Algebra II

Sommersemester 2006
Prof. Dr. F. Herrlich

Die Mitarbeiter von http://lkwiki.nomeata.de/

28. September 2017

Inhaltsverzeichnis

Benannte Sätze

1 Multilineare Algebra

§1 Moduln

Sei R ein (kommutativer) Ring (mit Eins) (in der ganzen Vorlesung).

Definition 1.1

(a) Eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\cdot : R \times M \to M$ heißt ***R-Modul*** (genauer: R-Linksmodul), wenn gilt:

 (i) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$

 (ii) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

 (iii) $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

 (iv) $1 \cdot x = x$

 für alle $a, b \in R,\ x, y \in M$.

(b) Eine Abbildung $\varphi : M \to M'$ zwischen R-Moduln M, M' heißt ***R-Modul-Homomorphismus*** (kurz ***R-linear***), wenn für alle $x, y \in M,\ a, b \in R$ gilt:
$\varphi(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \varphi(y)$

Beispiele

(1) $R = K$ Körper. Dann ist R-Modul = K-Vektorraum und R-linear = linear

(2) R ist R-Modul. Jedes Ideal $I \subseteq R$ ist R-Modul

(3) Jede abelsche Gruppe ist ein $\mathbb{Z}$-Modul.
(denn: $n \cdot x = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\text{-mal}}$ definiert die Abbildung $\cdot : \mathbb{Z} \times M \to M$ wie in 1.1 gefordert)

Bemerkung + Definition 1.2

(a) Sind M, M' R-Moduln, so ist $\mathrm{Hom}_R(M, M') = \{\varphi : M \to M' : \varphi \text{ ist } R\text{-linear}\}$ ein R-Modul durch $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ und $(a \cdot \varphi_1)(x) = a \cdot \varphi_1(x)$.

(b) $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ heißt dualer Modul.

Beispiele

$R = \mathbb{Z}$
$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}$, denn $0 = \varphi(0) = \varphi(1 + 1) = \varphi(1) + \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 0$

Bemerkung 1.3 (Ähnlichkeiten von Moduln mit Vektorräumen)
Die R-Moduln bilden eine ***abelsche Kategorie R-Mod***.

(a) Eine Untergruppe N eines R-Moduls M heißt R-Untermodul von M, falls $R \cdot N \subseteq N$.

(b) Kern und Bild R-linearer Abbildungen sind R-Moduln.

(c) Zu jedem Untermodul $N \subseteq M$ gibt es einen Faktormodul M/N.

(d) Homomorphiesatz:
Für einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : M \to N$ gilt: $M/\operatorname{Kern}(\varphi) \cong N$.

(e) *Direktes Produkt*: Sei $\{M_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Moduln. Dann ist ihr direktes Produkt $\prod_i M_i = \bigtimes_i M_i$ gegeben durch die Menge aller Tupel $(m_i)_{i \in I}$ mit $m_i \in M_i$ und die R-Aktion $r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I}$.

Direkte Summe: Das gleiche wie beim direkten Produkt, jedoch dürfen in den Tupeln nur endlich viele $m_i \neq 0$ sein.

Beweis

(b) Kern(φ): Sei $\varphi : M \to N$ lineare Abbildung. $m \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, $r \in R$:
$\varphi(rm) = r\varphi(m) = 0 \Rightarrow R \cdot \mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$; Untergruppe klar

Bild(φ): $n \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, d. h. $\exists\, m : n = \varphi(m), m \in M \Rightarrow r \in R : rn = r\varphi(m) = \varphi(rm) \in \mathrm{Bild}(\varphi) \Rightarrow R \cdot \mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$

(c) M abelsch $\Rightarrow$ jedes N Normalteiler $\Rightarrow$ M/N ist abelsche Gruppe.

Wir definieren R-Aktion auf M/N durch $r(m+N) = rm+N$. Das ist wohldefiniert, denn
$r((m+n)+N) = r(m+n)+N = rm + \underbrace{rn}_{\in N} + N = rm + N$

$r((m+N)+(m'+N)) = r((m+m')+N) = r(m+m')+N = rm+N+rm'+N = r(m+N)+r(m'+N)$
Die restlichen drei Eigenschaften gehen ähnlich.

(d)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & N \\ & M/\operatorname{Kern}(\varphi) \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Wohldefiniertheit von $\tilde{\varphi}$:
Sei $k \in \mathrm{Kern}(\varphi) : \varphi(m+k) = \varphi(m)$

surjektiv: $\forall n \in N : n = \varphi(m) = \tilde{\varphi}(m + \mathrm{Kern}(\varphi))$

injektiv: $m, m' \in M$ mit $\varphi(m) = \varphi(m') = n \in N \Leftrightarrow \varphi(m-m') = 0 \Rightarrow m + \mathrm{Kern}(\varphi)(m) = \mathrm{Kern}(\varphi)(m')$

$\tilde{\varphi}$ ist R-linear: Klar, wegen φ R-linear.

Bemerkung 1.4

(a) Zu jeder Teilmenge $X \subseteq M$ eines R-Moduls M gibt es den von X erzeugten Untermodul

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{M' \subseteq M \text{ Untermodul} \\ X \subseteq M'}} M' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in X \right\}$$

(b) $B \subset M$ heißt ***linear unabhängig***, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$ mit $n \in \mathbb{N}, b_i \in B, \alpha_i \in R$ folgt $\alpha_i = 0$ für alle i.

(c) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt ***Basis***.

(d) Nicht jedes R-Modul besitzt eine Basis.

Beispiel: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul: $\{\bar{1}\}$ ist nicht linear unabhängig, da $\underbrace{42}_{\neq 0 \text{ in } \mathbb{Z}} \cdot \bar{1} = 0$

(e) Ein R-Modul heißt ***frei***, wenn er eine Basis besitzt.

(f) Ein freier R-Modul M hat die Universelle Abbildungseigenschaft eines Vektorraums. Ist B eine Basis von M, und $f : B \to M'$ eine Abbildung in einen R-Modul M', so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\varphi : M \to M'$ mit $\varphi|_B = f$.

(g) Sei M freier, endlich erzeugter Modul. Dann ist M^* wieder frei und hat dieselbe Dimension wie M.

Beweis

(f) Sei $\{y_i\}_{i\in I}$ Familie von Elementen von M'.
Sei $x \in M$. Durch $x = \sum_i a_i x_i$ ist $\{a_i\}_{i\in I}$ eindeutig bestimmt.
Wir setzen: $\varphi(x) := \sum_i a_i y_i = \sum_i a_i \varphi(x_i)$
Beh. 1: Falls $\{y_i\}_{i\in I}$ ($y_i \neq y_j$ für $i \neq j$) Basis von M' ist, dann ist φ ein Isomorphismus.
Bew. 1: Wir können den Beweis des Satzes rückwärts anwenden
$\Rightarrow \exists\, \psi : M' \to M$ mit $\psi(y_i) = x_i \forall i \in I$
$\Rightarrow \varphi \circ \psi = id_N, \psi \circ \varphi = id_M$
Beh. 2: Zwei freie Moduln mit gleicher Basis sind isomorph.
Bew. 2: klar

Proposition + Definition 1.5
Sei $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ kurze exakte Sequenz von R-Moduln (d.h. $M' \subseteq M$ Untermodul, $M'' = M/M'$). Dann gilt für jeden R-Modul N:

(a) $0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_R(N, M'')$ ist exakt.

(b) $0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(M', N)$ ist exakt.

(c) Im Allgemeinen sind β_* bzw. α^* nicht surjektiv.

(d) Ein Modul N heißt ***projektiv*** (bzw. ***injektiv***), wenn β_* (bzw. α^*) **für sämtliche Wahlen der kurzen exakten Sequenz** $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ surjektiv ist.

(e) Freie Moduln sind projektiv.

(f) Jeder R-Modul M ist Faktormodul eines projektiven R-Moduls.

(g) Jeder R-Modul M ist Untermodul eines injektiven R-Moduls.

Beweis

(a)

$$\begin{tikzcd}
& & N \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

α_* ist injektiv: Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$, ist $\alpha_*(\varphi) = \alpha \circ \varphi = 0 \overset{\alpha \text{ inj.}}{\Rightarrow} \varphi = 0$.
$\mathrm{Bild}(\alpha_*) \subseteq \mathrm{Kern}(\beta_*)$: $\beta_*(\alpha_*(\varphi)) = \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} \circ \varphi = 0$

$\mathrm{Kern}(\beta_*) \subseteq \mathrm{Bild}(\alpha_*)$:
Sei $\beta \circ \psi = 0$ ($\psi \in \mathrm{Kern}(\beta_*)$). Für jedes $x \in N$ ist $\psi(x) \in \mathrm{Kern}(\beta) = \mathrm{Bild}(\alpha) \Rightarrow$ zu $x \in N \;\exists\, y \in M'$ mit $\psi(x) = \alpha(y)$; y ist eindeutig, da α injektiv.
Definiere $\varphi' : N \to M'$ durch $x \mapsto y$.
Zu zeigen: φ' ist R-linear
Seien $x, x' \in N \Rightarrow \varphi'(x + x') = z$ mit $\alpha(z) = \varphi(x + x') = \varphi(x) + \varphi(x') = \alpha(y) + \alpha(y') = \alpha(y + y')$ mit $\varphi'(x) = y,\ \varphi'(x') = y' \overset{\alpha \text{ inj.}}{\Rightarrow} z = y + y'$
Genauso: $\varphi'(a \cdot x) = a \cdot \varphi'(x)$

(b)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\beta^*(\varphi)"'] & & M'' \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] & 0 \\ & & & N & & \end{tikzcd}$$

β^* injektiv, denn für $\varphi \in \mathrm{Hom}(M'', N)$ ist $\beta^*(\varphi) = \varphi \circ \beta$
Sei $\beta^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \circ \beta = 0 \overset{\beta \text{ surj.}}{\Rightarrow} \varphi = 0$.
$\mathrm{Bild}(\beta^*) \subseteq \mathrm{Kern}(\alpha^*)$: $(\alpha^* \circ \beta^*)(\varphi) = \alpha^*(\varphi \circ \beta) = \varphi \circ \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} = 0$
$\mathrm{Kern}(\alpha^*) \subseteq \mathrm{Bild}(\beta^*)$: Sei $\psi \in \mathrm{Kern}(\alpha^*)$. Aber $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ mit $\psi \circ \alpha = 0$
Weil ψ auf $\mathrm{Bild}(\alpha)$ verschwindet, kommutiert

$$\begin{tikzcd} & M'' & \\ M \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi"'] & & M/\mathrm{Bild}(\alpha) \arrow[ul, "\cong"'] \arrow[dl, "\sigma"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \beta^*(\sigma) = \psi \Longrightarrow$ Beh.

(c) Im Allgemeinen sind β_* und α^* nicht surjektiv
z.B.:

1. $0 \to \mathbb{Z} \overset{\cdot 2}{\underset{\alpha}{\to}} \mathbb{Z} \overset{\beta}{\to} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ mit $N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
   Es gilt: $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \{0\}$
   $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0, id\} \Rightarrow \beta_*$ nicht surjektiv $\Rightarrow N$ nicht projektiv!
2. $0 \to \mathbb{Z} \overset{\cdot 4}{\underset{\alpha}{\to}} \mathbb{Z} \overset{\beta}{\to} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0$ mit $N := 2 \cdot \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
   $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, N) = \{0, \psi\}$, wobei $\psi(1) = 2$.
   Dann: $\alpha^*(\psi) = \psi \circ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^*$ nicht surjektiv $\Rightarrow N$ nicht injektiv!

(e) Sei N frei mit Basis $\{e_i, i \in I\}$. Sei $\beta : M \to M''$ surjektive R-lineare Abbildung und $\varphi : N \to M''$ R-linear. Für jedes $i \in I$ sei $x_i \in M$ mit $\beta(x_i) = \varphi(e_i)$ (so ein x_i gibt es, da β surjektiv). Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\psi : N \to M$ mit $\psi(e_i) = x_i$. Damit $\beta(\psi(e_i)) = \beta(x_i) = \varphi(e_i)$ für alle $i \in I \Rightarrow \beta \circ \psi = \varphi$

(f) Sei M ein R-Modul. Sei X ein Erzeugendensystem von M als R-Modul (notfalls $X = M$). Sei F der freie R-Modul mit Basis X, $\varphi : F \to M$ die R-lineare Abbildung, die durch $x \mapsto x$ für alle $x \in X$ bestimmt ist. φ ist surjektiv, da $X \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\langle X \rangle = M$. Nach Homomorphiesatz ist $M \cong F/\mathrm{Kern}(\varphi)$.

Proposition 1.6
Ein R-Modul N ist genau dann projektiv, wenn es einen R-Modul N' gibt, so dass $F := N \oplus N'$ freier Modul ist.

Beweis
„$\Rightarrow$":
Sei F freier R-Modul und $\beta : F \to N$ surjektiv (wie in Beweis von 1.5 (f)). Dann gibt es $\tilde{\varphi} : N \to F$ mit $\beta \circ \tilde{\varphi} = id_N$ (weil N projektiv ist).
Behauptung:

1.) $F = \mathrm{Kern}(\beta) \oplus \mathrm{Bild}(\tilde{\varphi}) \cong N' \oplus N$

2.) $\tilde{\varphi}$ injektiv

Beweis:

1.) $\mathrm{Kern}(\beta) \cap \mathrm{Bild}(\tilde{\varphi}) = (0)$, denn: $\beta(\tilde{\varphi}(x)) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = 0$.
Sei $x \in F,\ y := \tilde{\varphi}(\beta(x)) \in \mathrm{Bild}(\tilde{\varphi})$. Für $z = x - y$ ist $\beta(z) = \beta(x) - \underbrace{\beta(\tilde{\varphi}}_{id}(\beta(x))) = 0 \Rightarrow$
$x = \underbrace{z}_{\in \mathrm{Kern}(\beta)} + \underbrace{y}_{\in \mathrm{Bild}(\tilde{\varphi})}$

2.) $\tilde{\varphi}(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\beta(\tilde{\varphi}(x))}_{=x} = 0$

„$\Leftarrow$“:
Sei $F = N \oplus N'$ frei, $\beta : M \to M''$ surjektiv, $\varphi : N \to M''$ R-linear.

Gesucht: $\psi : N \to M$ mit $\beta \circ \psi = \varphi$.

Definiere $\tilde{\varphi} : F \to M''$ durch $\tilde{\varphi}(x + y) = \varphi(x)$ wobei jedes $z \in F$ eindeutig als $z = x + y$ mit $x \in N,\ y \in N'$ geschrieben werden kann.

F ist frei also projektiv $\Rightarrow \exists\, \tilde{\psi} : F \to M$ mit $\beta \circ \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}$. Sei $\psi := \tilde{\psi}|_N$. Dann ist $\beta \circ \psi = \beta \circ \tilde{\psi}|_N = \tilde{\varphi}|_N = \varphi$

§2 Tensorprodukt

Definition 1.7
Seien M, N, P R-Moduln.

(a) Eine Abbildung $\Phi : M \times N \to P$ heißt ***R*-bilinear**, wenn für jedes $x_0 \in M$ und jedes $y_0 \in N$ die Abbildungen

$$\Phi_{x_0} : N \to P, y \mapsto \Phi(x_0, y)$$

$$\Phi_{y_0} : M \to P, x \mapsto \Phi(x, y_0)$$

R-linear sind.

(b) Ein ***Tensorprodukt*** von M und N (über R) ist ein R-Modul T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \to T$, sodass
(UAE) Für jede bilineare Abbildung $\Phi : M \times N \to P$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : T \to P$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & T \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

(τ ist die „universelle“ bilineare Abbildung)

Beispiele

1.) M, N freie R-Moduln mit Basis $\{e_i, i \in I\}$ bzw. $\{f_j, j \in J\}$. Dann ist $M \otimes N$ freier R-Modul mit Basis $\{e_i f_j, i \in I, j \in J\}$ ein Tensorprodukt mit $\tau(e_i, f_j) = e_i f_j$.

Denn: Sei $\Phi : M \times N \to P$ bilinear. Setze $\varphi(e_i \cdot f_j) := \Phi(e_i, f_j)$, das bestimmt eindeutig $\varphi : M \otimes N \to P$ (R-linear) mit $\Phi(e_i, f_j) = \varphi(\tau(e_i, f_j))$ für alle i, j.

Sind I, J endlich, so ist $\mathrm{rg}(M \otimes N) = \mathrm{rg}(M) \cdot \mathrm{rg}(N)$, dagegen ist $\mathrm{rg}(M \times N) = \mathrm{rg}(M) + \mathrm{rg}(N)$. τ ist also höchstens in Trivialfällen surjektiv. τ ist nicht injektiv: $\tau(x, 0) = \tau(x, 0 \cdot$

$y) = 0 \cdot \tau(x,y) = 0$ (da linear im 2. Argument), genauso $\tau(0,y) = 0$. Bild(τ) ist kein Untermodul, aber $\langle \text{Bild}(\tau) \rangle = M \otimes N$.

2.) 0 ist ein Tensorprodukt der $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Denn: jede bilineare Abbildung $\Phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to P$ ist die Nullabbildung. $\Phi(\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(3 \cdot \bar{1}, \bar{1}) = 3 \cdot \Phi(\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(\bar{1}, 3 \cdot \bar{1}) = \Phi(\bar{1}, \bar{0}) = 0$, genauso $\Phi(\bar{1}, -\bar{1}) = 0$.

Satz 1 (Tensorprodukt)
Zu je zwei R-Moduln M, N gibt es ein Tensorprodukt. Dieses ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis 1.8
Sei F der freie R-Modul mit Basis $M \times N$. Sei Q Untermodul, der erzeugt wird von den

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y), \qquad (\alpha x, y) - \alpha(x, y)$$
$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y'), \qquad (x, \alpha y) - \alpha(x, y)$$

für alle $x, x' \in M,\ y, y' \in N,\ \alpha \in R$

Setze $T := F/Q$, $\tau : M \times N \to T, (x, y) \mapsto [(x, y)] \bmod Q$. τ ist bilinear nach Konstruktion. Ist $\Phi : M \times N \to P$ bilinear, so setze $\tilde{\varphi}((x, y)) := \Phi(x, y)$, $\tilde{\varphi} : F \to P$ ist linear. $Q \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi})$, weil Φ bilinear $\overset{\text{Hom.-Satz}}{\Rightarrow}$ $\tilde{\varphi}$ induziert $\varphi : T \to P$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau$.

Noch zu zeigen: Eindeutigkeit
Seien (T, τ), (T', τ') Tensorprodukte von M und N. Dann gibt es eine R-lineare Abbildung $\varphi : T \to T'$ mit $\tau' = \varphi \circ \tau$ und eine R-lineare Abbildung $\psi : T' \to T$ mit $\tau = \psi \circ \tau'$. Noch wissen wir nicht, ob folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dd, bend right, "\varphi"'] \\
M \times N \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & \\
 & T' \arrow[uu, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

aber für die beiden Dreiecke ist dies bereits bekannt.

Behauptung: $\psi \circ \varphi = id_T$ und $\varphi \circ \psi = id_{T'}$.
Beweis: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dd, bend right, "id"'] \arrow[dd, bend left, "\psi\circ\varphi"] \\
M \times N \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\tau"'] & \\
 & T
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, d. h.
$(\psi \circ \varphi) \circ \tau = \psi \circ (\varphi \circ \tau) = \psi \circ \tau' = \tau$ mit $id : T \to T$ ist das Diagramm auch kommutativ. Wegen der Eindeutigkeit in der Definition des Tensorprodukts muss gelten: $\psi \circ \varphi = id_T$. (Der Beweis von $\varphi \circ \psi = id_{T'}$ ist analog.) Also ist $T \cong T'$.

Bemerkung 1.9
Für alle R-Moduln M, N, M_1, M_2, M_3 gilt:

(a) $M \otimes_R R \cong M$

(b) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$

(c) $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$

Beweis

a) Zeige: M ist Tensorprodukt der R-Moduln M und R.
$\tau : M \times R \to M$, $(x, a) \to a \cdot x$ ist bilinear (wegen Moduleigenschaften). Sei $\Phi : M \times R \to P$ bilinear.
Gesucht: $\varphi : M \to P$ linear mit $\Phi = \varphi \circ \tau$, d. h. $\Phi(x, a) = \varphi(a \cdot x)$
Setze $\varphi(x) := \Phi(x, 1)$. φ ist R-linear, da $\Phi(\cdot, 1)$ linear ist, $\Phi(x, a) = a\Phi(x, 1) = a\varphi(x) = \varphi(a \cdot x) = \varphi(\tau(x, a))$
φ ist eindeutig: es muss gelten: $\varphi(\tau(x, 1)) = \Phi(x, 1) =: \varphi(x)$, damit ist φ eindeutig bestimmt (wegen $\varphi \circ \tau = \Phi$).

b) $M \times N \cong N \times M$

c) Finde lineare Abbildung: $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$

1. Für festes $z \in M_3$ sei $\Phi_z : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$,
   $(x, y) \to x \otimes (y \otimes z) := \tau(y, z)$
   Φ_z bilinear: klar
   Φ_z induziert eine lineare Abbildung: $\varphi_z : M_1 \otimes_R M_2 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$
   Weiter ist $\Psi : (M_1 \otimes_R M_2) \times M_3 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$, $(w, z) \to \varphi_z(w)$
   bilinear: linear in w, weil φ_z linear; linear in z weil Φ_z linear in z.
   Induziert also lineare Abbildung $\psi : (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \to M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$
2. Umkehrabbildung genauso!

