A$ charakterisiert symmetrische \mathcal{R}
- $\Box A \rightarrow \Diamond A$ charakterisiert endlose \mathcal{R}

5 Temporale Logik

5.1 Syntax der Linearen Temporalen Logik

LTL Formeln über einer aussagenlogischen Signatur Σ :

- Definiere $LTLFor_\Sigma$ analog zur modalen Aussagenlogik und zusätzlich:
- $\forall A, B \in LTLFor_\Sigma$ ist auch $A \mathbf{U} B, A \mathbf{U}_w B, A \mathbf{V} B, \mathbf{X} A \in LTLFor_\Sigma$

5.2 Semantik der Linearen Temporalen Logik

$\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ **omega-Struktur** für eine aussagenlogische Signatur $\Sigma : \Leftrightarrow$
 $\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^\Sigma$ mit der Intention $p \in \xi(n) \Leftrightarrow p$ ist in \mathcal{R} zum Zeitpunkt n wahr

bei n beginnende **Endstück** von ξ :

$$\xi_n(m) := \xi(n + m)$$

\forall omega-Strukturen $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ und $A \in LTLFor_\Sigma$ sei:

- $\xi \models p \Leftrightarrow p \in \xi(0)$
- $\xi \models \Box A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$
- $\xi \models \Diamond A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$
- $\xi \models A \mathbf{U} B \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und $\forall m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ gilt $\xi_m \models A$
- $\xi \models A \mathbf{U}_w B \Leftrightarrow$ Es gilt $\xi_n \models (A \wedge \neg B)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder es gilt $\xi \models A \mathbf{U} B$
- $\xi \models A \mathbf{V} B \Leftrightarrow \xi \models B$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\xi_n \models \neg B \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ und $\xi_m \models A$
- $\xi \models \mathbf{X} A \Leftrightarrow \xi_1 \models A$
- $\xi \models A \circ B$ und $\xi \models \neg A$ wie für aussagenlogische Variablen A, B üblich

6 Automaten

6.1 Büchi Automaten

Sei V^ω die Menge der **unendlichen Wörter** über einem endlichen Alphabet V

Interpretiere jedes $w \in V^\omega$ als $w : \mathbb{N} \rightarrow V$

endliche Anfangsstück von $w \in V^\omega$:

$$w \downarrow (n) := w(0) \dots w(n)$$

$\forall K \subseteq V^*, J \subseteq V^\omega$ sei:

- $K^\omega := \{w \in V^\omega \mid w = w_1 \dots w_n \dots, \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } w_n \in K\}$
- $\vec{K} := \{w \in V^\omega \mid w \downarrow (n) \in K \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$
- $KJ := \{w_1 w_2 \mid w_1 \in K, w_2 \in J\}$

s_0, \dots, s_n, \dots **Berechnungsfolge** von $w \in V^\omega : \Leftrightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt } s_{n+1} \in \delta(s_n, w(n))$$

s_0, \dots, s_n, \dots **akzeptierende Berechnungsfolge** \Leftrightarrow unendlich viele Finalzustände vorkommen

Von einem endlichen Automaten \mathcal{A} **akzeptierte ω -Sprache**:

$$L^\omega(\mathcal{A}) := \{w \in V^\omega \mid \exists \text{ akzeptierende Berechnungsfolge von } w\}$$

$L \subseteq V^\omega$ **ω -regulär** $:\Leftrightarrow$

\exists endlicher Automat \mathcal{A} mit $L^\omega(\mathcal{A}) = L$

\forall endlichen Automaten \mathcal{A} gilt:

- $L^\omega(\mathcal{A}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists$ erreichbarer Endzustand $q_f \in F$ der auf einer Schleife liegt
- $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \overrightarrow{L(\mathcal{A})}$ mit Gleichheit gdw. \mathcal{A} deterministisch

$\forall L_1, L_2$ ω -regulär, K regulär gilt:

- K^ω ω -regulär $\Leftrightarrow \epsilon \notin K$
- KL_1 ω -regulär
- $L_1 \cup L_2$ ω -regulär
- $L_1 \cap L_2$ ω -regulär
- \forall endlichen Alphabete V ist $V^\omega \setminus L_1$ ω -regulär

6.2 Büchi Automaten und LTL

$\forall B \in LTLFor_\Sigma \exists$ endlicher Automat \mathcal{A}_B mit $L^\omega(\mathcal{A}_B) = \{\xi \in V^\omega \mid \xi \models B\}$