Proposition 1.10
Sei M ein R-Modul, $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist $I \cdot M = \{a \cdot x \in M : x \in M, a \in I\}$ Untermodul von M und es gilt:

$$M/_{I \cdot M} \cong M \otimes_R R/_I$$

Beweis
Sei $\tilde{\varphi} : M \to M \otimes_R R/I$, $x \to x \otimes \overline{1}$
$\tilde{\varphi}$ ist R-linear.
$I \cdot M \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi}) : \forall a \in I, x \in M$ ist $\tilde{\varphi}(ax) = ax \otimes \overline{1} = x \otimes \underbrace{a \cdot \overline{1}}_{\overline{a}} = 0$

$\tilde{\varphi}$ induziert also lineare Abbildung
$\varphi : M/(I \cdot M) \to M \otimes_R R/I$

Umgekehrt: $\Psi : M \times R/I \to M/(I \cdot M)$, $(x, \overline{a}) \to \overline{ax}$

Ψ ist wohldefiniert: ist $\overline{b} = \overline{a}$, so ist $\overline{b \cdot x} - \overline{a \cdot x} = \overline{\underbrace{(\underbrace{b - a}_{\in I}) \cdot x}_{\in I \cdot M}} = 0$

Ψ ist bilinear, induziert also $\psi : M \otimes_R R/I \to M/(I \cdot M)$ (linear). Es ist $(\psi \circ \varphi)(\overline{x}) = \psi(x \otimes \overline{1}) = \overline{1x} = \overline{x}$ und $(\varphi \circ \psi)(x \otimes \overline{a}) = \varphi(\overline{a \cdot x}) = ax \otimes \overline{1} = x \otimes a \cdot \overline{1} = x \otimes \overline{a}$

§3 Flache Moduln

Bemerkung 1.11
Für jeden R-Modul M ist die Zuordnung $M \mapsto M \otimes_R N$ ein Funktor

$$\otimes_R N : \underline{R\text{-Mod}} \to \underline{R\text{-Mod}}$$

Beweis
Ist $\varphi : M \to M'$ R-linear, so setze $\varphi_N : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N, x \otimes y \mapsto \varphi(x) \otimes y$ und linear fortgesetzt: $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x_i \otimes y_i) \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(\varphi(x_i) \otimes y_i)$

Proposition 1.12
Der Funktor $\otimes_R N$ ist rechtsexakt, d.h. ist $0 \to M' \overset{\varphi}{\to} M \overset{\psi}{\to} M'' \to 0$ exakt,
so ist $M' \otimes_R N \overset{\varphi_N}{\to} M \otimes_R N \overset{\psi_N}{\to} M'' \otimes_R N \to 0$ exakt.

Beispiele
Seien $R = \mathbb{Z}$ und $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Die Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \overset{\cdot 2}{\to} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ ist exakt, und nach Prop. 1.12 ist somit auch die Sequenz $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\cdot 2}{\to} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ exakt, doch der erste Pfeil in dieser Sequenz ist die Nullabbildung $\varphi_N : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach 1.9a) und somit nicht injektiv, d. h. die Sequenz läßt sich nicht zu einer exakten Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\cdot 2}{\to} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ verlängern.

Beweis
1. Schritt: $\text{Bild}(\varphi_N) \subseteq \text{Kern}(\psi_N)$, denn: $\psi_N(\varphi_N(x \otimes y)) = \psi_N(\varphi(x) \otimes y) = \underbrace{\psi(\varphi}_{=0}(x)) \otimes y = 0$.

Der Homomorphiesatz liefert ein $\Psi : {}^{M \otimes_R N}\!/\!_{\text{Bild}(\varphi_N)} \to M'' \otimes_R N$ mit der Eigenschaft, dass $\Psi(\overline{x}) = \psi_N(x)$ für jedes $x \in M \otimes_R N$ gilt.
2. Schritt: Ψ ist Isomorphismus.
Wenn dies gezeigt ist, ist klar, daß Ψ und damit ψ_N surjektiv ist und $\text{Kern}(\psi_N) = \text{Bild}(\varphi_N)$ gilt.
Zeige also, dass Ψ Isomorphismus ist.
Konstruiere Umkehrabbildung $\sigma : M'' \otimes_R N \to \bar{M} := {}^{M \otimes_R N}\!/\!_{\text{Bild}(\varphi_N)}$ folgendermaßen:
Wähle zu jedem $x'' \in M''$ ein Urbild $\chi(x'') \in \psi^{-1}(x'') \subset M$.
Definiere eine Abbildung $\tilde{\sigma} : M'' \times N \to \bar{M}$ durch $(x'', y) \mapsto \overline{\chi(x'') \otimes y}$.
Beweis, dass $\tilde{\sigma}$ wohldefiniert ist: Sind $x_1, x_2 \in M$ mit $\psi(x_1) = \psi(x_2) = x''$, so ist $x_1 - x_2 \in \text{Kern}(\psi) = \text{Bild}(\varphi)$, also $x_1 - x_2 = \varphi(x')$ für ein $x' \in M'$, daher $\overline{x_1 \otimes y} - \overline{x_2 \otimes y} = \underbrace{\overline{\varphi(x') \otimes y}}_{\in \text{Bild}(\varphi_N)} = 0$.

Rest klar!!

Definition + Proposition 1.13
Sei N ein R-Modul.

(a) N heißt ***flach***, wenn, wenn der Funktor $\otimes_R N$ exakt ist, d.h. für jede kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ auch $0 \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$ exakt ist.

(b) N ist genau dann flach, wenn für jeden R-Modul M und jeden Untermodul M' von M die Abbildung $i : M' \otimes_R N \to M \otimes_R N$ injektiv ist.

(c) Jeder projektive R-Modul ist flach.

(d) Ist $R = K$ ein Körper, so ist jeder R-Modul flach.

(e) Für jedes multiplikative Monoid S ist R_S flacher R-Modul.

Beweis

(b) folgt aus Prop 1.12.

(e) Sei M ein R-Modul, und sei $M' \subseteq M$ ein R-Untermodul. Nach Ü2A4 ist $M \otimes_R R_S \cong M_S$. Zu zeigen: Die Abbildung $M'_S \to M_S, \frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}$ ist injektiv.
Sei also $a \in M'$ und $\frac{a}{s} = 0$ in M_S, d.h. in M gilt: $t \cdot a = 0$ für ein $t \in S$. $\Rightarrow t \cdot a = 0$ in $M' \Rightarrow \frac{a}{s} = 0$ in M'_S.

(d) folgt aus (c), weil jeder K-Modul frei ist, also projektiv.

(c) Sei N projektiv. Nach Prop. 1.6 gibt es einen R-Modul N', sodass $N \oplus N' =: F$ frei ist.

Beh. 1: F ist flach.
Dann sei M ein R-Modul, und $M' \subseteq M$ ein Untermodul; dann ist $F \otimes_R M' \to F \otimes_R M$ injektiv.

Beh. 2: Tensorprodukt vertauscht mit direkter Summe.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Dann ist} & M' \otimes_R F & \cong M' \otimes_R (N \oplus N') & \cong (M' \otimes_R N) & \oplus & (M' \otimes_R N') \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{und} & M \otimes_R R & & \cong (M \otimes_R N) & \oplus & (M \otimes_R N')
\end{array}$$

Die Abbildung $M' \otimes_R F \to M \otimes_R F$ bildet $M' \otimes_R N$ auf $M \otimes_R N$ ab, $M' \otimes_R N \to M \otimes_R N$ ist also als Einschränkung einer injektiven Abbildung selbst injektiv.

Bew. 1: Sei $\{e_i : i \in I\}$ Basis von F, also $F = \bigoplus_{i \in I} Re_i \cong \bigoplus_{i \in I} R$. Wegen Beh. 2 ist

$$M \otimes_R F \cong M \otimes_R \bigoplus_{i \in I} R \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R R) = \bigoplus_{i \in I} M$$

Genauso: $M' \otimes_R F \cong \bigoplus_{i \in I} M'$.

Die Abbildung $M' \otimes_R F \to M \otimes_R F$ ist in jeder Komponente die Einbettung $M' \hookrightarrow M$, also injektiv.

Bew. 2: Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, zu zeigen: $M \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.

Die Abbildung $M \times N \to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N), ((x_i)_{i \in I}, y) \mapsto (x_i \otimes y)_{i \in I}$ ist bilinear, induziert also eine R-lineare Abbildung $\varphi : M \otimes_R N \to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.

Umgekehrt: Für jedes $i \in I$ induziert die Inklusion $M_i \hookrightarrow M$ eine R-lineare Abbildung $\psi_i : M_i \otimes_R N \to M \otimes_R N$; die ψ_i induzieren $\psi : \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N) \to M \otimes_R N$ (UAE der direkten Summe).
„Nachrechnen“: φ und ψ sind zueinander invers.

§4 Tensoralgebra

Definition 1.14
Eine R-***Algebra*** ist ein (kommutativer) Ring (mit Eins) R' zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\alpha : R \to R'$. Ist α injektiv, so heißt R'/R auch ***Ringerweiterung***.

Bemerkung 1.15
Sei R' eine R-Algebra.

(a) Die Zuordnung $M \to M \otimes_R R'$ ist ein kovarianter rechtsexakter Funktor $\otimes_R R' : \underline{R\text{-Mod}} \to \underline{R'\text{-Mod}}$; dabei wird $M \otimes_R R'$ zum R'-Modul durch $b \cdot (x \otimes a) := x \otimes b \cdot a$.

(b) Sei $V : \underline{R'\text{-Mod}} \to \underline{R\text{-Mod}}$ der „Vergiss-Funktor“, der jeden R'-Modul als R-Modul auffasst, mit der Skalarmultiplikation $a \cdot x := \alpha(a) \cdot x$ für $a \in R, x \in M$.

Dann ist $\otimes_R R'$ „links adjungiert“ zu V, d.h. für alle R-Moduln M und R'-Moduln M' sind $\mathrm{Hom}_R(M, V(M'))$ und $\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', M')$ isomorph (als R-Moduln).

Beweis

(b) Die Zuordnungen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(M, V(M')) & \to & \mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', M') \\ \varphi & \mapsto & (x \otimes a \mapsto a \cdot \varphi(x)) \\ (x \mapsto \psi(x \otimes 1)) & \leftarrow\!\shortmid & \psi \end{array}$$

sind zueinander invers.

Beispiele
Sei R' eine R-Algebra, und sei F ein freier R-Modul mit Basis $\{e_i : i \in I\}$. Dann ist $F \otimes_R R'$ ein freier R'-Modul mit Basis $\{e_i \otimes 1 : i \in I\}$.

denn: Sei M ein beliebiger R'-Modul, und $f : \{e_i \otimes 1 : i \in I\} \to M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\varphi : F \to V(M)$ mit $\varphi(e_i) = f(e_i \otimes 1)$ (UAE für F). Mit 1.15 (b) folgt: dazu gehört eine eindeutige R'-lineare Abbildung $\tilde{\varphi} : F \otimes_R R' \to M$ mit $\tilde{\varphi}(e_i \otimes 1) = \varphi(e_i)$.

Proposition 1.16
Seien R', R'' R-Algebren.

(a) $R' \otimes_R R''$ wird zur R-Algebra durch $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$

(b) $\sigma' : R' \to R' \otimes_R R'', a \mapsto a \otimes 1$ und
$\sigma'' : R'' \to R' \otimes_R R'', b \mapsto 1 \otimes b$ sind R-Algebrenhomomorphismen.

(c) UAE: Sei A eine beliebige R-Algebra. In der Kategorie der R-Algebren gilt:

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[d, "\sigma'"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ R' \otimes_R R'' \arrow[r, "\exists!\varphi"] & A \\ R'' \arrow[u, "\sigma''"] \arrow[ur, "\varphi''"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis
(c) Definiere eine lineare Abbildung $\varphi : R' \otimes_R R'' \to A$ durch $\varphi(a \otimes b) = \varphi'(a) \cdot \varphi''(b)$.

φ ist die lineare Abbildung, die von der bilinearen Abbildung $\tilde{\Phi} : R' \times R'' \to A$, $(a, b) \mapsto \varphi'(a) \cdot \varphi''(b)$ induziert wird.

Nachrechnen: φ ist Ringhomomorphismus und eindeutig bestimmt.
Beobachte: $a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = \sigma'(a)\sigma''(b)$.
Also muss gelten: $\varphi(a \otimes b) = \underbrace{(\varphi \circ \sigma')(a)}_{\varphi'(a)} \cdot \underbrace{(\varphi \circ \sigma'')(b)}_{\varphi''(b)}$.

Beispiele
R' sei eine R-Algebra. Dann ist $R'[X] \cong R[X] \otimes_R R'$ (als R'-Algebren), denn:

Zeige, dass $R[X] \otimes_R R'$ die UAE des Polynomrings $R'[X]$ erfüllt.

Sei A eine R'-Algebra und $a \in A$. Zu zeigen: $\exists!$ R'-Algebrahomomorphismus $\varphi : R[X] \otimes_R R' \to A$ mit $\varphi(X \otimes 1) = a$. Ein solcher wird als R-Algebra-Homomorphismus induziert von $\varphi' : R[X] \to A, X \mapsto a$ und $\varphi'' : R' \to A$ (der Strukturhomomorphismus α aus der Definition)
Noch zu zeigen: φ ist R'-linear (richtig, weil φ'' Ringhomomorphismus)

Definition + Bemerkung 1.17
Sei M ein R-Modul

a) $T^0(M) := R$, $T^n(M) = M \otimes_R T^{n-1}(M), n \geq 1$
b) $T(M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M)$ wird zur R-Algebra durch
$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{n+m}(M)$ (wenn auch nicht zu einer R-Algebra im Sinne von Definition Def. 1.14, da die Multiplikation in $T(M)$ nicht immer kommutativ ist).
c) $T(M)$ ist nicht kommutativ (im Allgemeinen), denn $x \otimes y \neq y \otimes x$.
d) $T(M)$ erfüllt UAE: Ist R' eine R-Algebra (nicht notwendig kommutativ), und ist $\varphi : M \to R'$ R-linear, so $\exists!$ R-Algebra-Homomorphismus
$\tilde{\varphi} : T(M) \to R'$ mit $\tilde{\varphi}|_{\underbrace{T^1(M)}_{=M}} = \varphi$

§5 Symmetrische und äußere Algebra

Definition 1.18
Seien M, N R-Moduln, $n \geq 0$, und sei $\Phi : M^n \to N$ R-multilinear.

a) Φ heißt ***symmetrisch***, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$ und alle $\sigma \in S_n$ gilt:
$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. (Wenn $n = 0$ oder $n = 1$ ist, ist also jedes Φ symmetrisch.)
b) Φ heißt ***alternierend***, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$ gilt:
Ist $x_i = x_j$ für ein Paar (x_i, x_j) mit $i \neq j$, so ist $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$
Wenn 2 in R invertierbar ist (z. B. also wannimmer R ein Körper von Charakteristik $\neq 2$ ist), ist dies äquivalent zu $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = -\Phi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$. (Wenn $n = 0$ oder $n = 1$ ist, ist also jedes Φ alternierend.)
c) $\mathrm{Sym}_M^n(N) := \{\Phi : M^n \to N : \Phi \text{ multilinear, symmetrisch}\}$
$\mathrm{Alt}_M^n(N) := \{\Phi : M^n \to N : \Phi \text{ multilinear, alternierend}\}$
$\mathrm{Sym}_M^n(N)$ und $\mathrm{Alt}_M^n(N)$ sind R-Moduln.

Satz 2 (Symmetrische und äußere Potenz)
Zu jedem R-Modul M und jedem $n \geq 0$ gibt es R-Moduln $S^n(M)$ und $\Lambda^n(M)$ (genannt die n-te ***symmetrische*** bzw. ***äußere Potenz*** von M) und eine symmetrische bzw. alternierende multilineare Abbildung $M^n \to S^n(M)$ bzw. $M^n \to \Lambda^n(M)$ mit folgender UAE:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[rr] \arrow[dr, "\Phi\in\mathrm{Sym}_M^n(N)"'] & & S^n(M) \arrow[dl, "\exists!\varphi \text{ linear}"] \\ & N & \end{tikzcd} \quad \text{bzw.} \quad \begin{tikzcd} M^n \arrow[rr] \arrow[dr, "\Psi\in\mathrm{Alt}_M^n(N)"'] & & \Lambda^n(M) \arrow[dl, "\exists!\psi \text{ linear}"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Mit $S^0(M) := R =: \Lambda^0(M)$ heißt $S(M) := \bigoplus_{n\geq 0} S^n(M)$ die ***symmetrische Algebra*** über M $\Lambda(M) := \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda^n(M)$ die ***äußere Algebra*** über M (oder ***Graßmann-Algebra***)

Beweis
Sei $\mathbb{J}^n(M)$ der Untermodul von $T^n(M)$, der erzeugt wird von allen
$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$, $x_i \in M$, $\sigma \in S_n$ und
$\mathbb{I}^n(M)$ der Untermodul von $T^n(M)$, der erzeugt wird von allen
$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ für die $x_i = x_j$ für ein Paar (i, j) mit $i \neq j$.
Setze $S^n(M) := T^n(M)/\mathbb{J}^n(M)$ und $\Lambda^n(M) := T^n(M)/\mathbb{I}^n(M)$
Sei $\Phi : M^n \to N$ multilinear und symmetrisch. Φ induziert $\tilde{\varphi} : T^n(M) \to N$ R-linear (weil Φ multilinear), da Φ symmetrisch ist, ist $\mathbb{J}(M) \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi})$. $\tilde{\varphi}$ induziert also $\varphi : S^n(M) \to N$ R-linear; genauso falls $\Psi : M^n \to N$ alternierend.

Proposition 1.19
Sei M freier R-Modul mit Basis $e_1, \dots, e_r$. Dann gilt für jedes $n \geq 0$:

a) $S^n(M)$ ist freier Modul mit Basis $\{e_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot e_r^{\nu_r} : \sum_{i=1}^r \nu_i = n\}$
b) $S(M) \cong R[X_1, \dots, X_r]$
c) $\Lambda^n(M)$ ist freier R-Modul mit Basis
$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$
d) $\Lambda^n(M) = 0$ für $n > r$

Beweis

b) folgt aus a)
d) folgt aus c)
c) $\Lambda^r(M)$ wird erzeugt von $e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$: klar.
$\Lambda^r(M)$ ist frei (vom Rang 1), denn aus $a \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_r = 0$ folgt $a = 0$ (weil die Determinantenabbildung $M^r \to R$ multilinear und alternierend ist, und daher gemäß der UAE eine lineare Abbildung $\Lambda^r(M) \to R$ induziert, welche $a \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_r = 0$ auf a sendet).
Für jedes n bilden $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$ ein Erzeugendensystem von $\Lambda^n(M)$.
Zu zeigen: $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$ ist linear unabhängig.
Sei dazu $\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_n\leq r} a_{\underline{i}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = 0$, wobei $\underline{i}$ kurz für $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ steht.
Für jedes $\underline{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ mit $1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq r$ existiert nun ein $\sigma_{\underline{j}} \in S_r$ mit $\sigma_{\underline{j}}(\nu) = j_\nu$ für alle $\nu = 1, \dots, n$. Mit diesem σ gilt $0 = (\sum a_{\underline{i}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = a_{\underline{j}}(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = a_{\underline{j}}(e_{\sigma_{\underline{j}}(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n)}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = (-1)^{\sigma_{\underline{j}}} a_{\underline{j}} e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$, also $a_{\underline{j}} = 0 \Rightarrow$ l.u.

§6 Differentiale

Definition + Bemerkung 1.20
Sei A eine kommutative R-Algebra, M ein A-Modul.

(a) Eine R-lineare Abbildung $\delta : A \to M$ heißt ***Derivation***, wenn für alle $f, g \in A$ gilt:
$$\delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)$$
(b) $\text{Der}_R(A, M) := \{\delta : A \to M : \delta\ R\text{-lineare Derivation}\}$ ist ein A-Modul.

(c) $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ ist ein Funktor (Unterfunktor von $\mathrm{Hom}_R(A, \cdot)$).

Wie man an dieser Definition sieht, hängt der Begriff einer "Derivationnnicht nur von A, sondern auch vom Grundring R ab. Wenn der Grundring nicht aus dem Kontext heraus klar ist (z. B. wenn zwei verschiedene Grundringe möglich sind), werden wir diese Abhängigkeit explizit machen, indem wir von *R-linearen Derivationen* statt einfach nur von *Derivationen* sprechen.

Beispiele

1.) $A = R[X], d = \frac{d}{dX}$ ist eine R-Derivation $d : A \to A$, definiert durch $d(\sum_{i=0}^n a_i X^i) := \sum_{i=1}^n a_i i X^{i-1}$

Beh.: In dieser Situation gilt $\mathrm{Der}_R(A, A) = A \cdot d$

Bew.: Dass $A \cdot d \subseteq \mathrm{Der}_R(A, A)$ gilt, ist klar. Wir müssen also die umgekehrte Inklusion nachweisen.

Sei $\delta : A \to A$ eine R-lineare Derivation. Sei $f := \delta(X)$.

Dann ist $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1) \Rightarrow \delta(1) = 0 \Rightarrow \forall r \in R : \delta(r) = 0$ (denn δ ist R-linear).

Ferner ist $\delta(X^2) = 2 \cdot X \cdot \delta(X) = 2 \cdot X \cdot f$. Allgemeiner gilt $\delta(X^n) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$ für jedes $n \geq 1$ (Beweis durch Induktion nach n, mit Induktionsschritt $\delta(X^n) = \delta\left(X X^{n-1}\right) = X \cdot \delta(X^{n-1}) + X^{n-1} \cdot \delta(X) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$). Da δ eine R-lineare Abbildung ist, folgt hieraus $\delta(\sum a_i X^i) = \sum a_i i X^{i-1} \cdot f$ für jede endliche Summe $\sum a_i X^i$ mit $a_i \in R$. Daher ist $\delta = f \cdot d$, was zu zeigen war.

2.) $A = R[\![X]\!], d = \frac{d}{dX}$ wie in 1.) mit ∞ statt n.

Beh.: Auch hier gilt $\mathrm{Der}_R(A, A) = A \cdot d$

Bew.: Wie in **1.)** ist $A \cdot d \subseteq \mathrm{Der}_R(A, A)$ offensichtlich. Sei also $\delta : A \to A$ eine R-lineare Derivation. Sei $f := \delta(X)$.

Wie in **1.)** können wir zeigen, dass $\delta(X^n) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$ für jedes $n \geq 1$ gilt. Für jede Potenzreihe $P \in A$ und jedes $n \geq 1$ ist also $\delta\left(X^n P\right) = X^n \delta\left(P\right) + P \underbrace{\delta\left(X^n\right)}_{=n \cdot X^{n-1} \cdot f} = X^n \delta\left(P\right) + Pn \cdot X^{n-1} \cdot f = X^{n-1}\left(\delta\left(P\right) + Pnf\right)$ durch X^{n-1} teilbar.

Wie in **1.)** können wir zeigen, dass $\delta(\sum a_i X^i) = \sum a_i i X^{i-1} \cdot f$ für jede endliche Summe $\sum a_i X^i$ mit $a_i \in R$ gilt. Das heißt, $\delta\left(S\right) = f \cdot d\left(S\right)$ für jedes Polynom $S \in R\left[X\right]$.

Sei nun $Q \in A = R\left[\left[X\right]\right]$ eine Potenzreihe. Für jedes $n \geq 1$ läßt sich Q schreiben als Summe $Q = S + X^n P$, wobei $S \in R\left[X\right]$ ein Polynom und $P \in A$ eine Potenzreihe ist. Damit ist $\delta\left(Q\right) = \delta\left(S + X^n P\right) = \delta\left(S\right) + \delta\left(X^n P\right) \equiv \delta\left(S\right) \mod X^{n-1}$ (denn $\delta\left(X^n P\right)$ ist durch X^{n-1} teilbar). Andererseits ist $d\left(Q\right) = d\left(S + X^n P\right) = d\left(S\right) + d\left(X^n P\right) \equiv d\left(S\right) \mod X^{n-1}$ (denn $d\left(X^n P\right)$ ist durch X^{n-1} teilbar). Somit ist $\delta\left(Q\right) \equiv \delta\left(S\right) = f \cdot \underbrace{d\left(S\right)}_{\equiv d(Q) \mod X^{n-1}} \equiv f \cdot d\left(Q\right) \mod X^{n-1}$. Da dies für alle $n \geq 1$ gilt, muß folglich $\delta\left(Q\right) = f \cdot d\left(Q\right)$ sein. Da dies für alle Potenzreihen Q gilt, ist also $\delta = f \cdot d$, und wieder ist der Beweis vollendet.

3.) $A = R[X_1, \ldots, X_n]$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$ ist Derivation genauso wie für 1.)

$\mathrm{Der}_R(A, A)$ ist freier A-Modul mit Basis $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

Die in Beispiel 1.) observierte Tatsache, dass $\delta\left(r\right) = 0$ für jedes $r \in R$ ist, gilt allgemein für jede Derivation $\delta : A \to M$ aus jeder kommutativen R-Algebra A in jeden A-Modul M. Insbesondere gilt also stets $\delta\left(1\right) = 0$.

Proposition + Definition 1.21
Der Funktor $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ ist „darstellbar“, d.h. es gibt einen A-Modul $\Omega_{A/R}$ und eine (R-lineare) Derivation $d : A \to \Omega_{A/R}$ mit folgender UAE:
Zu jedem A-Modul M und jeder (R-linearen) Derivation $\delta : A \to M$ existiert genau eine A-lineare Abbildung $\varphi : \Omega_{A/R} \to M$ mit $\delta = \varphi \circ d$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Beweis
Sei F der freie A-Modul mit Basis A, dabei sei X_f das zu $f \in A$ gehörige Basiselement von F. Sei U der Untermodul von F, der erzeugt wird von allen

$$\left.\begin{array}{l} X_{f+g} - X_f - X_g \\ X_{\lambda f} - \lambda X_f \\ X_{f\cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f \end{array}\right\} \text{für alle } f, g \in A, \lambda \in R$$

Sei $\Omega_{A/R} := F/U$, und definiere eine Abbildung $d : A \to \Omega_{A/R}, f \mapsto [X_f] =: df$. Diese Abbildung d ist eine Derivation nach Konstruktion („universelle Derivation“).

UAE: Sei M A-Modul, $\delta : A \to M$ Derivation. Sei $\Phi : F \to M$ die A-lineare Abbildung mit $\Phi(X_f) = \delta(f)$. Dann ist $U \subseteq \mathrm{Kern}(\Phi)$, weil δ Derivation, d.h. Φ induziert $\varphi : F/U \to M$.

Beispiele
Sei $A = R[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist $\Omega_{A/R}$ ein freier A-Modul mit Basis $dX_1, \dots dX_n$.
Beweis: Für $f = \sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot X_n^{\nu_n} \in A$ ($a_\nu \in R$) ist $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$
$\Rightarrow$ die dX_i erzeugen $\Omega_{A/R}$.

Nach Prop. 1.21 ist $\boxed{\mathrm{Der}_R(A, A) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, A)}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Zu zeigen: die dX_i sind linear unabhängig.
Sei also $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$ mit $a_i \in A$. Für jedes j ist $\frac{\partial}{\partial X_j} : A \to A$ eine Derivation, und somit existiert genau eine lineare A-lineare Abbildung $\varphi_j : \Omega_{A/R} \to A$ mit $\frac{\partial}{\partial X_j} = \varphi_j \circ d$ (gemäß der UAE von d). Aus $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$ folgt (durch Anwendung ebendieser Abbildung φ_j) nun $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_j} X_i = 0$. Wegen $\sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} X_i}_{=1 \text{ wenn } i=j \text{ und } 0 \text{ sonst}} = a_j$ ist also $a_j = 0$. Da dies für jedes j gezeigt ist, folgt hieraus die lineare Unabhängigkeit der dX_i.

Beispiele
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (für ein $n \geq 1$), $A := \mathcal{C}^\infty(X)$ die $\mathbb{R}$-Algebra der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf X.
Beh.: $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A, A)$ ist ein freier A-Modul mit Basis $\partial_1, \dots, \partial_n$ (mit $\partial_i := \frac{\partial}{\partial X_i}$ partielle Ableitung

nach X_i).
Dann ist auch $\Omega_{A/\mathbb{R}}$ freier A-Modul mit Basis $dX_1, \dots, dX_n$.
Beh.1: Für jedes $x \in X$ wird das Ideal $I_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$ erzeugt von $X_i - x_i$ $i = 1, \dots, n$ (Taylor-Entwicklung), wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$.
Sei nun $\partial : A \to A$ Derivation. Zu zeigen: $\partial = \sum_{i=1}^n \partial(X_i)\partial_i$.
Setze $\partial' := \partial - \sum_{i=1}^n \partial(X_i)\partial_i$.
Beh.2: Für jedes $x \in X$ ist $\partial'(I_x) \subseteq I_x$.
Bew.2: Sei $f \in I_x$. Also $f = \sum_{i=1}^n g_i(X_i - x_i)$ (siehe Beh. 1) mit $g_i \in A$. Also ist $\partial'(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial'(g_i)(X_i - x_i)}_{\in I_x} + \sum_{i=1}^n g_i \underbrace{\partial'(X_i - x_i)}_{=0,\text{ da } \partial_j(X_i - x_i) = \delta_{ij}} \in I_x$. Also ist $\partial'(I_x) \subseteq I_x$ gezeigt.
Sei nun $g \in A, x \in X$. Schreibe $g = \underbrace{g - g(x)}_{\in I_x} + g(x) \Rightarrow \partial'(g) = \partial'(g - g(x)) \in I_x$
d.h. $\partial'(g)(x) = 0 \Rightarrow \partial'(g) = 0 \Rightarrow \partial' = 0$. Daher ist $\partial = \sum_{i=1}^n \partial(X_i)\partial_i$.

Proposition 1.22

a) $\Omega_{\cdot/R}$ ist ein Funktor $\underline{R\text{-Alg}} \to \underline{R\text{-Mod}}$.

Beweis
Sei $\varphi : A \to B$ ein R-Algebra-Homomorphismus. Wir suchen einen natürlichen R-Modulhomomorphismus $d\varphi : \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$. Wir wollen, daß $d\varphi$ folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\, d\varphi\ A\text{-linear}"] \\ B \arrow[r, "d_B"] & \Omega_{B/R} \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $d_B \circ \varphi : A \to \Omega_{B/R}$ erfüllt:
$d_B \circ \varphi(\lambda \cdot a) = d_B(\lambda\varphi(a)) = \lambda d_B(\varphi(a))\ \forall\ \lambda \in R, a \in A$.
$d_B \circ \varphi(a_1 \cdot a_2) = d_B(\varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)) = \varphi(a_1) \cdot d_B(\varphi(a_2)) + \varphi(a_2) \cdot d_B(\varphi(a_1))$.
Die Abbildung $d_B \circ \varphi$ ist also eine Derivation, wenn $\Omega_{B/R}$ vermöge φ als A-Modul aufgefasst wird. Gemäß der UAE gibt es also genau einen R-Modulhomomorphismus $d\varphi : \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$, für den obiges Diagramm kommutativ wird. Dadurch wird $\Omega_{\cdot/R}$ zu einem Funktor.

b) Sei $\varphi : A \to B$ ein R-Algebra-Homomorphismus. Man kann den A-Modul $\Omega_{A/R}$ aufwerten zum B-Modul durch $\otimes_A B$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega_{A/R} \otimes_A B \arrow[d, dashed, "\exists!\, \alpha\ B\text{-linear}"] \\ B \arrow[r, "d_B"] & \Omega_{B/R} \end{tikzcd}$$

(wobei die oberen horizontale Abbildung strenggenommen nicht d_A, sondern $a \mapsto d_A(a) \otimes 1$ ist). Die Abbildung α ist dabei durch $\alpha(\omega \otimes b) = b \cdot d\varphi(\omega)$ definiert.

Betrachten wir B als A-Modul (statt als R-Modul), so liefert Proposition Prop. 1.21 einen B-Modul $\Omega_{B/A}$ und eine A-lineare Derivation $d_{B/A} : B \to \Omega_{B/A}$ mit folgender UAE:

Zu jedem B-Modul M und jeder A-linearen Derivation $\delta : B \to M$ existiert genau eine B-lineare Abbildung $\eta : \Omega_{B/A} \to M$ mit $\delta = \eta \circ d_{B/A}$.
Nun können wir aber die UAE von d_B (nicht die von $d_{B/A}$) auf den B-Modul $\Omega_{B/A}$ und die R-lineare Derivation $d_{B/A} : B \to \Omega_{B/A}$ anwenden. Dadurch erfahren wir, dass genau eine B-lineare Abbildung $\beta : \Omega_{B/R} \to \Omega_{B/A}$ mit $d_{B/A} = \beta \circ d_B$ existiert.
Für dieses β ist

$$\Omega_{A/R} \otimes_A B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B/R} \xrightarrow{\beta} \Omega_{B/A} \to 0$$

eine exakte Sequenz von B-Moduln.

Beweis
Dass β surjektiv ist, folgt leicht aus der Konstruktion von $\Omega_{./.}$.

Als nächstes zeigen wir $\beta \circ \alpha = 0$ (d.h. $\mathrm{Bild}(\alpha) \subseteq \mathrm{Kern}(\beta)$):
Wir haben $d_{B/A}\varphi(a) = 0$ für jedes $a \in A$.
(Denn da $d_{B/A}$ eine A-lineare Derivation ist, sendet sie alle „konstanten A-Funktionen“ auf 0.) Wegen $d_{B/A} = \beta \circ d_B$ ist also $(\beta \circ d_B \circ \varphi)(a) = 0$ für jedes $a \in A$. Da $d_B \circ \varphi = \alpha \circ d_A$, wird dies zu $(\beta \circ \alpha \circ d_A)(a) = 0$. Das heißt, $\beta \circ \alpha = 0$ auf der Menge $d_A(A)$. Da der B-Modul $\Omega_{A/R} \otimes_A B$ aber von $d_A(A)$ erzeugt ist, und $\beta \circ \alpha$ eine B-lineare Abbildung ist, folgt hieraus, dass $\beta \circ \alpha = 0$ auf ganz $\Omega_{A/R} \otimes_A B$ ist. Damit ist $\mathrm{Bild}(\alpha) \subseteq \mathrm{Kern}(\beta)$ gezeigt.

Es bleibt nur noch, $\mathrm{Kern}(\beta) \subseteq \mathrm{Bild}(\alpha)$ zu verifizieren.
Wir bezeichnen d_B mit $d_{B/R}$, um Verwechselungen mit $d_{B/A}$ zu vermeiden.
Sei $\omega = \sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) \in \mathrm{Kern}(\beta)$ mit $b_i, c_i \in B$.
Aufgrund von $d_{B/A} = \beta \circ d_{B/R}$ ist dann $\beta(\omega) = \sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i)$. Da $\omega \in \mathrm{Kern}(\beta)$ ist, ist also $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i) = 0$.
Nun sei an die Moduln F und U aus dem Beweis von Prop. 1.21 erinnert, die dort in Abhängigkeit von einem Ring R und einem R-Modul A definiert wurden. Wir bezeichnen diese Moduln mit F_A und $U_{A/R}$, um die Abhängigkeit von A bzw. von A und R zu verdeutlichen. Indem wir die gleiche Konstruktion für B statt A durchführen, erhalten wir Moduln F_B und $U_{B/R}$, und wenn wir auch R durch A ersetzen, erhalten wir einen Modul $U_{B/A}$. So ist beispielsweise F_B der freie B-Modul mit Basis $\{X_b : b \in B\}$.
Aus $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i) = 0$ in $\Omega_{B/A} = F_B/U_{B/A}$ folgt nun $\sum_{i=1}^n b_i X_{c_i} \in U_{B/A}$. Nach Definition von $U_{B/A}$ folgt hieraus $\sum_i b_i X_{c_i} = \sum_j b_j \underbrace{(X_{f_j+g_j} - X_{f_j} - X_{g_j})}_{\in U_{B/R}} + \sum_k b'_k (X_{\varphi(\lambda_k)g_k} - \varphi(\lambda_k) X_{g_k}) + \sum_l b''_l \underbrace{(X_{f_l g_l} - f_l X_{g_l} - g_l X_{f_l})}_{\in U_{B/R}}$ für gewisse $b_j, b'_k, b''_l \in B$, $f_j, f_l, g_k, g_j, g_l \in B$, $\lambda_k \in A$.
Projizieren wir diese Gleichung nach $F_B/U_{B/R} = \Omega_{B/R}$, so erhalten wir
$\sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) = \sum_k b'_k (d_{B/R}(\varphi(\lambda_k) g_k) - \varphi(\lambda_k) d_{B/R}(g_k))$.
Wegen $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) = \omega$ wird dies zu
$\omega = \sum_k b'_k (d_{B/R}(\varphi(\lambda_k) g_k) - \varphi(\lambda_k) d_{B/R}(g_k))$
$= \sum_k b'_k (\varphi(\lambda_k) d_{B/R}(g_k) + g_k d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)) - \varphi(\lambda_k) d_{B/R}(g_k))$
$= \sum_k b'_k g_k d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)) = \alpha(\sum_k d\lambda_k \otimes b'_k g_k) \in \mathrm{Bild}(\alpha)$.
Damit ist $\mathrm{Kern}(\beta) \subseteq \mathrm{Bild}(\alpha)$ nachgewiesen.

§7 Der de Rham-Komplex

Sei A eine (kommutative) R-Algebra.

Setze $\Omega_A := \Omega_{A/R}$ (definiert nach Definition 1.21). Dies ist ein A-Modul. Für jedes $i \geq 0$ setze $\Omega_A^i := \Lambda^i \Omega_A$ (wobei $\Lambda^i \Omega_A$ die i-te äußere Potenz des A-Moduls – nicht des R-Moduls – Ω_A bedeutet). Sei auch die Derivation $d : A \to \Omega_A$ definiert wie in Definition 1.21.

Satz + Definition 3

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Folge $(d_i)_{i \geq 0}$ von R-linearen Abbildungen $d_i : \Omega_A^i \to \Omega_A^{i+1}$ für alle $i \geq 0$, welche folgende Eigenschaften erfüllt:
   (i) $d_i(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f d_i(\omega)$ für alle $f \in A, \omega \in \Omega_A^i$.
   (ii) $d_{i+1} \circ d_i = 0$.
   (iii) $d_0 = d$.

b) Die Sequenz
$$A \overset{d_0}{\to} \Omega_A \overset{d_1}{\to} \Omega_A^2 \overset{d_2}{\to} \cdots \overset{d_{n-1}}{\to} \Omega_A^n \overset{d_n}{\to} \cdots$$
heißt ***de Rham-Komplex*** zu A, und wird mit $\Omega_A^\bullet$ bezeichnet.

c) Für jedes $i \geq 0$ heißt $H_{dR}^i(A) := {}^{\mathrm{Kern}(d_i)}\!\big/_{\mathrm{Bild}(d_{i-1})}$ (R-Modul) der i-te de Rham-Kohomologie-Modul von A. Dabei sei $d_{-1} = 0$, d.h. $H_{dR}^0(A) = \mathrm{Kern}(d) = R$.

Beweis
1. Fall: Es gilt $A = R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$.
Dann ist Ω_A^k freier A-Modul mit Basis $dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.
Für jedes $f \in A$ ist $df = d_A f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f dX_i$.
Existenz der Folge $(d_i)_{i \geq 0}$: Erstmal läßt sich d_0 definieren durch $d_0 = d$. Damit ist (iii) erfüllt, und (i) gilt für $i = 0$ weil d eine Derivation ist.
Nun definieren wir d_1 durch $d_1(\sum_{i=1}^n f_i dX_i) = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dX_i \in \Omega_A^2$ für alle $f_1, f_2, ..., f_n \in A$.
Konkretes Beispiel: $d_1(f_1 dX_1 + f_2 dX_2)$
$= (\frac{\partial f_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_1}{\partial X_2} dX_2) \wedge dX_1 + (\frac{\partial f_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} dX_2) \wedge dX_2 = (\frac{\partial f_2}{\partial X_1} - \frac{\partial f_1}{\partial X_2}) dX_1 \wedge dX_2$
(denn $dX_1 \wedge dX_1 = 0$, $dX_2 \wedge dX_2 = 0$ und $dX_2 \wedge dX_1 = -dX_1 \wedge dX_2$).
Allgemein definieren wir d_k für jedes $k \geq 0$ durch:
$$d_k\Big(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k} dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}\Big) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} d(f_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$$
für alle Tupel $(f_{i_1 \ldots i_k})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ von Elementen von A.
Diese Definition von d_k stimmt in den Fällen $k = 0$ und $k = 1$ überein mit den oben gegebenen Definitionen von d_0 und d_1.
Diese d_k erfüllen (i), denn:
Sei $\omega = \sum_{\underline{i}} f_{\underline{i}} dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k} \in \Omega_A^k$ (wobei alle $f_{\underline{i}}$ in A liegen) und sei $f \in A$. Hierbei ist $\underline{i}$ eine Abkürzung für ein k-Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ natürlicher Zahlen, welches $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ erfüllt. Dann ist
$$d_k(f\omega) = \textstyle\sum_{\underline{i}} d(f f_{\underline{i}}) \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$$
$$= \underbrace{\sum_{\underline{i}} f df_{\underline{i}} \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}}_{= f \cdot d_k(\omega)} + \underbrace{\sum_{\underline{i}} f_{\underline{i}} df \wedge dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}}_{= df \wedge \omega}$$

$= f \cdot d_k(\omega) + df \wedge \omega.$

Damit ist (i) für unsere Folge $(d_i)_{i\geq 0}$ bewiesen.

Jetzt zeigen wir, dass (ii) gilt. Sei $k \geq 0$. Wir müssen zeigen, dass $d_{k+1} \circ d_k = 0$ ist.

Dazu reicht es aus, zu beweisen, dass $(d_{k+1} \circ d_k)(f dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0$ für alle $f \in A$ und alle $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ gilt. Betrachten wir nun ein solches f und solche $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Bezeichne $dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$ mit ω. Dann gilt $d_k\omega = d_k(dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0$ (nach der Definition von d_k, denn $d(1) = 0$).

Wegen $dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k} = \omega$ ist nun

$$(d_{k+1} \circ d_k)(f dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = (d_{k+1} \circ d_k)(f\omega) = d_{k+1}(d_k(f\omega)) \overset{\text{(i) für } d_k}{=} d_{k+1}(df \wedge \omega + f \underbrace{d_k\omega}_{=0})$$

$$= d_{k+1}(df \wedge \omega) = d_{k+1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \partial f_i dX_i\right) \wedge \omega\right) = \sum_{i=1}^{n} d_{k+1}(\partial f_i \cdot dX_i \wedge \omega)$$

$$\overset{\text{nach Definition von } d_{k+1}}{=} \sum_{i=1}^{n} d(\partial_i f) \wedge dX_i \wedge \omega$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega = \sum_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega$$

$$= \sum_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2;\ i=j} \partial_j(\partial_i f) \underbrace{dX_j \wedge dX_i}_{=dX_j \wedge dX_j = 0 \text{ (da } i=j)} \wedge \omega + \sum_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2;\ i\neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega$$

$$= \underbrace{\sum_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2;\ i=j} \partial_j(\partial_i f) 0}_{=0} + \sum_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2;\ i\neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega$$

$$= \sum_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2;\ i\neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega.$$

Doch die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist 0, da sich ihre Addenden paarweise gegeneinander kürzen (nämlich kürzt sich der Addend zu (i, j) jeweils mit dem Addenden zu (j, i), weil $\partial_j(\partial_i f) = \partial_i(\partial_j f)$ und $dX_i \wedge dX_j = -dX_j \wedge dX_i$ für alle i und j gilt). Somit ist auch die linke Seite dieser Gleichung 0; das heißt,

$(d_{k+1} \circ d_k)(f dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0.$

Damit ist gezeigt, dass (ii) gilt. Die Folge $(d_i)_{i\geq 0}$, die wir konstruiert haben, erfüllt mithin alle Eigenschaften (i), (ii) und (iii); damit ist der Beweis der Existenz vollständig.

Eindeutigkeit der Folge $(d_i)_{i\geq 0}$: Gemäß (iii) ist $d_0 = d$ vorgegeben.

Zur Eindeutigkeit von d_1: Wegen (ii) ist $d_1(dX_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Wegen (i) ist $d_1(f dX_i) = df \wedge dX_i + f \underbrace{d_1(dX_i)}_{=0} = df \wedge dX_i$ für alle $f \in A$ und $i = 1, \ldots, n$.

Dadurch ist die Abbildung d_1 eindeutig determiniert.

Zur Eindeutigkeit von d_2: Zuerst einmal gilt $d_2(dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}) = 0$ für alle i_1 und i_2. (Dies folgt aus (ii), da $dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} = d_1(X_{i_1} dX_{i_2}) = d_1(-X_{i_2} dX_{i_1})$.)

Wegen (i) folgt hieraus wiederum $d_2(f dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}) = df \wedge dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}$ für alle $f \in A$. Hierdurch ist d_2 eindeutig determiniert.

Dieses Argument läßt sich leicht zu einem Beweis der Gleichheit $d_k\left(fdX_{i_1} \wedge dX_{i_2} \wedge ... \wedge dX_{i_k}\right) = df \wedge dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} \wedge ... \wedge dX_{i_k}$ für alle $k \geq 0$, $f \in A$ und $i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., n\}$ verallgemeinern. (Der Beweis benötigt Induktion über k.) Durch diese Gleichheit ist d_k eindeutig bestimmt. Also ist die Eindeutigkeit der Folge $(d_i)_{i\geq 0}$ gezeigt. Der Beweis in Fall 1 ist somit komplett.

2. Fall: A ist beliebige R-Algebra.

Schreibe A als Faktoralgebra eines Polynomrings P (in eventuell unendlich vielen Variablen) über R.

vornehm: Es gibt einen surjektiven R-Algebren-Homomorphismus $\varphi : P \to A$.

Ω ist Funktor, Λ^i auch, φ induziert also einen Homomorphismus $\varphi_i : \Omega^i_P \to \Omega^i_A$.

Da wir unseren Satz bereits im 1. Fall bewiesen haben, wissen wir, dass es eine eindeutig bestimmte Folge $(d_{i,P})_{i\geq 0}$ von R-linearen Abbildungen $d_{i,P} : \Omega^i_P \to \Omega^{i+1}_P$ für alle $i \geq 0$ gibt, die die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt.

Wir wollen nun (für festes i) eine R-lineare Abbildung $d_{i,A} : \Omega^i_A \to \Omega^{i+1}_A$ konstruieren, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^i_P \arrow[r, "d_{i,P}"] \arrow[d, "\varphi_i"] & \Omega^{i+1}_P \arrow[d, "\varphi_{i+1}"] \\
\Omega^i_A \arrow[r, dashed, "d_{i,A}"] & \Omega^{i+1}_A
\end{tikzcd}$$

Es gilt:

- $\mathrm{Kern}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi_{i+1} \circ d_{i,P})$. [Warum?]
- φ_i ist surjektiv (Ü4A3a für $i = 1$).

Dann induziert $d_{i,P}$ eine Abbildung $d_{i,A} : \Omega^i_A \to \Omega^{i+1}_A$, für welche obiges Diagramm kommutativ wird.

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) werden (aufgrund der Surjektivität von φ_i) von P auf A „vererbt“. Damit ist die Existenz der Folge $(d_i)_{i\geq 0}$ gezeigt. Die Eindeutigkeit einer solchen Folge ergibt sich genauso wie im 1. Fall, wobei hier X_1, ..., X_n durch Algebra-Erzeugenden von A ersetzt werden.

Beispiele

$A = K[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathrm{char}(K) = 0$.

Beh.: $H^i_{dR}(A) = 0$ für alle $i > 0$.

Bew.: $i = n$: Ü4A2

$i > n$: $\Omega^i_A = 0$

$i = 1$: Sei $\omega = \sum_{\nu=1}^n f dX_\nu \in \mathrm{Kern}(d_1)$, also: $0 = \sum_{\nu=1}^n df_\nu \wedge dX_\nu = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} dX_\mu \wedge dX_\nu$

Für alle $\nu \neq \mu$ ist also $\frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial X_\nu}$ (da $dX_\mu \wedge dX_\nu = -dX_\nu \wedge dX_\mu$).

Zu zeigen: $\omega = df$ für ein $f \in A$, d.h. $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial X_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n$.

Schreibe $f_\nu = \sum_{\underline{i}} a^{(\nu)}_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$.

Ansatz: $f = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_\nu} = \sum_{\underline{i}=(i_1,\cdots,i_n), i\nu\geq 1} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$

Wähle also $a_{\underline{i}}$ so, dass $i_\nu \cdot a_{\underline{i}} = a^{(\nu)}_{\underline{i}-\underline{e_\nu}}$, $e_\nu = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\nu}, 0, \ldots, 0)$

Es bleibt zu zeigen: $\frac{1}{i_\nu} a^{(\nu)}_{\underline{i}-\underline{e_\nu}} = \frac{1}{i_\mu} a^{(\mu)}_{\underline{i}-e_\mu}$ für alle $\nu \neq \mu$.

Äquivalent: $(*)\ i_\mu \cdot a^{(\nu)}_{\underline{i}-e_\nu} = i_\nu \cdot a^{(\mu)}_{\underline{i}-\underline{e_\mu}}$

Beweis von $(*)$: $\sum_{\underline{i}} i_\mu a_{\underline{i}-\underline{e_\nu}} X^{i-e_\mu-e_\nu} = \sum_{\underline{i}, i_\mu \geq 1} i_\mu a^{(\nu)}_i X^{i-e_\mu} = \sum_{\underline{i}, i_\nu \geq 1} i_\nu a^{(\mu)}_{\underline{i}} X^{\underline{i}-\underline{e_\nu}}$
$= \sum_{\underline{i}} i_\nu a^{(\mu)}_{\underline{i}-e_\nu} X^{\underline{i}-\underline{e_\nu}-\underline{e_\mu}}$, da $\frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial X_\nu}$.

Beispiele
$A = K[X, X^{-1}] = K[X,Y]/(XY-1) = \{f = \sum_{\nu=-n_0}^{n_1} a_\nu X^\nu : a_\nu \in K, n_0, n_1 \in \mathbb{N}\}$
$\Omega_A = AdX$, $df = (\sum_{\nu \neq 0} \nu a_\nu X^{\nu-1})dX \Rightarrow \Omega^2 = 0 \Rightarrow \text{Bild}(d) = \{fdx : f \in A, a_{-1} = 0\}$, d.h. $H^1_{dR}(A) = K\frac{dx}{x}$

2 Noethersche Ringe und Moduln

§1 Der Hilbertsche Basissatz

Definition 2.1
Sei R ein (kommutativer) Ring (mit Eins), M ein R-Modul.

(a) M erfüllt die ***aufsteigende Kettenbedingung*** (ACC), wenn jede aufsteigende Kette von Untermoduln stationär wird. D.h. sind $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Untermoduln von M mit $M_i \subseteq M_{i+1}$ für alle i, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i = M_n$ für alle $i > n$.

(b) M heißt ***noethersch***, wenn M (ACC) erfüllt.

(c) R heißt ***noethersch***, wenn er als R-Modul noethersch ist.

Beispiele

1.) k Körper. Ein k-Vektorraum V ist noethersch $\Leftrightarrow \dim_k(V) < \infty$.
[k hat nur die Ideale $\{0\}, k$.]

2.) $R = \mathbb{Z}$
[alle Untermodule: $n\mathbb{Z}$, mit $\mathrm{ggT}(n, m)$ zusammenbauen]

3.) $R = k[X]$
[Ideale von einem Polynom erzeugt, um größer zu machen: ggT der Polynome nehmen.]

Bemerkung 2.2
Sei $0 \to M' \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} M'' \to 0$ kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt:

$$M \text{ noethersch} \Leftrightarrow M' \text{ und } M'' \text{ noethersch}$$

Beweis
“$\Rightarrow$“:

(i) $M_0' \subseteq M_1' \subseteq \dots \subseteq M_i' \subseteq \dots$ Kette von Untermoduln von $M' \Rightarrow \alpha(M_0') \subseteq \alpha(M_1') \subseteq \dots$ wird stationär $\overset{\alpha \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} M_0' \subseteq M_1' \subseteq \dots$ wird stationär.

(ii) Sei $M_0'' \subseteq M_1'' \subseteq \dots \subseteq M_i'' \subseteq \dots$ Kette von Untermoduln von $M'' \Rightarrow \beta^{-1}(M_0'') \subseteq \beta^{-1}(M_1'') \subseteq \dots \subseteq \beta^{-1}(M_i'') \subseteq \dots$ wird stationär $\Rightarrow \underbrace{\beta(\beta^{-1}(M_0''))}_{=M_0''} \subseteq \dots \subseteq \underbrace{\beta(\beta^{-1}(M_i''))}_{=M_i''} \subseteq$ $\dots$ wird stationär, da β surjektiv ist.

“$\Leftarrow$“:
Sei $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_i \subseteq \dots$ Kette von Untermoduln von M. Sei $M_i' := \alpha^{-1}(M_i), M_i'' := \beta(M_i)$.
Nach Voraussetzung gibt es $n \in \mathbb{N}$, so dass für $i \geq n$ gilt: $M_i' = M_n', M_i'' = M_n''$. Weiter gilt:

$$\begin{array}{lc l}
 & \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_n' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M_n \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & M_n'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_i' \arrow[r, "\alpha"] & M_i \arrow[r, "\beta"] & M_i'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} & \begin{array}{l}\text{ist exakt}\\ \\ \text{ist exakt}\end{array}
\end{array}$$

für ein $i \geq n$

γ injektiv (Einbettung).
Zu zeigen: γ surjektiv.
Sei $x \in M_i$, dazu gibt es ein $y \in M_n$ mit $\beta(y) = \beta(x) \Rightarrow z := y - x \in \mathrm{Kern}(\beta) = \mathrm{Bild}(\alpha) = \alpha(M'_i) = \alpha(M'_n) \Rightarrow x = \gamma(y - z)$ und $y - z \in M_n$.

Folgerung 2.3
Jeder endlich erzeugbare Modul über einem noetherschen Ring ist noethersch.

Beweis
1. Fall: F freier Modul vom Rang n.
Induktion über n.
$n = 1$: Dann ist $F \cong R$ als R-Modul, also noethersch nach Voraussetzung.
$n \geq 1$: Sei $e_1, \dots, e_n$ Basis von F. Dann ist $F \cong \bigoplus_{i=1}^n R \cdot e_i$. Dann ist $0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} R \cdot e_i \to F \to R \cdot e_n \to 0$ exakt. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\bigoplus_{i=1}^{n-1} R \cdot e_i$ noethersch, $R \cdot e_n$ ist nach Voraussetzung noethersch $\overset{2.2}{\Longrightarrow}$ F noethersch.
2. Fall: M werde erzeugt von $x_1, \dots, x_n$. Dann gibt es (genau) einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $\beta : \bigoplus_{i=1}^n R \cdot e_i \to M$ mit $\beta(e_i) = x_i \overset{2.2}{\Longrightarrow} M$ noethersch.

Proposition 2.4
Sei R ein Ring.

(a) Für einen R-Modul M sind äquivalent:
   (i) M ist noethersch
   (ii) jede nichtleere Teilmenge von Untermoduln von M hat ein (bzgl. $\subseteq$) maximales Element.
   (iii) jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

(b) R ist genau dann noethersch, wenn jedes Ideal in R endlich erzeugbar ist.

Beweis

(a) **(i) $\Rightarrow$ (ii):** Sei $\emptyset \neq \mathcal{M}$ eine Familie von Untermoduln von M. Sei $M_0 \in \mathcal{M}$. Ist M_0 nicht maximal, so gibt es ein $M_1 \in \mathcal{M}$ mit $M_0 \subsetneq M_1$. Ist M_1 nicht maximal, so gibt es ein $M_2 \in \mathcal{M}$ mit $M_1 \subsetneq M_2$. ...
Die Kette $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots$ muss stationär werden, d.h. $\exists n$ mit M_n ist maximal in $\mathcal{M}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul, $\mathcal{M}$ Familie der endlich erzeugbaren Untermoduln von N. $\mathcal{M} \neq \emptyset$, da $\{0\} \in \mathcal{M}$. Nach Voraussetzung enthält $\mathcal{M}$ ein maximales Element N_0. Wäre $N_0 \neq N$ so gäbe es ein $x \in N \setminus N_0$. Dann wäre der von N_0 und x erzeugte Untermodul $N_1 \subset N$ endlich erzeugt und $N_0 \subsetneq N_1$. Widerspruch zu N_0 maximal.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seien $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_i \subseteq \dots$ Untermoduln von M. Sei $N := \bigcup_{i \geq 0} M_i$. N ist Untermodul ✓.
N ist nach Voraussetzung endlich erzeugt, z.B. von $x_1, \dots, x_n$. Jedes x_k liegt in einem $M_{i(k)}$, also liegen alle in M_m mit $m = \max\{i(k) : k = 1, \dots, n\} \Rightarrow N = M_m \Rightarrow M_i = M_m$ für $i \geq m$.

(b) ist Spezialfall von (a) für $R = M$.

Satz 4 (Hilbert'scher Basissatz)
Ist R noetherscher Ring, so ist auch $R[X]$ noethersch.

Beweis
Sei $\mathcal{J}$ ein nicht endlich erzeugbares Ideal in $R[X]$.

Sei $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{J}$ wie folgt: f_1 sei maximales Element in $\mathcal{J}\setminus\{0\}$ von minimalen Grad. Für $\nu \geq 2$ sei f_ν ein Element in $\mathcal{J} \setminus \underbrace{(f_1,\dots,f_{\nu-1})}_{=:\mathcal{J}_\nu}$ von minimalen Grad.

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{J}_\nu \neq \mathcal{J}$ für alle ν. Für $d_\nu := \deg(f_\nu)$ gilt $d_\nu \leq d_{\nu+1}$.

Sei $a_\nu \in R$ der Leitkoeffizient von f_ν (d.h. $f_\nu = a_\nu X^{d_\nu} + \dots$). Sei I_ν das von $a_1,\dots,a_{\nu-1}$ in R erzeugte Ideal $\Rightarrow I_\nu \subseteq I_{\nu+1} \Rightarrow \exists n$ mit $I_{n+1} = I_n \Rightarrow \exists \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in R$ mit $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i$.

Setze $g := f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i X^{d_n - d_i} \Rightarrow g \notin \mathcal{J}_n$ (sonst wäre $f_n \in \mathcal{J}_n$) aber $\deg(g) < d_n = \deg(f_n)$ Widerspruch.

Folgerung 2.5
Sei R noetherscher Ring. Dann gilt:

(a) $R[X_1,\dots,X_n]$ ist noethersch für jedes $n \in \mathbb{N}$

(b) Jede endlich erzeugte R-Algebra A ist noethersch (als Ring)

Beweis

(a) $n = 1$: Satz 4
$n > 1$: $R[X_1,\dots,X_n] = R[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$

(b) Es gibt surjektiven R-Algebra-Homomorphismus $\varphi : R[X_1,\dots,X_n] \to A \overset{\text{(a), 2.3}}{\Longrightarrow} A$ ist noethersch als $R[X_1,\dots,X_n]$-Modul. Sei $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k \subseteq \cdots$ Kette von Idealen in A. Jedes I_k ist $R[X_1,\dots,X_n]$-Modul $\Rightarrow$ Die Kette wird stationär

§2 Ganze Ringerweiterungen

Definition 2.6
Sei S/R eine Ringerweiterung (d.h. $R \subseteq S$).

(a) $b \in S$ heißt ***ganz*** über R, wenn es ein ***normiertes*** Polynom $f \in R[X]$ gibt mit $f(b) = 0$.

(b) S heißt ***ganz*** über R, wenn jedes $b \in S$ ganz über R ist.

Beispiele
$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ist ganz über $\mathbb{Z}$.
$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ ist nicht ganz über $\mathbb{Z}$ (Nullstelle von $2X - 1$).

Proposition 2.7
Sei S/R Ringerweiterung. Für $b \in S$ sind äquivalent:

(i) b ist ganz über R.

(ii) $R[b]$ ist endlich erzeugbarer R-Modul.

(iii) $R[b]$ ist enthalten in einem Unterring $S' \subseteq S$, der als R-Modul endlich erzeugt ist.

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Voraussetzung gibt es $a_0,\dots,a_{n-1} \in R$, sodass $b^n = a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_0$
$\Rightarrow b^n$ ist in dem von $1, b, \dots, b^{n-1}$ erzeugtem R-Untermodul von S enthalten. Sei M dieser Untermodul.
$\Rightarrow b^{n+1} = a_{n-1}b^n + \dots + a_0 b = a_{n-1}(\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i) + \dots + a_0 b \in M$

$\overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} b^k \in M$ für alle $k \geq 0 \Rightarrow M = R[b]$. Daraus folgt, dass $R[b]$ ein endlich erzeugbarer R-Modul ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Trivial (setze $S' = R[b]$).

(iii) $\Rightarrow$ (i): S' werde als R-Modul von $s_1, \dots, s_n$ erzeugt $\Rightarrow b \cdot s_i \in S'$, d.h. es gibt Elemente a_{ik} von R, die $b \cdot s_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} s_k$ für $i = 1, \dots, n$ erfüllen. Also ist $\sum_{k=1}^n (a_{ik} - \delta_{ik} \cdot b) \cdot s_k = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Matrix $A = (a_{ik} - \delta_{ik} \cdot b)_{i,k=1,\dots,n} \in S^{n \times n}$ gilt also $A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = 0$. Die Determinante $\det(A)$ ist normiertes Polynom in b vom Grad n mit Koeffizienten in R.
Beh.: $\det(A) = 0$.
Bew.: Cramersche Regel:
$A^\# := (b_{ij})$ mit $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'_{ji}), i, j = 1, \dots, n$ wobei A'_{ji} durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte aus A hervor geht.
$A \cdot A^\# = (c_{ik})$ mit $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{j+k} \det(A'_{kj}) = \begin{cases} i = k: & \det(A) \text{ (Laplace)} \\ i \neq k: & \det(A_k^i) = 0 \end{cases}$
$\det(A_k^i) = 0 :$ in der k-ten Zeile steht $a_{i1}, \dots, a_{in} \Rightarrow i$-te und k-te Zeile sind gleich.
$\Rightarrow A \cdot A^\# = \det(A) \cdot E_n = A^\# \cdot A \Rightarrow 0 = A^\# \cdot A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) \cdot s_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Da $1 \in S'$, gibt es $\lambda_i \in R$ mit $1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \Rightarrow \det(A) \cdot 1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \det(A) \cdot s_i = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$.

Proposition 2.8
Ist S/R Ringerweiterung, so ist $\bar{R} := \{b \in S : b \text{ ganz über } R\}$ ein Unterring von S.

Beweis
Seien $b_1, b_2 \in \bar{R}$.
Zu zeigen: $b_1 \pm b_2, b_1 \cdot b_2 \in \bar{R}$
Nach 2.7 genügt es zu zeigen: $R[b_1, b_2]$ ist endlich erzeugt als R-Modul.
Dazu: $R[b_1]$ ist endlich erzeugt als R-Modul (von $x_1, \dots, x_n$) nach 2.7. $R[b_1, b_2] = (R[b_1])[b_2]$ ist endlich erzeugt als $R[b_1]$-Modul (von $y_1, \dots, y_m$). Dann erzeugen die $x_i y_j$ $R[b_1, b_2]$ als R-Modul.

Definition 2.9
Sei S/R Ringerweiterung.

(a) $\bar{R}$ (wie in 2.8) heißt der ***ganze Abschluss*** von R in S.
(b) Ist $R = \bar{R}$, so heißt R ***ganz abgeschlossen*** in S.
(c) Ein nullteilerfreier Ring R heißt ***normal***, wenn er ganz abgeschlossen in $\mathrm{Quot}(R)$ ist.
(d) Ist R nullteilerfrei, so heißt der ganze Abschluss $\bar{R}$ von R in $\mathrm{Quot}(R)$ die ***Normalisierung*** von R.

Bemerkung 2.10
Jeder faktorielle Ring ist normal.

Beweis
Sei R ein faktorieller Ring.
Sei $K = \text{Quot}(R)$. Sei $x = \frac{a}{b} \in K^\times$ mit $a, b \in R$ teilerfremd. Sei x ganz über R. Dann gibt es $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in R$ mit $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \overset{\cdot b^n}{\Rightarrow} a^n + \alpha_{n-1}ba^{n-1} + \dots + \alpha_1 b^{n-1}a + \alpha_0 b^n = 0 \Rightarrow b \mid a^n$. Da a und b teilerfremd sind, kann dies nur gelten, wenn b invertierbar ist. Also ist $x \in R$. Daher ist R normal.

§3 Der Hilbert'sche Nullstellensatz

Satz 5 (Hilbert'scher Nullstellensatz)
Sei K ein Körper und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]$.
Dann ist $L := K[X_1, \dots, X_n]/_{\mathfrak{m}}$ eine algebraische Körpererweiterung von K.

Beweis
Für $n = 1$ ist das aus Algebra I bekannt. Nimm das als Induktionsanfang einer vollständigen Induktion nach n.

L wird als K-Algebra erzeugt von den Restklassen $x_1, \dots, x_n$ der $X_1, \dots, X_n$. Wenn $x_1, \dots, x_n$ algebraisch über K sind, so auch L. Wir nehmen an, dass sei nicht der Fall, sei also ohne Einschränkung x_1 transzendent über K.

Da L Körper, liegt $K' := K(x_1)$ in L, so dass $L \subset K'[X_2, \dots, X_n]$ ein Faktorring von $K'[X_2, \dots, X_n]$ nach einem maximalen Ideal ist.

$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} x_2, \dots, x_n$ sind algebraisch über $K' \Rightarrow \exists a_{i\nu} \in K' = K(x_1)$ mit $x_i^{n_i} + \sum_{\nu=0}^{n_i-1} a_{i\nu}x_i^\nu = 0$ für $i = 2, \dots, n$. Nennen wir den Hauptnenner der $a_{i\nu}$ von nun $b \in K[X_1] \Rightarrow x_2, \dots, x_n$ sind ganz über $K[x_1, b^{-1}] =: R$.

Beh.: R ist Körper.
denn: Sei $a \in R \setminus \{0\}$ und a^{-1} das Inverse von a in L. Da L ganz über R ist, gibt es $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} \in R$ mit $(a^{-1})^m + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (a^{-1})^i = 0 \overset{\cdot a^m}{\Rightarrow} 1 = -\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i a^{m-i} = a(-\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i a^{m-i-1}) \Rightarrow R$ ist Körper $\Rightarrow$ Widerspruch! R kann niemals Körper sein.

Definition 2.11
Sei $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann heißt die Teilmenge $V(I) \subseteq K^n$, die durch

$$V(I) := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \; \forall f \in I\}$$

bestimmt ist, die ***Nullstellenmenge*** von I in K^n.

Beispiele
1.) aus der LA bekannt: affine Unterräume des K^n sind Nullstellenmenge von linearen Polynomen.
2.) Anschaulicher Spezialfall von 1.):
Punkte in $K^n : (x_1, \dots, x_n) : V(X_1 - x_1, X_2 - x_2, \dots, X_n - x_n)$.

Bemerkung + Definition 2.12
(a) Für 2 Ideale $I_1 \subseteq I_2$ gilt $V(I_1) \supseteq V(I_2)$.

(b) Definiert man für eine beliebige Teilmenge $V \subseteq K^n$ das ***Verschwindungsideal*** von V durch
$$I(V) := \{f \in K[X_1, \dots, X_n] : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in V\},$$
so gilt $V \subseteq V(I(V))$;
ist V bereits Nullstellenmenge $V(I)$ eines Ideals I von $K[X_1, \dots, X_n]$,
so gilt sogar $V = V(I(V))$.

Beweis

(a) Sei $x \in V(I_2) \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall f \in I_2 \supseteq I_1 \Rightarrow x \in V(I_1)$

(b) "$\subseteq$": Definition von V und I

"$\supseteq$": Sei $V = V(I)$ für $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$. Nach Definition $I \subseteq I(V) \overset{(a)}{\Rightarrow} V(I(V)) \subseteq V(I) = V$

Satz (Schwacher Nullstellensatz)
Ist K algebraisch abgeschlossenen, so ist für jedes echte Ideal $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n] : V(I) \neq \emptyset$.

Beweis
Sei $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$ echtes Ideal. Nach Algebra I gibt es dann maximales Ideal $\mathfrak{m} \supseteq I$. Weiter gilt: $V(\mathfrak{m}) \subseteq V(I)$, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $I = \mathfrak{m}$ maximal ist.

Nach Satz 5 ist $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$ eine algebraische Körpererweiterung von K.
Da K algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} \cong K$.
Seien nun x_i die Restklasse von X_i in $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$ und $x = (x_1, \dots, x_n)$.
Für $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ ist $f(x) = f(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) = \bar{f} \bmod I \Rightarrow f(x) = 0 \forall \ f \in I \Rightarrow x \in V(I)$.

Satz (Starker Nullstellensatz)
Ist K algebraisch abgeschlossen, so gilt für jedes Ideal $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$:
$$I(V(I)) = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] : \exists d \geq 1 : f^d \in I\} =: \sqrt[d]{I}$$

Beweis (Rabinovitsch-Trick)
Sei $g \in I(V(I))$ und $f_1, \dots, f_m$ Idealerzeuger von $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$.
Zu zeigen: $\exists d \geq 1$ mit $g^d = \sum_{i=1}^m a_i f_i$ für irgendwelche a_i.

Sei $J \subseteq K[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$ das von $f_1, \dots, f_m, gX_{n+1} - 1$ erzeugte Ideal.

Beh.: $V(J) = \emptyset$

Bew.: Sei $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in V(J)$. Dann ist $f_i(x') = 0$ für $x' = (x_1, \dots, x_n)$ und $i = 1, \dots, m \Rightarrow x' \in V(I)$.

Nach Wahl von $g \in I(V(I))$ ist also $g(x') = 0$
$\Rightarrow (gX_{n+1} - 1)(x) = g(x')x_{n+1} - 1 = -1 \neq 0. \Rightarrow V(J) = \emptyset$.

Nach schwachen Nullstellensatz ist $J = K[X_1, \dots, X_{n+1}]$
$\Rightarrow \exists b_1, \dots, b_m$ und $b \in K[X_1, \dots, X_{n+1}]$ mit $\sum_{i=1}^m b_i f_i + b(gX_{n+1} - 1) = 1$.

Sei $R := R[X_1, \dots, X_{n+1}]/(gX_{n+1} - 1) \cong K[X_1, \dots, X_n][\frac{1}{g}]$. Unter dem Isomorphismus werden die f_i auf sich selbst, die b_i auf $\tilde{b_i} \in R$ abgebildet $\Rightarrow \sum_{i=1}^m \tilde{b_i} f_i = 1$ in R. Multipliziere mit dem Hauptnenner g^d der $\tilde{b_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \underbrace{(g^d \tilde{b_i})}_{\in K[X_1, \dots, X_n]} f_i = g^d \Rightarrow I(V(I)) \subseteq \sqrt[d]{I}$.

"$\supseteq$": klar.

§4 Graduierte Ringe und Moduln

Definition + Bemerkung 2.13

(a) Ein Ring S zusammen mit einer Zerlegung $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ in abelsche Gruppen S_i heißt ***graduierter Ring***, wenn für alle $i, j \in \mathbb{N}$:
$$S_i \cdot S_j \subseteq S_{i+j}$$

(b) Ist $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ graduierter Ring, so heißen die Elemente von S_i ***homogen*** vom Grad i. Für $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ heißen die f_i die homogenen Komponenten von f.

(c) Ist $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ graduierter Ring, so ist S_0 Unterring mit $1 \in S_0$.

Beweis

(c) $S_0 \cdot S_0 \subseteq S_{0+0} = S_0$

Sei $1 = \sum_{i \geq 0} e_i$ mit $e_i \in S_i$. Sei $f \in S_n$ mit $n \geq 1, f \neq 0$. $\Rightarrow f = f \cdot 1 = \sum_{i \geq 0} f e_i$ mit $f \cdot e_i \in S_{n+i}$. Da f nur auf eine Weise als Summe von homogenen Elementen geschrieben werden kann, ist $e_i = 0$ für $i \geq 0$ und $e_0 = 1$.

Definition + Bemerkung 2.14

Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ graduierter Ring.

(a) Ein Ideal $I \subseteq S$ heißt ***homogen***, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

(b) Ein Ideal $I \subseteq S$ ist genau dann homogen, wenn für jedes $f \in I$, $f = \sum_{i \geq 0} f_i$ $(f_i \in S_i)$ gilt: $f_i \in I$.

(c) Sei $I \subseteq S$ homogenes Ideal, erzeugt von homogenen Elementen $(h_\nu)_{\nu \in J}$. Dann hat jedes homogene $f \in I$ eine Darstellung $f = \sum_\nu g_\nu h_\nu$ mit g_ν homogen.

(d) Ist I homogenes Ideal in S, so ist ${}^S\!/\!_I$ graduierter Ring mit $\left({}^S\!/\!_I\right)_i = {}^{S_i}\!/\!_{(I \cap S_i)}$

Beweis

(b) "$\Leftarrow$": ✓

"$\Rightarrow$": Sei $(h_\nu)_{\nu \in J}$ homogenes Erzeugendensystem von I.

Sei $f \in I$. Dann gibt es $g_\nu \in S$ mit $f = \sum_\nu g_\nu h_\nu$. Sei $g_\nu = \sum_{i \geq 0} g_{\nu,i}$ Zerlegung in homogene Komponenten.

$\Rightarrow f = \sum_{\nu,i} g_{\nu,i} h_\nu \Rightarrow f_i = \sum_\nu g_{\nu, i - \deg f_\nu} h_\nu$ (mit $g_{\nu,j} = 0$ für $j < 0$) $\Rightarrow f_i \in I$

(d) $\varphi : S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i \to \bigoplus_{i \geq 0} S_i/(I \cap S_i)$ ist surjektiver Ringhomomorphismus. Kern(φ) wird erzeugt von $I \cap S_i$, $i \geq 0$. Da I homogen, ist Kern(φ) $= I$. Aus dem Homomorphiesatz folgt dann: $S/I \cong \bigoplus_{i \geq 0} S_i/(I \cap S_i)$

Beispiele

(1) $S = k[X, Y]$, $I = (Y - X^2)$ ist *nicht* homogen. $S/I \cong k[X]$, $\bigoplus_i S_i/(I \cap S_i) = \bigoplus_i S_i = S$, da I keine homogenen Elemente enthält.

(2) $S_+ := \bigoplus_{i > 0} S_i$ ist homogenes Ideal.

Ist S_0 Körper, so ist S_+ das einzige maximale homogene Ideal.

(3) $S = k[X, Y]$, $\deg(X) = 1$, $\deg(Y) = 2$. Dann ist $I = (Y - X^2)$ homogenes Ideal!

Definition + Bemerkung 2.15

Für einen graduierten Ring $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ sind äquivalent:

(i) S noethersch.

(ii) S_0 ist noethersch und S_+ endlich erzeugbares Ideal.

(iii) S_0 ist noethersch und S ist endlich erzeugbare S_0-Algebra.

Beweis
„**(i) ⇒ (ii)**": $S_0 \cong S/S_+$; S_+ endlich erzeugbar, da S noethersch. S_0 also noethersch.
„**(iii) ⇒ (i)**": $S \cong \underbrace{S_0[X_1, \dots, X_n]}_{\text{noethersch nach Satz 4}} /I$ für ein $n \geq 0$ und ein Ideal $I \subset S_0[X_1, \dots, X_n]$. S ist also noethersch.
„**(ii) ⇒ (iii)**": Sei $f_1, \dots, f_r$ homogenes Erzeugersystem von S_+, $S' := S_0[f_1, \dots, f_r] \subset S$ die von den f_i erzeugte S_0-Unteralgebra von S.
Beh.: $S' = S$
Zeige dazu: $S_i \subset S'$ für alle i.
Beweis der Behauptung durch Induktion über i:
$i = 0$: ✓
$i > 0$: $g \in S_i \overset{2.14(c)}{\Rightarrow} g = \sum_{\nu=1}^r g_\nu f_\nu$ mit $g_\nu \in S_{i-\deg(f_\nu)}$
$f_\nu \in S_+ \Rightarrow \deg(f_\nu) > 0 \Rightarrow i - \deg f_\nu < i \overset{\text{I.V.}}{\Longrightarrow} g_\nu \in S'$, also ist $g \in S'$

Definition + Bemerkung 2.16
Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ graduierter Ring.

(a) Ein ***graduierter*** S-Modul ist ein S-Modul M zusammen mit einer Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ in abelsche Gruppen M_i, sodass für alle $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$S_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$$

(b) Eine S-lineare Abbildung $\varphi : M \to M'$ zwischen graduierten S-Moduln heißt ***graderhaltend***, wenn $\varphi(M_i) \subseteq M'_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$

(c) Ein Ideal $I \subseteq S$ ist homogen ⇔ I ist als S-Modul graduiert (mit der geerbten Graduierung)

(d) Eine Abbildung $\varphi : M \to M'$ heißt *vom Grad d*, wenn $\varphi(M_i) \subseteq M'_{i+d}$ für alle i gilt.
In diesem Fall ist Kern(φ) ein graduierter Untermodul.
Graderhaltende Abbildungen sind genau die Abbildungen vom Grad 0.

(e) Ist $I \subseteq S$ homogenes Ideal, so ist $\varphi : S \to S/I = \bigoplus_{i \geq 0} S_i/(I \cap S_i)$ graderhaltend.

Beispiele
Sei M graduierter S-Modul (z.B.: $M = S$). Für $l \in \mathbb{Z}$ sei $M(l)$ der S-Modul M mit der Graduierung $(M(l))_i := M_{l+i}$ (insbes.: $(M(l))_0 = M_l$)
$S_j(M(l))_i = S_j \cdot M_{l+i} \subseteq M_{j+l+i} = (M(l))_{i+j}$
$M(l)$ heißt (l-facher) ***Twist*** von M.

Beweis

(d) Sei $\varphi : M \to M'$ lineare Abbildung von S-Moduln vom Grad d. Sei $x \in \text{Kern}(\varphi), x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i \Rightarrow 0 = \varphi(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \underbrace{\varphi(x_i)}_{\in M'_{i+d}}$ ist Zerlegung in homogene Komponenten $\Rightarrow \varphi(x_i) = 0 \; \forall i \Rightarrow x_i \in \text{Kern}(\varphi) \; \forall i \Rightarrow \text{Kern}(\varphi)$ ist graduiert.

Beobachtung
Ist $\varphi : M \to M'$ vom Grad d, so ist $\varphi : M \to M'(d)$ graderhaltend. Dabei ist $M'(d) = M'$ als S-Modul, aber $(M'(d))_i = M_{d+i}$. Genauso ist $\varphi : M(-d) \to M'$ graderhaltend.

Beispiele
$M = S(= k[X_1, \ldots, X_n]), f \in S$ homogen vom Grad $d \Rightarrow \varphi_f : S \to S, g \mapsto f \cdot g$ ist linear vom Grad d.

Proposition 2.17
Sei $S = k[X_1, \ldots, X_n], k$ ein Körper, $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$.

$$\dim S_d^{(n)} = \binom{n+d-1}{d} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot (n+d-1) \cdots (d+1)$$

Das ist ein Polynom vom Grad $n-1$ in d (mit Leitkoeffizient $\frac{1}{(n-1)!}$).

Beweis
Induktion über n:

$n = 1$**:** $S = k[X]$, $\dim S_d^{(1)} = \binom{d}{d} = 1$. ✓

$n = 2$**:** $S = k[X_1, X_2]$, $\dim S_d^{(2)} = \binom{d+1}{d} = d + 1$. ✓

$n > 2$**:** Induktion über d:

$d = 0$**:** $\dim S_0^{(n)} = \binom{n-1}{0} = 1$. ✓

$d = 1$**:** $\dim S_1^{(n)} = \binom{n}{1} = n$. ✓

$d > 1$**:** $\dim S_d^{(n)}$ ist die Anzahl der Monome vom Grad d in $X_1, \ldots, X_n$.
In $S_d^{(n)}$ gibt es $\dim S_d^{(n-1)}$ Monome in denen X_n nicht vorkommt und $\dim S_{d-1}^{(n)}$ Monome in denen X_n vorkommt
$\overset{\text{I.V.}}{\Longrightarrow} \dim S_d^{(n)} = \binom{n+d-2}{d} + \binom{n+d-2}{d-1} = \frac{(n+d-2)!}{(d-1)!(n-2)!}(\frac{1}{d} + \frac{1}{n-1}) = \frac{(n+d-2)!}{(d-1)!(n-2)!}\frac{n+d-1}{d(n-1)} = \frac{(n+d-1)!}{d!(n-1)!} = \binom{n+d-1}{d}$

Satz 6 (Hilbert-Polynom)
Sei k ein Körper, $S = k[X_1, \ldots, X_n]$. Sei M ein endlich erzeugbarer graduierter S-Modul.

Dann gibt es ein Polynom $P_M \in \mathbb{Q}[T]$ vom Grad $\leq n-1$ und ein $d_0 \in \mathbb{N}$, sodass $P_M(d) = \dim_k M_d$ für alle $d \geq d_0$.

P_M heißt das ***Hilbert-Polynom*** von M.

Beweis
Induktion über n:

$n = 0$: M ist endlich dimensionaler k-Vektorraum, also $M_d = 0$ für alle $d \gg 0, P_M = 0$ tut's.

$n \geq 1$: Sei $\varphi : M \to M$ die S-lineare Abbildung $x \mapsto X_n x$, φ ist vom Grad 1, Kern(φ) ist also graduierter Untermodul, ebenso ist Bild(φ) graduierter Untermodul, also auch M/X_nM.

Dann ist

$$0 \to \underbrace{K}_{=\text{Kern}(\varphi)} \to M(-1) \overset{\varphi}{\to} M \to {}^{M}\!/\!_{X_nM} \to 0$$

exakte Sequenz von graderhaltenden Homomorphismen zwischen graduierten endlich erzeugbaren S-Moduln.

Beachte: M ist noetherscher Modul, da S noethersch und M endlich erzeugbar, also ist K auch endlich erzeugbar.

Alle $M_d, K_d, (M/X_nM)_d$ sind endlich dimensionale k-Vektorräume $\Rightarrow$ für jedes $d \in \mathbb{Z}$ gilt: $\dim_k K_d - \dim_k M(-1)_d + \dim_k M_d - \dim_k(M/X_nM)_d = 0$ bzw.

$$\dim_k M_d - \dim_k M_{d-1} = \dim_k(M/X_nM)_d - \dim_k K_d$$

Beh.: M/X_nM und K sind (in natürlicher Weise) $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$-Moduln.

Bew.: klar für M/X_nM.
für K: Seien $y_1, \dots, y_r$ Erzeuger von K als S-Modul. Sei $y = \sum_{i=1}^r f_i y_i \in K, f_i \in S$. Dann ist ohne Einschränkung $f_i \in k[X_1, \dots, X_{n-1}]$, da $X_n \cdot y = 0$ für alle i.

Nach I.V. gibt es $\tilde{P} \in \mathbb{Q}[T]$ mit $\deg(\tilde{P}) \leq n-2$ und $\tilde{P} = \dim_k(M/X_nM)_d - \dim_k K_d = \dim_k M_d - \dim_k M_{d-1} =: H(d) - H(d-1)$.
Sei $\binom{T}{k} := \frac{1}{k!}T(T-1)\dots(T-k+1) \in \mathbb{Q}[T], \deg\binom{T}{k} = k$.
Schreibe $\tilde{P} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \binom{T}{k}$. Es gilt $\binom{T}{k} - \binom{T-1}{k-1} = \binom{T}{k+1}$. Setze $P_1(T) := \sum_{k=0}^{n-2} c_k \binom{T}{k+1}, \deg(P_1) \leq n-1$ und $P_1(d) - P_1(d-1) = \tilde{P}(d)$. $P_M := P_1 + c$, sodass $P_M(d_0) = \dim_k M_{d_0}$.

Definition 2.18
Sei S endlich erzeugte graduierte k-Algebra, $S_0 = k$, M endlich erzeugbarer graduierter S-Modul. Dann heißt die formale Potenzreihe

$$H_M(t) := \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_k M_i) t^i$$

Hilbert-Reihe zu M.

Beispiele

1.) $M = S = k[X] \Rightarrow \dim M_i = 1$ für alle $i \Rightarrow H_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$.
2.) $M = S = k[X_1, \dots, X_n]$
Beh.: $H_M(t) = \frac{1}{(1-t)^n}$
Bew.: $\frac{1}{(1-t)^n} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ mit $c_i =$ (Anzahl aller n-Tupel $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $k_1 + k_2 + \dots + k_n = i$) $=$ (Anzahl der Monome vom Grad i in $X_1, \dots, X_n$).
3.) $M = S = k[Y] (\cong k[X^d]), \deg Y = d > 0 \Rightarrow H_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^{d \cdot i} = \frac{1}{1-t^d}$
$$\dim M_i = \begin{cases} 1: & d \mid i \\ 0: & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz (6′)
Wie in Definition 2.18 seien S endlich erzeugbare graduierte k-Algebra, M endlich erzeugbarer graduierter S-Modul.
$f_1, \dots, f_r$ homogene Erzeuger von S als k-Algebra, $d_i := \deg f_i$.
Dann gibt es ein Polynom $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$, sodass gilt:

$$H_M(t) = \frac{F(t)}{(1-t^{d_1}) \cdot (1-t^{d_2}) \cdot \ldots \cdot (1-t^{d_r})}$$

Beweis
Induktion über r:

$r = 0$: $S = S_0 = k \Rightarrow \dim_k M_i = 0$ für $i \gg 0 \Rightarrow F(t) := H_M(t)$ ist Polynom in $\mathbb{Z}[t]$.

$r > 0$: Multiplikation mit f_r gibt exakte Sequenz von graderhaltenden S-Modul-Homomorphismen:

$$0 \to K \to M \xrightarrow{\cdot f_r} M(d_r) \to (M/f_rM)(d_r) \to 0$$

Wie im Beweis von Satz 6 sind K und $Q := M/f_rM$ Moduln über $S' := k[f_1, \dots, f_{r-1}] \subset S \Rightarrow$ für jedes $i \geq 0$ ist

$$-\dim M_i + \dim M_{i+d_r} = \dim Q_{i+d_r} - \dim K_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \dim M_{i+d_r} t^{i+d_r} - t^{d_r} \sum_{i=0}^{\infty} \dim M_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \dim Q_{i+d_r} t^{i+d_r} - t^{d_r} \sum_{i=0}^{\infty} \dim K_i t^i$$

$$\Rightarrow H_M(t) - \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim M_i t^i - t^{d_r} H_M(t) = H_Q(t) - \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim Q_i t^i - t^{d_r} H_K(t)$$

$$(1 - t^{d_r}) H_M(t) = H_Q(t) - t^{d_r} H_K(t) + \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim M_i t^i - \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim Q_i t^i$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $F_1(t), F_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$ mit

$$(1 - t^{d_r}) H_M(t) = \frac{F_1(t)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1 - t^{d_i})} - \frac{t^{d_r} F_2(t)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1 - t^{d_i})} + \underbrace{\sum_{i=0}^{d_r-1} \dim M_i t^i - \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim Q_i t^i}_{=:G(t)}$$

$\Rightarrow$ Behauptung mit $F(t) = F_1(t) - t^{d_r} F_2(t) + G(t) \cdot \prod_{i=1}^{r-1}(1 - t^{d_i})$

§5 Invarianten endlicher Gruppen

Definition + Bemerkung 2.19
Sei k ein Körper, $n \geq 0$, $k[\mathfrak{X}] := k[X_1, \dots, X_n]$.

Sei $G \subseteq \mathrm{Aut}(k[\mathfrak{X}])$ eine Untergruppe der k-Algebra-Automorphismen.

(a) $k[\mathfrak{X}]^G := \{f \in k[\mathfrak{X}] : \sigma(f) = f$ für alle $\sigma \in G\}$ heißt ***Invariantenring*** von $k[\mathfrak{X}]$ bezüglich G.

(b) $k[\mathfrak{X}]^G$ ist k-Algebra.

(c) G heißt ***linear***, wenn jedes $\sigma \in G$ graderhaltend ist. Dann ist $\sigma|_{k[\mathfrak{X}]_1}$ ein k-Vektorraum-Automorphismus und $\sigma \mapsto \sigma|_{k[\mathfrak{X}]_1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{GL}_n(k)$.

Beispiele

1.) $n = 2$, $G = \{id, \sigma\}$ mit $\sigma(X) = Y$, $\sigma(Y) = X \Rightarrow k[X,Y]^G$ wird erzeugt von $X + Y$ und $X \cdot Y$.
$X^k + Y^k - (X+Y)^k = -kX^{k-1}Y - \dots - kXY^{k-1} = -kXY(X^{k-2} + Y^{k-2}) - \dots$

2.) $n = 2$, $G = \{id, \varphi\}$ mit $\varphi(X) = -X$, $\varphi(Y) = -Y$ (wobei $\mathrm{char}\, k \neq 2$).
$k[X,Y]^G$ wird erzeugt von X^2, Y^2, XY.

Satz 7 (Endliche Erzeugbarkeit des Invariantenrings)
Seien k, G, $k[\mathfrak{X}]$ wie in Def. 2.19, G linear und endlich.

(a) (Hilbert) Angenommen, char k sei kein Teiler von $|G|$. Dann ist $k[\mathfrak{X}]^G$ eine endlich erzeugbare k-Algebra.

(b) (E. Noether) Angenommen, char k sei kein Teiler von $|G|!$. Ist $m = |G|$, so wird $k[\mathfrak{X}]^G$ von Elementen vom Grad $\leq m$ erzeugt.

Beweis

(a) Sei $S := k[\mathfrak{X}]^G$ (graduierte Unteralgebra von $k[\mathfrak{X}]$).
$S_+ = \bigoplus_{i>0} S_i$, $I := S_+k[\mathfrak{X}]$ (Ideal in $k[\mathfrak{X}]$) $\Rightarrow I$ ist endlich erzeugt (da $k[\mathfrak{X}]$ noethersch ist). Somit enthält auch das Erzeugendensystem $\{s \in S_+ \mid s \text{ ist homogen}\}$ von I eine endliche Teilmenge, die I erzeugt (denn wannimmer ein Ideal J eines Ringes R endlich erzeugt ist, enthält jedes Erzeugendensystem von J eine endliche Teilmenge, die J erzeugt).
Seien also $f_1, \ldots, f_r \in S_+$ homogene Erzeuger von I. Sei $S' := k[f_1, \ldots, f_r] \subseteq S$.

Beh.: $S = S'$.

Bew.: Zeige mit Induktion: $S_d \subset S'$ für jedes $d \geq 0$.

$d = 0$: $S_0 = k = S'_0$.

$d \geq 1$: Sei $f \in S_d$. Dann ist $f \in S_+ \subseteq I \Rightarrow f = \sum_{i=1}^r g_i f_i$ mit $g_i \in k[\mathfrak{X}]_{d-d_i}$, $d_i = \deg(f_i)$ $\Rightarrow \deg(g_i) < d$.
Jetzt definieren wir die „Mittelung“: Die Abbildung $\varphi : k[\mathfrak{X}] \to S$, $h \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G}\sigma(h)$ ist eine S-lineare, graderhaltende Projektion.
$\Rightarrow$ Wegen $f \in S_+ \subset S$ ist $f = \varphi(f) = \sum_{i=1}^r \varphi(g_i)f_i$ (da $f = \sum_{i=1}^r g_i f_i$) mit $\varphi(g_i) \in S$, $\deg(\varphi(g_i)) < d$.
Also nach Induktionsvoraussetzung $\varphi(g_i) \in S' \Rightarrow f \in S'$.
Damit ist induktiv gezeigt, daß $S_d \subset S'$ für jedes $d \geq 0$ ist. Somit ist $S = \sum_{d \geq 0} S_d \subset \sum_{d\geq 0} S' = S'$. $\Rightarrow k[f_1, \ldots, f_r] = S' = S = k[\mathfrak{X}]^G$, was zu zeigen war.

Bevor wir den Beweis mit Teil (b) fortsetzen, fügen wir ein Beispiel ein:

Beispiele
S_n operiert auf $k[X_1, \ldots, X_n]$ durch $\sigma(X_i) := X_{\sigma(i)}$. Die Elemente von $k[X_1, \ldots, X_n]^{S_n}$ sind die symmetrischen Polynome.

Beh.1:
$k[X_1, \ldots, X_n]^{S_n}$ wird (als k-Algebra) erzeugt von den „elementarsymmetrischen“ Polynomen:
$s_1 := X_1 + \cdots + X_n$
$s_2 := X_1X_2 + X_1X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j$
$s_3 := \sum_{1 \leq i<j<k\leq n} X_iX_jX_k$
$\vdots$
$s_n := X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$
(dies gilt für Körper jeglicher Charakteristik, und sogar allgemeiner für kommutative Ringe).

Beh.2: $k[X_1, \ldots, X_n]^{S_n}$ wird erzeugt von den Potenzsummen
$f_k := \sum_{i=1}^n X_i^k$, $k = 1, \ldots, n$ wenn char k kein Teiler von n ist. (Man bemerke, dass $f_1 = s_1 = \sum X_i$.)

Bemerkung
Die Abbildung $\varphi : k[\mathfrak{X}] \to k[\mathfrak{X}]^G$, $f \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma(f)$ ist k-lineare (und sogar $k\,[\mathfrak{X}]^G$-lineare) graderhaltende Projektion.

Beweis

(b) Für jedes $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ setze $X^\nu := X_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n}$ und $|\nu| := \sum \nu_i$. Sei $\tilde{S}$ die von den $\varphi(X^\nu)$, $|\nu| \leq |G|$ erzeugte Unteralgebra von $k[\mathfrak{X}]^G$.

Zu zeigen: $\varphi(X^\nu) \in \tilde{S}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}^n$.

Wir definieren Hilfspolynome in $2n$ Variablen: Für jedes $d \geq 0$ sei $F_d := \sum_{\sigma \in G}(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sigma(X_i)Y_i}_{=:Z_\sigma})^d \in$

$k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$.
Für jedes $\sigma \in G$ sei $Z_\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma(X_i) Y_i$. Dann ist also $F_d = \sum_{\sigma \in G} Z_\sigma^d$. Schreiben wir G in der Form $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$, mit $|G| = m$, so wird hieraus $F_d = \sum_{i=1}^m Z_i^d$, wobei $Z_j := Z_{\sigma_j}$.

Umformungen: Sei $\gamma_\nu = \frac{d!}{\nu_1! \cdot \ldots \cdot \nu_n!}$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}^n$ mit $|\nu| = d$. Jedes $\sigma \in G$ erfüllt dann $Z_\sigma^d = \left(\sum_{i=1}^n \sigma(X_i) Y_i\right)^d = \sum_{|\nu|=d} \gamma_\nu \sigma(X^\nu) Y^\nu$. Aus $F_d = \sum_{\sigma \in G} Z_\sigma^d$ wird mithin

(1) $F_d = \sum_{\sigma \in G} \sum_{|\nu|=d} \gamma_\nu \sigma(X^\nu) Y^\nu = \sum_{|\nu|=d} \gamma_\nu (\sum_{\sigma \in G} \sigma(X^\nu) Y^\nu) = \sum_{|\nu|=d} \gamma_\nu m \varphi(X^\nu) Y^\nu$.

Sei nun $d \geq 0$ beliebig. Doch nach Beh.2 wird der Polynomring $k\left[W_1, \ldots, W_m\right]^{S_m}$ (wobei die W_i neue Variablen sind) erzeugt von den m Potenzsummen $p_j := \sum_{i=1}^m W_i^j$ für $j = 1, 2, \ldots, m$. Also muß das Polynom $\sum_{i=1}^m W_i^d$ ein Polynom in diesen m Potenzsummen p_j sein (da es in $k\left[W_1, \ldots, W_m\right]^{S_m}$ liegt). Es gibt also für jedes $\mu \in \mathbb{N}^m$ mit $\sum_{i=1}^m i\mu_i = d$ ein Skalar $a_\mu \in k$, so daß die Gleichung $\sum_{i=1}^m W_i^d = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^m} a_\mu p_1^{\mu_1} \cdot \cdots \cdot p_m^{\mu_m}$ gilt, wobei die Summe (aus Homogeneitätsgründen) sich nur über alle $\mu \in \mathbb{N}^m$ mit $\sum_{i=1}^m i\mu_i = d$ erstreckt. Setzen wir in dieser Gleichung die m Terme $Z_1, \ldots, Z_m$ für die m Variablen $W_1, \ldots, W_m$ ein, so erhalten wir

$F_d = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^m} a_\mu F_1^{\mu_1} \cdot \cdots \cdot F_m^{\mu_m}$

(denn durch die Einsetzung wird $\sum_{i=1}^m W_i^d$ zu $\sum_{i=1}^m Z_i^d = F_d$ ausgewertet, und $p_j = \sum_{i=1}^m W_i^j$ zu $\sum_{i=1}^m Z_i^j = F_j$ für jedes j). Mit anderen Worten:

(2) $F_d = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^m} a_\mu \prod_{j=1}^m F_j^{\mu_j} \overset{(1)}{=} \sum_{\mu \in \mathbb{N}^m} a_\mu \prod_{j=1}^m (\sum_{|\nu|=j} \gamma_\nu m \varphi(X^\nu) Y^\nu)^{\mu_j} \underset{\text{Potenzen von } Y}{\overset{\text{sortieren nach}}{=}} \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^m} P_\lambda(X) Y^\lambda$ mit $P_\lambda \in \tilde{S}$.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{N}^m$ können wir nun zwischen (1) und (2) die Koeffizienten vor Y^λ vergleichen (wobei wir $X_1, \ldots, X_n$ als Konstanten betrachten), und erhalten hierdurch:

$$P_\lambda = \begin{cases} 0 & , |\lambda| \neq d \\ \gamma_\lambda m \varphi(X^\lambda) & , |\lambda| = d \end{cases}.$$

Hieraus folgt $\varphi(X^\lambda) \in \tilde{S}$ für alle $\lambda \in \mathbb{N}^m$, die $|\lambda| = d$ erfüllen. Da d beliebig gewählt war, ist also $\varphi(X^\lambda) \in \tilde{S}$ für alle $\lambda \in \mathbb{N}^m$. Das gesamte Bild von φ ist also in $\tilde{S}$ enthalten. Da das Bild von φ aber $k\left[\mathfrak{X}\right]^G$ ist, heißt dies, dass $k\left[\mathfrak{X}\right]^G$ in $\tilde{S}$ enthalten, d. h., von Elementen vom Grad $\leq m$ erzeugt ist.

Beispiele

Sei $n = 2$; der Kürze halber bezeichnen wir dann die beiden Variablen X_1 und X_2 mit X und Y. Sei nun $G = \langle\sigma\rangle$, wobei σ durch $\sigma(X) = Y$ und $\sigma(Y) = -X$ definiert ist. Dann ist $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ Durchrechnen aller Monome mit Grad $\leq |G|$:

$f = id(f)$	$\sigma(f)$	$\sigma^2(f)$	$\sigma^3(f)$	$\sum_{\tau\in G} \tau(f) = 4\varphi(f)$
X	Y	$-X$	$-Y$	0
Y	$-X$	$-Y$	X	0
X^2	Y^2	X^2	Y^2	$2(X^2+Y^2)$
Y^2	X^2	Y^2	X^2	$2(X^2+Y^2)$
XY	$-YX$	XY	$-YX$	0
X^3	Y^3	$-X^3$	$-Y^3$	0
Y^3	$-X^3$	$-Y^3$	X^3	0
X^2Y	$-XY^2$	$-X^2Y$	XY^2	0
XY^2	X^2Y	$-XY^2$	$-X^2Y$	0
X^4	Y^4	X^4	Y^4	$2(X^4+Y^4)$
XY^3	$-X^3Y$	XY^3	$-X^3Y$	$2XY(Y^2-X^2)$
X^2Y^2	X^2Y^2	X^2Y^2	X^2Y^2	$4(X^2Y^2)$

$\Rightarrow k[X,Y]^G$ wird erzeugt von $I_1 = X^2+Y^2,\ I_2 = X^2Y^2,\ I_3 = XY(X^2-Y^2)$ (und $I_4 = X^4+Y^4 = I_1^2 - 2I_2$). Zwischen I_1, I_2, I_3 besteht die Gleichung $I_3^2 = I_2(X^4+Y^4-2X^2Y^2) = I_1(I_1^2-4I_2)$

§6 Nakayama, Krull und Artin-Rees

Definition + Bemerkung 2.20
Sei R ein Ring.

(a)
$$\mathcal{J}(R) := \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ maximales Ideal in } R} \mathfrak{m}$$
heißt ***Jacobson-Radikal*** von R.

(b) $\mathcal{J}(R)$ ist Radikalideal.

(c) Für jedes $a \in \mathcal{J}(R)$ ist $1-a$ eine Einheit in R.

Beweis

(b) Sei $x \in R,\ x^n \in \mathcal{J}(R)$; zu zeigen: $x \in \mathcal{J}(R)$.
Sei $\mathfrak{m}$ maximales Ideal von R, dann ist $x^n \in \mathfrak{m} \overset{\mathfrak{m}\text{ prim}}{\Rightarrow} x \in \mathfrak{m} \Rightarrow x \in \mathcal{J}(R)$

(c) Ist $1-a \notin R^\times$, so gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $1-a \in \mathfrak{m}$,
aber: a ist auch $\in \mathfrak{m}$, also auch $1 = 1-a+a \in \mathfrak{m} \Rightarrow$ Widerspruch.

Beispiele
$\mathcal{J}(\mathbb{Z}) = 0, \quad \mathcal{J}(k[X]) = 0$
R lokaler Ring $\Rightarrow \mathcal{J}(R) = \mathfrak{m}$ (es gibt nur ein maximales Ideal in R)

Satz 8 (Lemma von Nakayama)
Sei R ein Ring, $I \subseteq \mathcal{J}(R)$ ein Ideal, M ein endlich erzeugbarer R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul.
Dann gilt:
$$\text{Ist } M = I \cdot M + N, \text{ so ist } N = M$$
Speziell: Ist $M = I \cdot M \Rightarrow M = 0$.

Beweis
Sei $M = I\cdot M + N \Rightarrow M/N = (I\cdot M)/N = I \cdot M/N$, also ohne Einschränkung $N = 0$.
Annahme: $M \neq 0$
Dann sei $x_1, \ldots, x_n$ ein minimales Erzeugendensystem von M, also $M' := \langle x_2, \ldots, x_n\rangle \subsetneq M$.

Nach Voraussetzung ist $M = I \cdot M$, also $x_1 \in I \cdot M \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in I$ mit $x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + \underbrace{a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}_{\in M'} \Rightarrow x_1 \underbrace{(1 - a_1)}_{\in R^\times \text{ 2.20 (c)}} \in M' \Rightarrow x_1 \in M'$. Widerspruch.

Folgerung 2.21
R, I, M wie in Satz 8.
Dann gilt für $x_1, \dots, x_n \in M$:

$$x_1, \dots, x_n \text{ erzeugt } M \Leftrightarrow \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n} \text{ erzeugen } \overline{M} = {}^{M}\!/_{IM}$$

Beweis
„$\Rightarrow$": klar.

„$\Leftarrow$": Sei N der von $x_1, \dots, x_n$ erzeugte Untermodul von M. Dann ist $M = N + I \cdot M \overset{\text{Satz 8}}{\Rightarrow} M = N$.

Beispiele
R lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. $M = \mathfrak{m}$, $I = \mathfrak{m}$.
Falls $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt (dies gilt z.B. falls R noethersch ist): $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{m} = 0$, also R Körper.

Satz 9 (Durchschnittssatz von Krull)
Sei R noethersch, M endlich erzeugbarer R-Modul, $I \subseteq R$ Ideal.
Dann gilt für

$$N := \bigcap_{n \geq 0} I^n M \quad : \quad I \cdot N = N$$

Folgerung 2.22
(a) Ist in Satz 9 $I \subseteq \mathcal{J}(R)$, so ist $N = 0$.
(b) Ist R nullteilerfrei, so ist $\bigcap_{n \geq 0} I^n = 0$, falls $I \neq R$.

Beweis
(a) klar.
(b) Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal mit $I \subseteq \mathfrak{m}$. $R_\mathfrak{m}$ die Lokalisierung von R nach $\mathfrak{m}$.
$R_\mathfrak{m}$ ist noethersch, lokal, also $\mathcal{J}(R_\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} R_\mathfrak{m}$.
$i : R \to R_\mathfrak{m}$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ ist injektiv, da R nullteilerfrei.
Dann ist $i(\bigcap_{n \geq 0} I^n) \subseteq \bigcap_{n \geq 0} i(I^n) \subseteq \bigcap_{n \geq 0} (\mathfrak{m} R_\mathfrak{m})^n \overset{\text{(a)}}{=} 0$.
Da i injektiv ist, folgt $\bigcap_{n \geq 0} I^n = 0$.

Proposition 2.23 (Artin-Rees)
Sei R noethersch, $I \subseteq R$ Ideal, M endlich erzeugbarer R-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul.
Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$I^n M \cap N = I^{n-n_0}(I^{n_0} M \cap N)$$

Beweis (Satz 9)
Setze in Prop. 2.23 (Artin-Rees) $N = \bigcap_{n \geq 0} I^n M$. Betrachte das n_0 aus Prop. 2.23 (Artin-Rees).

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } N &= \bigcap_{n \geq 0} I^n M = I^{n_0+1} M \cap \bigcap_{n \geq 0} I^n M = I^{n_0+1} M \cap N \\ &\overset{\text{Artin-Rees}}{=} I(I^{n_0} M \cap N) = I(I^{n_0} M \cap \bigcap_{n \geq 0} I^n M) = I \cdot \bigcap_{n \geq 0} I^n M = I \cdot N \end{aligned}$$

Beweis (Prop. 2.23)
Führe Hilfsgrößen ein:
$R' := \bigoplus_{n\geq 0} I^n$ ist graduierter Ring, $R'_0 = R$ ist noethersch, I ist endlich erzeugt,
$\Rightarrow R'$ ist noethersch (als endlich erzeugte R-Algebra),
$M' := \bigoplus_{n\geq 0} I^n M$ ist graduierter, endlich erzeugter R'-Modul,
$N' := \bigoplus_{n\geq 0} \underbrace{I^n M \cap N}_{=:N'_n}$ ist graduierter R'-Modul, Untermodul von M', also auch endlich erzeugbar. N' werde erzeugt von den homogenen Elementen $x_1, \dots, x_r$ mit $x_i \in N'_{n_i}$.
Für $n \geq n_0 := \max\{n_1, \dots, n_r\}$ ist dann $N'_{n+1} = \{\sum_{i=1}^r a_i x_i :\ a_i \in R'_{n+1-n_i} = I^{n+1-n_i}\}$.
$I \cdot N'_n = I \cdot \{\sum_{i=1}^r a_i x_i :\ a_i \in R'_{n-n_i} = I^{n-n_i}\} = \{\sum_{i=1}^r \tilde{a}_i x_i :\ \tilde{a}_i \in I \cdot I^{n-n_i} = I^{n+1-n_i}\} = N'_{n+1}$.
Mit Induktion folgt die Behauptung.

Beispiele

1) $R = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist noethersch, aber nicht nullteilerfrei.
   Sei I das von $e_1 = (1,0)$ erzeugte Ideal, $I^2 = (e_1^2) = (e_1) = I$ (e_1 ist „idempotent“)
   $e \in R$ heißt idempotent, wenn $e^2 = e$ ist. Dann ist $(e-1)e = 0$.
   Frage: was ist $\mathbb{Z}^2$ lokalisiert nach I?
   Antwort: $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_I = \mathbb{Q}$.
2) $R = \mathcal{C}^\infty(-1,1),\ I = \{f \in R :\ f(0) = 0\}$. $R/I = \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$).
   I ist Hauptideal, erzeugt von $f(x) = x$.
   $\bigcap I^n = ?$ z.B. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \in \bigcap I^n$.
   R ist nicht noethersch!
3) $R = k[X,Y],\ I = (X,Y),\ k$ algebraisch abgeschlossen.
   $R' = R \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots = \bigoplus_{n\geq 0} I^n = R[u,v]/(Xv - Yu)$.
   Was sind die maximalen homogenen Ideale in R', die nicht ganz R'_+ enthalten?
   Typ 1: maximale Ideale in $R, \neq (X,Y) : (X-a, Y-b)$ mit $(a,b) \neq (0,0)$
   Typ 2: $(X, Y, \alpha u + \beta v),\ (\alpha,\beta) \neq (0,0)$

§7 Krull-Dimension

Definition 2.24
Sei R ein Ring.

(a) Eine Folge $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in R heißt ***Primidealkette*** zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$ der Länge n, wenn $\mathfrak{p}_{i-1} \subsetneq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

(b) Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ heißt

$$h(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{es gibt Primidealkette der Länge } n \text{ zu } \mathfrak{p}\}$$

die ***Höhe*** von $\mathfrak{p}$.

(c) $\dim\ R := \sup\{h(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p}$ Primideal in $R\}$ heißt ***Krull-Dimension*** von R.

Beispiele

(a) $R = k$ Körper: $\dim\ k = 0$
(b) $R = \mathbb{Z}$: $\dim\ \mathbb{Z} = 1$
(c) $R = k[X]$: $\dim\ k[X] = 1$

(d) $R = k[X,Y]$: dim $k[X,Y] = 2$
≥ 2 ist klar, da $(0) \subsetneq (X) \subsetneq (X,Y)$. Aber warum $= 2$?

Bemerkung 2.25
Sei R ein nullteilerfreier Ring. Dann gilt:

(a) Sind p, q Primelemente, $p \neq 0 \neq q$ mit $(p) \subseteq (q)$, so ist $(p) = (q)$.

(b) Ist R Hauptidealring, so ist R Körper oder $\dim(R) = 1$

Beweis

(a) $(p) \subseteq (q) \Rightarrow p \in (q)$, d.h. $p = q \cdot r$ für ein $r \in R$.
Da R nullteilerfrei, ist p irreduzibel, also $r \in R^\times \Rightarrow (p) = (q)$

(b) $\dim R \leq 1$ nach (a). Sei R kein Körper, also gibt es ein $p \in R$ $(p \neq 0)$ mit $p \notin R^\times$.
Da R nullteilerfrei, ist (0) Primideal; p ist in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ enthalten ($\mathfrak{m} = (q)$)
$\Rightarrow (0) \subsetneq \mathfrak{m}$ ist Kette der Länge $1 \Rightarrow \dim(R) \geq 1 \Rightarrow \dim(R) = 1$

Satz 10
Sei S/R eine ganze Ringerweiterung. Dann gilt:

(a) Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ in R gibt es ein Primideal $\mathfrak{P}$ in S mit $\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$

(b) Zu jeder Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ in R gibt es eine Primidealkette $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_n$ in S mit $\mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$

(c) dim $R =$ dim S

Beweis

(a) **Beh. 1:** $\mathfrak{p} \cdot S \cap R = \mathfrak{p}$

Dann sei $N := R \setminus \mathfrak{p}$ und $\mathcal{P} := \{I \subseteq S \text{ Ideal} : I \cap N = \emptyset,\ \mathfrak{p} \cdot S \subseteq I\}$

Nach Beh. 1 ist $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Nach Zorn gibt es ein maximales Element $\mathfrak{P}$ in $\mathcal{P}$. Die Aussage folgt also aus Beh 2.:

Beh. 2: $\mathfrak{P}$ ist Primideal.
Bew. 2: Seien $b_1, b_2 \in S \setminus \mathfrak{P}$ mit $b_1 \cdot b_2 \in \mathfrak{P}$. Dann sind $\mathfrak{P} + (b_1)$ und $\mathfrak{P} + (b_2)$ nicht in $\mathcal{P}$. Es gibt also $s_i \in S$ und $p_i \in \mathfrak{P}$ $(i = 1, 2)$ mit $p_i + s_i \cdot b_i \in N$. $\Rightarrow (p_1 + s_1 b_1)(p_2 + s_2 b_2) \in N \cap \mathfrak{P} = \emptyset$. Widerspruch.

Bew. 1: Sei $b \in \mathfrak{p} \cdot S \cap R$, $b = p_1 t_1 + \ldots + b_k t_k$ mit $p_i \in \mathfrak{p}, t_i \in S$. Da S ganz ist über R, ist $S' := R[t_1, \ldots, t_k] \subseteq S$ endlich erzeugbarer R-Modul.

Seien $s_1, \ldots, s_n$ R-Modul Erzeuger von S'. Für jedes i hat $b \cdot s_i$ eine Darstellung $b \cdot s_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} s_k$ mit $a_{ik} \in \mathfrak{p}$ (weil $b \in \mathfrak{p} \cdot S'$).

Es folgt: b ist Nullstelle eines Polynoms vom Grad n mit Koeffizienten in $\mathfrak{p}$:
$b^n + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i b^i = 0}_{\in \mathfrak{p}}, \alpha_i \in \mathfrak{p}$

Nach Voraussetzung ist $b \in R$: $b^n \in \mathfrak{p} \Rightarrow b \in \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \cdot S \cap R \subseteq \mathfrak{p}$.

(b) Induktion über n: $n = 0$ ist (a). $n \geq 1$:

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Kette $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{P}_{n-1}$ in S mit $\mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$.

Sei $S' := S/\mathfrak{P}_{n-1}$, $R' := R/\mathfrak{p}_{n-1}$. Dann ist S'/R' ganze Ringerweiterung.
Nach (a) gibt es in S' ein Primideal $\mathfrak{P}'_n$ mit $\mathfrak{P}'_n \cap R' = \mathfrak{p}'_n := \mathfrak{p}_n/\mathfrak{p}_{n-1}$.
Dann gilt für $\mathfrak{P}_n := \mathrm{pr}^{-1}(\mathfrak{P}'_n)$ ($\mathrm{pr} : S \to S'$ kanonische Projektion):
$\mathfrak{P}_n \cap R = \mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{P}_\mathfrak{n} \neq \mathfrak{P}_{n-1}$.

(c) Aus (b) folgt: $\dim\ S \geq \dim\ R$. Es bleibt zu zeigen: $\dim\ S \leq \dim\ R$.
Sei $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{P}_n$ Kette in S, $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap R$, $i = 0, \ldots, n$.
klar: $\mathfrak{p}_i$ ist Primideal in R, $\mathfrak{p}_{i-1} \subseteq \mathfrak{p}_i$. Noch zu zeigen: $\mathfrak{p}_{i-1} \neq \mathfrak{p}_i$ für alle i.
Gehe über zu $R/\mathfrak{p}_{i-1}$ und $S/\mathfrak{P}_{i-1}$, also ohne Einschränkung $\mathfrak{p}_{i-1} = (0)$ und $\mathfrak{P}_{i-1} = (0)$.
Annahme: $\mathfrak{p}_i = (0)$
Sei $b \in \mathfrak{P}_i \setminus \{0\}$. b ist ganz über R: $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0$.
Sei n der minimale Grad einer solchen Gleichung.
Es ist $a_0 = -b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1) \in R \cap \mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}_i = (0)$.
$\Rightarrow 0 = -b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1)$
Da S nullteilerfrei ist, muss gelten: $b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$.
Widerspruch zur Wahl von n.

Folgerung 2.26
Sei S/R ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{P}$ Primideale in R bzw. S. Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$, so gilt:

$$\mathfrak{p} \text{ maximal} \Longleftrightarrow \mathfrak{P} \text{ maximal}$$

Beweis
„$\Rightarrow$“: Sei $\mathfrak{P}'$ maximales Ideal in S mit $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$. Dann ist $\mathfrak{P}' \cap R = \mathfrak{p}$ weil $\mathfrak{p}$ maximal $\Rightarrow \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$. Nach dem Beweis von Teil (c) des Satzes.

„$\Leftarrow$“: Sei $\mathfrak{p}'$ maximales Ideal mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. Nach (b) gibt es ein Primideal $\mathfrak{P}'$ in S mit $\mathfrak{P}' \cap R = \mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}' \underset{\mathfrak{P}\text{ maximal}}{\Longrightarrow} \mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$.

Satz 11
Sei k Körper, A endlich erzeugbare k-Algebra.

(a) In A gibt es algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_d$ (für ein $d \geq 0$), sodass A ganz ist über $k[x_1, \ldots, x_d]$. [Die Algebra $k[x_1, \ldots, x_d]$ ist dann isomorph zur Polynomalgebra $k[X_1, \ldots, X_d]$, da $x_1, \ldots, x_d$ algebraisch unabhängig sind. Ferner ist dann A als $k[x_1, \ldots, x_d]$-Modul endlich erzeugbar, da als Algebra endlich erzeugbar und ganz.]

(b) Ist $I \subsetneq A$ ein echtes Ideal, so können in a) die x_i so gewählt werden, dass $I \cap k[x_1, \ldots, x_d] = (x_{\delta+1}, \ldots, x_d)$ für ein $\delta \leq d$.

(c) $\dim\ k[x_1, \ldots, x_d] = d$ ($\Rightarrow \dim\ A = d$)

Beweis

(c) „$\geq$“: klar.
„$\leq$“: Sei $0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ Primidealkette in A. Ohne Einschränkung (Satz 10) sei $A = k[x_1, \ldots, x_n]$.
Nach (b) existiert eine Einbettung $B := k[y_1, \ldots, y_d] \hookrightarrow A$ mit $\mathfrak{p}_1 \cap k[y_1, \ldots, y_d] = (y_{\delta+1}, \ldots, y_d)$.
Beh.: $\delta \leq d - 1$ (d.h. $\mathfrak{p}_1 \cap k[y_1, \ldots, y_d] \neq \{0\}$)
Denn: Sonst A ganz über $B \Rightarrow \mathfrak{p}_1 = 0$ (Satz 10, Beweis Teil (c)).
Sei nun $A_1 := A/\mathfrak{p}_1$, $B_1 := B/(\mathfrak{p}_1 \cap B) \cong k[y_1, \ldots, y_\delta]$. A_1 ist ganz über B_1, also ist nach Satz 10 (c) $\dim\ A_1 = \dim\ B_1 \overset{\text{I.V.}}{=} \delta$
Weiter ist $0 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m/\mathfrak{p}_1$ Primidealkette in A_1.
$\Rightarrow m - 1 \leq \delta \leq d - 1 \Rightarrow m \leq d$

(a) Sei $A = k[a_1, \dots, a_n]$ (endliches Erzeugendensystem)
Induktion über n:

$n = 1$: $A = k[a]$; ist a transzendent, so ist $A \cong k[X]$. Sonst: $A \cong {k[X]}/{(f)}$ für ein irreduzibles $f \in k[X]$, also endliche Körpererweiterung von k.

$n > 1$: Sind $a_1, \dots, a_n$ algebraisch unabhängig, so ist $A \cong k[X_1, \dots, X_n]$. Andernfalls gibt es $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $F(a_1, \dots, a_n) = 0$.

1. Fall: $F = X_n^m + \sum_{i=0}^{m-1} g_i X_n^i$ für ein $m \geq 1$ und $g_i \in k[X_1, \dots, X_{n-1}]$.

Aus $F(a_1, \dots, a_n) = 0$ folgt a_n ganz über $k[a_1, \dots, a_{n-1}] =: A'$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_d$ in $k[a_1, \dots, a_{n-1}]$, sodass A' ganz über $k[x_1, \dots, x_d]$. A ist also ganz über $k[x_1, \dots, x_d]$, da $A = A'[a_n]$.

2. Fall: F beliebig, $F = \sum_{i=0}^m F_i$ mit F_i homogen vom Grad i.

Ersetze a_i durch $b_i := a_i - \lambda_i a_n$ ($i = 1, \dots, n-1$, mit $\lambda_i \in k$ „geeignet“). Dann sind $b_1, \dots, b_{n-1}, a_n$ auch k-Algebra-Erzeuger von A. Das Monom $a_1^{\nu_1} \cdots a_n^{\nu_n}$ geht über in

$$a_n^{\nu_n} \prod_{i=1}^{n-1} (b_i + \lambda_i a_n)^{\nu_i} = a_n^{\nu_n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{\nu_i} a_n^{\nu_i} + \text{Terme niedriger Ordnung in } a_n$$

$\Rightarrow F_m(a_1, \dots, a_n) = F_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \cdot a_n^m + \text{Terme niedriger Ordnung in } a_n$
$\Rightarrow F(a_1, \dots, a_n) = F_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \cdot a_n^m + \text{Terme niedriger Ordnung in } a_n$
Ist $F_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$, so weiter wie in Fall 1.
Ist k unendlich, so kann man immer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ finden, sodass $F_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$.
Ist k endlich, so hilft es, a_i durch $b_i = a_i - a_n^{\mu_i}$ zu ersetzen.

(b) Ohne Einschränkung sei $A = k[x_1, \dots, x_d]$ (betrachte $I' = I \cap k[x_1, \dots, x_d]$).

1. Fall: $I = (f)$ Hauptideal, $f \neq 0$.

Setze $y_d := f$, $y_i = x_i - \lambda_i x_d$ für geeignete $\lambda_i \in k$.
Dann ist $f - y_d = 0$ normiertes Polynom in x_d über $k[y_1, \dots, y_d]$ (vgl. (a))

Beh.: $I \cap k[y_1, \dots, y_d] = (y_d)$

Denn: Sei $g \in I \cap k[y_1, \dots, y_d]$, d.h. $g = h \cdot f$ für ein $h \in k[x_1, \dots, x_d]$. h ist ganz über $k[y_2, \dots, y_d] \Rightarrow h^m + b_{m-1}h^{m-1} + \dots + b_1 h + b_0 = 0$ ($m \geq 1$, $b_i \in h[y_1, \dots, y_d]$) $\Rightarrow$ $g^m + \underbrace{b_{m-1} f g^{m-1} + \dots + b_1 f^{m-1} g + b_0 f^m}_{= y_d \cdot \dots} = 0$

y_d teilt also g^m, d.h. $g^m \in (y_d) \overset{\text{prim}}{\Rightarrow} g \in (y_d)$

2. Fall: Sei I beliebig. Induktion über d:

$d = 1$: $A = k[X] \Rightarrow$ jedes Ideal ist Hauptideal.

$d > 1$: Sei $f \in I$, $f \neq 0$.
Dann gibt es nach Fall 1 eine Einbettung $k[y_1, \dots y_d] \hookrightarrow A$ mit $f = y_d$.
$I' := I \cap k[y_1, \dots y_{d-1}]$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Einbettung $k[z_1, \dots z_{d-1}] \hookrightarrow k[y_1, \dots y_{d-1}]$ mit $I' \cap k[z_1, \dots z_{d-1}] \subset (z_{\delta+1}, \dots z_{d-1})$ für ein $\delta \leq d-1$.

$\Rightarrow I \cap k[z_1, \dots z_{d-1}, z_d] = (z_{\delta+1}, \dots z_{d-1}, y_d)$

Folgerung: Für jede endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra A über einem Körper k gilt:

$$\operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A)) = \dim A$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{trdeg}(K)$ (der ***Transzendenzgrad*** von K über k) die Maximalzahl über k algebraisch unabhängiger Elemente in K, wenn K eine Körpererweiterung von k ist.

§8 Das Spektrum eines Rings

Definition + Bemerkung 2.27
Sei R ein Ring.

a) $\operatorname{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subset R : \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ heißt ***Spektrum*** von R.
b) Eine Teilmenge $V \subset \operatorname{Spec}(R)$ heißt ***abgeschlossen***, wenn es ein Ideal $I \subseteq R$ gibt mit

$$V = V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

c) Die abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec}(R)$ definieren eine Topologie auf $\operatorname{Spec}(R)$, sie heißt die ***Zariski-Topologie***.

Beispiele
$R = \mathbb{Z}$: $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0)\} \cup \{(p) : p \text{ Primzahl}\}$
$V((p)) = (p) \Rightarrow (p)$ ist abgeschlossen in $\operatorname{Spec}(R)$ für jede Primzahl p.
$V((0)) = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.
$I = n\mathbb{Z} \Rightarrow V(I) = \{(p_1), \dots (p_k)\}$, wenn $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$ die Primfaktorzerlegung von n ist.
$\overline{\{(0)\}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$

$R = k[X]$: $\overline{\{(0)\}} = \operatorname{Spec}(R)$.
$f \in k[X]$ irreduzibel $\Rightarrow (f)$ ist abgeschlossener Punkt.
$k := \mathbb{C}$: f irreduzibel $\Leftrightarrow f(X) = X - c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X]) = \mathbb{C} \cup \{(0)\}$

Beweis
c) Sei $U \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ offen $:\Leftrightarrow \operatorname{Spec}(R) \setminus U$ abgeschlossen.
Zu zeigen:

(i) $\emptyset$ ist abgeschlossen: $\emptyset = V(R)$.
$\operatorname{Spec}(R)$ ist abgeschlossen: $\operatorname{Spec}(R) = V((0))$.

(ii) endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
Zeige dazu: $V(I_1) \cup \dots \cup V(I_n) = V(I_1 \cap \dots \cap I_n) = V(I_1 \cdot \dots \cdot I_n)$
denn: Ohne Einschränkung sei $n = 2$:
„$\subseteq$“ Sei $\mathfrak{p} \in V(I_1) \Rightarrow I_1 \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \in V(I_1 \cap I_2)$.
„$\supseteq$“ Sei $\mathfrak{p} \in V(I_1 \cap I_2)$, $\mathfrak{p} \notin V(I_1)$.
Dann gibt es ein $a \in I_1 \setminus \mathfrak{p}$. Sei $b \in I_2$.
Dann ist $a \cdot b \in I_1 \cap I_2 \underset{\text{Vor.}}{\subset} \mathfrak{p}$. $\overset{\mathfrak{p}\text{ prim}}{\underset{a \notin \mathfrak{p}}{\Longrightarrow}} b \in \mathfrak{p} \Rightarrow I_2 \subseteq \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in V(I_2)$.

(iii) beliebiger Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen. Zeige dazu:

$$\bigcap_\nu V(I_\nu) = V\Big(\sum_\nu I_\nu\Big)$$

denn: $\mathfrak{p} \in \bigcap_\nu V(I_\nu) \Leftrightarrow I_\nu \subseteq \mathfrak{p}\, \forall \nu \Leftrightarrow \sum_\nu I_\nu \subseteq \mathfrak{p}$.

Bemerkung 2.28

a) Für Ideale $I_1 \subseteq I_2$ ist $V(I_1) \supseteq V(I_2)$.

b) Für jedes Ideal $I \subseteq R$ ist $V(I) = V(\sqrt{I}) = V(\mathrm{Rad}(I))$

Beweis
Sei $\mathfrak{p}$ Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$, $f \in \sqrt{I}$, dann ist $f^n \in I$ für ein $n \geq 1$. $\Rightarrow f^n \in \mathfrak{p} \underset{\mathfrak{p} \text{ prim}}{\Rightarrow} f \in \mathfrak{p}$
$\Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$.

c) Die $U(f) := \mathrm{Spec}(R) - V((f))$, $f \in R \setminus \sqrt{(0)}$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis
$\sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}$ (Ü7A2b)

Also ist $V(f) = \mathrm{Spec}(R) \Leftrightarrow f \in \sqrt{(0)}$. Für $f \in R \setminus \sqrt{(0)}$ ist also $U(f) \neq \emptyset$.

Zu zeigen: Ist $U \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ offen, $U \neq 0$, so gibt es ein $f \in R \setminus \sqrt{(0)}$ mit $U(f) \subseteq U$.

Sei also $U = \mathrm{Spec}(R) - V(I)$ mit $I \nsubseteq \sqrt{(0)}$. Für $f \in I \setminus \sqrt{(0)}$ ist $(f) \subseteq I$, also $V(f) \supseteq V(I)$
$\Rightarrow U(f) \subseteq U$.

Zusatz: $U(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : f \notin \mathfrak{p}\}$.

Definition + Proposition 2.29

a) Ein topologischer Raum X heißt ***irreduzibel***, wenn er nicht Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen ist.

Beispiele
$R = \mathbb{C}[X, Y]$,
$V((X)) = \{(X)\} \cup \{(X, Y - c), c \in \mathbb{C}\}$
$V((Y)) = \{(Y)\} \cup \{(X - a, Y), a \in \mathbb{C}\}$.

$V(X \cdot Y) = V((X)) \cup V((Y)) =$ Achsenkreuz und (X), (Y).

b) Eine abgeschlossene Teilmenge $V(I) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ ist genau dann irreduzibel, wenn I ein Primideal ist.

Beweis
„$\Rightarrow$“ Seien $f_1, f_2 \in R$, $f_1 \cdot f_2 \in I$ und $f_1 \notin I$. Dann ist $V(f_1) \nsupseteq V := V(I)$.

Andererseits: $V \subseteq V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$
$\Rightarrow V = (V \cap V(f_1)) \cup (V \cap V(f_2))$
$\underset{V \text{ irreduz.}}{\Longrightarrow} V \subseteq V(f_2) \Rightarrow f_2 \in I$.

„$\Leftarrow$“ Sei $V(I) = V = V(I_1) \cup V(I_2)$ und $V(I_1) \neq V$

d.h. $I_1 \nsubseteq I$. Sei $f_1 \in I_1 \setminus I$

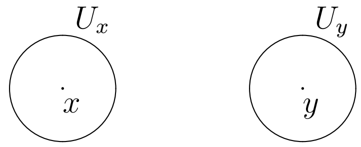
Andererseits ist $V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1) \cup V(I_2) = V \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq \sqrt{I} = I$

Für jedes $f \in I_2$ ist also $f_1 \cdot f \in I \underset{f_1 \notin I}{\Rightarrow} f \in I \Rightarrow I_2 \subseteq I \Rightarrow V(I) \subseteq V(I_2)$.

Folgerung 2.30
Ist $\mathrm{Spec}(R)$ hausdorffsch, so ist $\dim R = 0$

Beweis
Spec(R) hausdorffsch, $\Rightarrow$ jede irreduzible Teilmenge von Spec(R) ist einelementig.

$\Rightarrow$ Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist $V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$
$\Rightarrow$ jedes Primideal in R ist maximales Ideal.
$\Rightarrow \dim R = 0$



$X = (X - U_x) \cup (X - U_y)$
$\Rightarrow X$ nicht irreduzibel.

Definition + Bemerkung 2.31

a) Für eine beliebige Teilmenge V von Spec(R) heißt

$$I(V) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$$

das ***Verschwindungsideal*** von V.

b) Für jedes Ideal I von R gilt:

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

Beweis
Nach Ü7A2d ist $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supseteq I \\ \mathfrak{p} \text{ Primideal}}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$

Folgerung
Ist $V(I_1) = V(I_2)$, so ist $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$.

Definition + Proposition 2.32

a) Sei X ein topologischer Raum. Eine irreduzible Teilmenge $V \subseteq X$ heißt ***irreduzible Komponente***, wenn V maximale irreduzible Teilmenge ist bzgl. $\subseteq$.

b) Jeder topologischer Raum ist Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten.

c) Ist R noethersch, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von V von Spec(R) endliche Vereinigung von irreduziblen Komponenten von V; diese sind eindeutig bestimmt.

Beweis

b) Zu zeigen: jedes $x \in X$ ist in einer irreduziblen Komponente von X enthalten.

Sei $\mathcal{C}_x := \{U \subseteq X : x \in U,\ U \text{ irreduzibel}\}$.

$\mathcal{C}_x \neq \emptyset$, da $\{x\} \in \mathcal{C}_x$.

Seien $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_x$ mit $U_i \subseteq U_{i+1}$ für alle i.

Sei $U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, zu zeigen: $U \in \mathcal{C}_x$, d.h. U irreduzibel.

denn: Sei $U = V \cup W$, V, W abgeschlossene Teilmengen von U. Dann ist $U_i = (U_i \cap V) \cup (U_i \cap W)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$

Da U_i irreduzibel, ist (ohne Einschränkung) $U_i \cap V = U_i$ für unendliche viele i.

$\Rightarrow U_i \subseteq V \Rightarrow U = \bigcup_{\text{diese } i} U_i \subseteq V \Rightarrow U \subseteq V$.

$\Rightarrow U$ irreduzibel.

Mit dem Zornschen Lemma folgt: $\mathcal{C}_x$ enthält ein maximales Element.

c) Ohne Einschränkung sei $V = \mathrm{Spec}(R)$: Sei $V = V(I)$ für ein Ideal I.

$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\} \overset{\text{bijektiv}}{\longleftrightarrow} \{\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R/I)\}$

Aus 2.34b wird folgen: Die Abbildung ist ein Homöomorphismus.

Sei $\mathfrak{V}$ die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(R)$, die <u>nicht</u> Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Teilmengen sind. Weiter sei $J := \{I(V) : V \in \mathfrak{V}\}$

Zu zeigen: $\mathfrak{V} = \emptyset$

Anderenfalls ist auch $J \neq \emptyset$. Da R noethersch ist, enthält J ein maximales Element $I(V_0)$ für ein $V_0 \in \mathfrak{V}$.

V_0 ist nicht irreduzibel.

Also gibt es abgeschlossene Teilmengen V_1, V_2 von V_0 mit $V_0 = V_1 \cup V_2$, $V_1 \neq V_0 \neq V_2$.

$V_i \notin \mathfrak{V}$ für $i = 1, 2$, da $I(V_0) \subsetneqq I(V_1)$

Also lassen sich V_1 und V_2 als endliche Vereinigung von irreduziblen Teilmengen schreiben.

$\Rightarrow V_0$ lässt sich auch als endliche Vereinigung von irreduziblen Teilmengen schreiben. Widerspruch zur Wahl von V_0.

$\Rightarrow \mathfrak{V} = \emptyset$.

Sei also $V = V_0 \cup \cdots \cup V_r$ mit irreduziblen Teilmengen V_i.

Noch zu zeigen:

- die V_i sind (ohne Einschränkung) irreduzible Komponenten.
- Eindeutigkeit

denn:

Aus b) folgt: jedes V_i ist in einer irreduziblen Komponente $\widetilde{V_i}$ von V enthalten, also $V = \bigcup_{i=0}^r \widetilde{V_i}$; ohne Einschränkung alle $\widetilde{V_i}$ verschieden.

Sei W irreduzible Komponente von V.

$\Rightarrow W = \bigcup_{i=0}^r (W \cap \widetilde{V_i}) \underset{W \text{ irreduz.}}{\Rightarrow}$ es gibt ein i mit $W \subseteq \widetilde{V_i}$

$\underset{W \text{ Komponente}}{\Rightarrow} W = \widetilde{V_i}$

Folgerung 2.33
Ein noetherscher Ring hat nur endlich viele minimale Primideale.

Beweis
Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ minimales Primideal. $\Leftrightarrow V(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ irreduzible Komponente.

Proposition 2.34
Sei $\alpha : R \to S$ Ringhomomorphismus.

a) Die Abbildung $\varphi_\alpha : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ ist stetig.

Eleganter: $R \to \mathrm{Spec}(R)$ ist kontravarianter Funktor <u>Ringe</u> $\to$ <u>top. Räume</u>

b) Ist α surjektiv, so ist φ_α injektiv und $\varphi_\alpha(\mathrm{Spec}(S)) = V(\mathrm{Kern}(\alpha))$

Beweis

a) $\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ ist Primideal:

Seien $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \Rightarrow \alpha(a \cdot b) \in \mathfrak{p} \overset{\text{Œ}}{\Rightarrow} \alpha(a) \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$

φ_α **stetig**: Zu zeigen: für jede abgeschlossene Teilmenge $V = V(I)$ von $\operatorname{Spec}(R)$ ist $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ abgeschlossen in $\operatorname{Spec}(S)$.

$\varphi_\alpha^{-1}(V(I)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S) : I \subseteq \alpha^{-1}(\mathfrak{p})\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S) : \alpha(I) \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S) : \alpha(I) \cdot S \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\alpha(I) \cdot S)$

b) Seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(S)$ mit $\varphi_\alpha(\mathfrak{p}) = \varphi_\alpha(\mathfrak{p}')$
$\Rightarrow \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) = \alpha^{-1}(\mathfrak{p}') \Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}(\mathfrak{p})) = \alpha(\alpha^{-1}(\mathfrak{p}')) \underset{\alpha \text{ surj.}}{\Rightarrow} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$

§9 Diskrete Bewertungsringe

Definition 2.35
Sei K ein Körper.
Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ heißt ***diskrete Bewertung***, wenn für alle $x, y \in K^\times$ mit $x + y \in K^\times$ gilt:

$$v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$$

Anmerkungen: Manchmal setzt man $v(0) = \infty$.
Da v Gruppenhomomorphismus ist, gilt: $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$ und $v(1) = 0$.

Beispiele

1.) $K = \mathbb{Q},\ p \in \mathbb{Z}$ Primzahl.
Für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ a, b \in \mathbb{Z}$ schreibe $a = p^n \cdot a',\ b = p^m \cdot b'$ mit $p \nmid a',\ p \nmid b'$.
Setze $v_p(\frac{a}{b}) := n - m$. Und es gilt: $a + b \overset{\text{Œ: } n \leq m}{=} p^n \cdot (a' + p^{m-n} b')$.
v_p heißt ***p-adische Bewertung*** auf $\mathbb{Q}$. Es gilt:
   - $v_p(a) \geq 0\ \forall a \in \mathbb{Z}$. $v_3(\frac{7}{2}) = 0,\ v_3(\frac{9}{2}) = 2$.
   - $v_p(a+b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$, falls $v_p(a) \neq v_p(b)$.

2.) $K = k(X) = \operatorname{Quot}(k[X])$ (k Körper).
Für $f = \frac{f_1}{f_2}$ sei $v(f) = v(f_1) - v(f_2)$.
   a) $v(f_1) = \operatorname{ord}_a(f_1)$ für festes $a \in k$ (Nullstellenordnung).
   Es gilt $v_a(f_1 \cdot f_2) = v_a(f_1) + v_a(f_2)$
   $v_a(f_1 + f_2) = v_a((X-a)^{n_1} \cdot g_1 + (X-a)^{n_2} \cdot g_2)$
   $\overset{\text{Œ: } n_1 \leq n_2}{=} v_a((X-a)^{n_1}(g_1 + (X-a)^{n_2 - n_1} \cdot g_2))$
   b) Für $f \in k[X]$ sei $v(f) = -\deg(f)$.

Bemerkung 2.36
Sei $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ diskrete Bewertung. Sei $\rho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \rho < 1$. Dann ist die Abbildung

$$|\ |_v : K \to \mathbb{R},\ |x|_v = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ \rho^{v(x)} & : x \in K^\times \end{cases}$$

ein ***Absolutbetrag*** auf K, d.h. eine Abbildung $K \to \mathbb{R}$ mit:

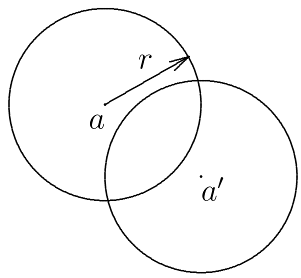
(i) $|x|_v = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $|x \cdot y|_v = |x|_v \cdot |y|_v$

(iii) $|x + y|_v \leq |x|_v + |y|_v$

In unserer Situation gilt sogar:
$|x+y|_v \leq \max\{|x|_v, |y|_v\} \leq |x|_v + |y|_v \Rightarrow$ „nichtarchimedischer Betrag“
Weiter ist $d(x,y) := |x-y|_v$ eine Metrik auf K.

Zur Geometrie
Kreis um a mit Radius r: $K_r = \{b \in K : d(a,b) \leq r\}$.



Jeder Kreis hat mehrere Mittelpunkte:
Beh.: Für jedes $a' \in K_r$ ist $K_r(a') = K_r(a)$
Bew.: Sei $b \in K_r(a)$, also $d(b,a) \leq r$.
Dreiecksungleichung:
$d(b,a') \leq \max\{\underbrace{d(b,a)}_{\leq r}, \underbrace{d(a,a')}_{\leq r}\} \leq r \Rightarrow b \in K_r(a')$

Es gibt kein allgemeines Dreieck:
Ist $d(a,b) < d(a,c)$, also $|a-b| < |c-a|$, so ist $|c-b| = |a-b+c-a| = \max\{|a-b|, |c-a|\} = |c-a|$
$\Rightarrow$ jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Erinnerung
$\mathbb{R}$ entsteht aus $\mathbb{Q}$ durch „Vervollständigung“:
$C :=$ Ring der Cauchy-Folgen von $\mathbb{Q}$ (bzgl. $|\ |$)
$N :=$ Ideal der Nullfolgen in C (maximales Ideal)
$\mathbb{R} := C/N$
Analog:
$C_p :=$ Ring der Cauchy-Folgen von $\mathbb{Q}$ (bzgl. $|\ |_p := |\ |_{v_p}$)
$N_p :=$ Ideal der Nullfolgen in C_p (maximales Ideal)
$\mathbb{Q}_p := C_p/N_p$ „***Körper der p-adischen Zahlen***“

Bemerkung 2.37
Ist v diskrete Bewertung auf $K^\times$, so ist $\mathcal{O}_v := \{x \in K^\times : v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ ein Ring, genauer: ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_v := \{x \in K^\times : v(x) > 0\} \cup \{0\}$.

Beweis
$\mathcal{O}_v$ ist Ring, da $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\} \geq 0$ für alle $x, y \in \mathcal{O}_v$.
$\mathfrak{m}_v$ ist Ideal: Ist $x \in \mathfrak{m}_v$, $r \in \mathcal{O}_v$, so ist $v(x \cdot r) = v(x) + v(r) > 0$.
Für $x \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_v = \{x \in K : v(x) = 0\}$ ist $v(\frac{1}{x}) = -v(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_v(\setminus \mathfrak{m}_v) \Rightarrow x \in \mathcal{O}_v^\times$.

Definition + Proposition 2.38
(a) Ein nullteilerfreier Ring R heißt ***diskreter Bewertungsring***, wenn es eine diskrete Bewertung v von $K = \mathrm{Quot}(R)$ gibt mit $R = \mathcal{O}_v$.
(b) Jeder diskrete Bewertungsring ist noethersch, lokal und eindimensional.

Beweis
Zeige mehr: R ist Hauptidealring.
R ist lokal ✓, sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal in R.
Beh.1: $\mathfrak{m}$ ist Hauptideal.
Bew.1: Sei $t \in R$ mit $v(t) = 1 \Rightarrow t \in \mathfrak{m}$. Sei $x \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$, $y = \frac{x}{t^{v(x)}} \Rightarrow v(y) = v(x) - v(t^{v(x)}) = 0$
$\Rightarrow y \in R^\times \Rightarrow x = t^{v(x)} \cdot y \in (t)$.
Beh.2: Jedes Ideal $\neq 0$ in R ist von der Form $\mathfrak{m}^n$ für ein $n \geq 0$.

Bew.2: Sei $I \subseteq R$ ein Ideal, $n := \min\{v(x) : x \in I \setminus \{0\}\}$. Sei $x_0 \in I$ mit $v(x_0) = n \Rightarrow v(\frac{x_0}{t^n}) = 0 \Rightarrow t^n = \frac{t^n}{x_0} \cdot x_0 \in I \Rightarrow \mathfrak{m}^n = (t^n) \subseteq I$.
Umgekehrt: $x_0 = t^n \cdot \frac{x_0}{t^n} \in (t^n)$.
Sei $x \in I \Rightarrow v(\frac{x}{t^n}) = v(x) - n \geq 0 \Rightarrow x = t^n \cdot \frac{x}{t^n} \in (t^n) \Rightarrow I \subseteq \mathfrak{m}^n$.

Satz 12 (Diskrete Bewertungsringe)
Sei R ein lokaler noetherscher Ring der Dimension 1 mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$.
Dann sind äquivalent:

(i) R ist diskreter Bewertungsring

(ii) R ist (nullteilerfreier) Hauptidealring

(iii) R ist nullteilerfrei und $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal

(iv) es gibt ein $t \in R$, sodass jedes $x \in R \setminus \{0\}$ eine eindeutige Darstellung $x = u \cdot t^n$ hat mit $n \in \mathbb{N},\ u \in R^\times$

(v) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$

(vi) R ist normal

Beweis

$$\begin{tikzcd}
(i) \arrow[rr, Rightarrow] & & (ii) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
& (v) \arrow[dr, Rightarrow] & (vi) \arrow[d, Rightarrow] \\
(iv) \arrow[uu, Rightarrow] & & (iii) \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

(i) ⇒ (ii) Proposition 2.38

(iv) ⇒ (i)

<u>R nullteilerfrei:</u>
Annahme: $u \cdot t^n \cdot v \cdot t^m = 0 = u \cdot v \cdot t^{n+m} \Rightarrow t^{n+m} = t^{n+m} + 0 = t^{n+m} + u \cdot v \cdot t^{n+m} = (1 + u \cdot v)t^{n+m} \overset{\text{Eind.}}{\Rightarrow} 1 + u \cdot v = 1 \Rightarrow u \cdot v = 0 \Rightarrow$ Widerspruch zu $u \cdot v \in R^\times$.

<u>Diskrete Bewertung:</u>
Für $a = u \cdot t^n \in R \setminus \{0\}$ setze $v(a) = n$. Für $x = \frac{a}{b} \in K = \operatorname{Quot}(R),\ a, b \in R \setminus \{0\}$ setze $v(x) = v(a) - v(b)$.

$v(x)$ wohldefiniert: Ist $x = \frac{a'}{b'}$ mit $a', b' \in R \setminus \{0\}$, so ist $a \cdot b' = a' \cdot b$. Aus $a = u \cdot t^n, b = v \cdot t^m, a' = u' \cdot t^{n'}, b' = v' \cdot t^{m'}$ folgt: $u' \cdot v t^{n'+m} = u \cdot v' \cdot t^{n+m'} \overset{\text{Eind.}}{\Rightarrow} n' + m = n + m' \Rightarrow n' - m' = n - m$.

v ist diskrete Bewertung: $v(x \cdot y) = v(u \cdot t^n \cdot v \cdot t^m) = v(u \cdot v \cdot t^{n+m}) = n + m = v(x) + v(y)$.
$v(x + y) \overset{m \leq n}{=} v(t^m \cdot (v + u \cdot t^{n-m})) \geq m = \min\{v(x), v(y)\}$.

(iii) ⇒ (iv) Sei $\mathfrak{m} = (t)$. Sei $x \in R \setminus \{0\}$. Da R noethersch ist, ist $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = (0)$ (Folgerung 2.22). Also gibt es ein (eindeutiges) $n \geq 0$ mit $x \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1} \Rightarrow \exists u \in R^\times$ mit $x = u \cdot t^n$. u ist eindeutig: Wäre $u \cdot t^n = v \cdot t^n$, so wäre $(u - v) \cdot t^n = 0$, also t Nullteiler $\Rightarrow$ Widerspruch

(ii) ⇒ (v) $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist k-Vektorraum: $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2$ und damit $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sind R-Moduln. Für $a \in \mathfrak{m}$ und $x \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist $a \cdot \bar{x} = \overline{a \cdot x} = 0$, da $a \cdot x \in \mathfrak{m}^2 \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{x}$ ist wohldefiniert für die Klasse $\bar{a}$ von

a in $R/\mathfrak{m} = k$.
Es ist $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$, da $\dim R = 1$ (und R noethersch) $\Rightarrow \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq 1$.
$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ wird von $\bar{t}$ erzeugt (als R-Modul und damit auch als $R/\mathfrak{m}$-Modul) $\Rightarrow \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$
$\Rightarrow \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

(v) $\Rightarrow$ **(iii)** Sei $t \in \mathfrak{m}$, sodass $\bar{t} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ Erzeuger ist.
Mit Nakayama (Folgerung 2.21) folgt: t erzeugt $\mathfrak{m}$.

(ii) $\Rightarrow$ **(vi)** Jeder (nullteilerfreie) Hauptidealring ist faktoriell
$\Rightarrow$ R ist normal. (Bemerkung 2.10)

(vi) $\Rightarrow$ **(iii)** Sei $K = \mathrm{Quot}(R)$.
Sei $\bar{\mathfrak{m}} := \{x \in K : x \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}\}$, $\mathfrak{m}^{-1} := \{x \in K : x \cdot \mathfrak{m} \subseteq R\}$
Offensichtlich: $R \subseteq \bar{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{m}^{-1}$

Beh. 1:

1.) $\bar{\mathfrak{m}} = R$

2.) $\mathfrak{m}^{-1} \neq R$

3.) $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1} = R$ ($\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1}$ ist das von allen $a \cdot x$, $a \in \mathfrak{m}$, $x \in \mathfrak{m}^{-1}$ erzeugte Ideal in R)

Dann sei $t \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2 \Rightarrow t \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subseteq R$ ist Ideal in R. Wäre $t \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$, so wäre $(t) = t \cdot R \overset{3.)}{=} t \cdot \mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^2 \Rightarrow$ Widerspruch zu $t \notin \mathfrak{m}^2$. Also ist $t \cdot \mathfrak{m}^{-1} = R$ und $(t) \overset{3.)}{=} t \cdot \mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

Bew. 3: Aus $R \subseteq \mathfrak{m}^{-1}$ folgt $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1}$. Wäre $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1}$, so wäre $\mathfrak{m}^{-1} \subseteq \bar{\mathfrak{m}} = R$ im Widerspruch zu Beh. 2.).

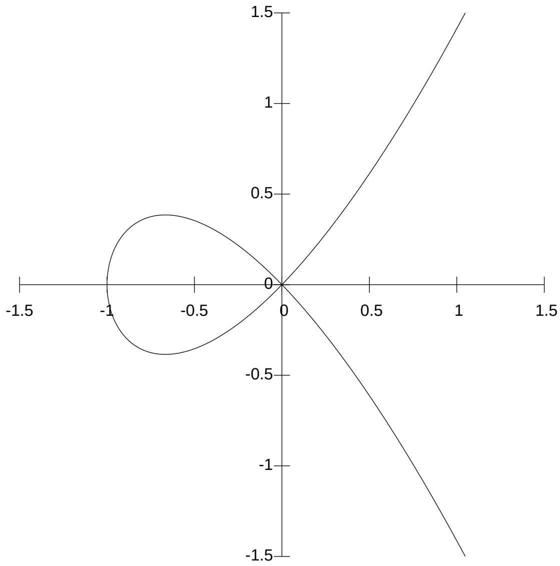
Bew. 1: $\bar{\mathfrak{m}}$ ist Unterring von K.
Zeige: $\bar{\mathfrak{m}}$ ist ganz über R (dann ist $\bar{\mathfrak{m}} = R$, da R normal).
Es genügt zu zeigen: $\bar{\mathfrak{m}}$ ist endlich erzeugter R-Modul.
Für $t \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ ist $t \cdot \bar{\mathfrak{m}} \subseteq R$, also endlich erzeugt, da R noethersch. Als R-Modul sind $\bar{\mathfrak{m}}$ und $t \cdot \bar{\mathfrak{m}}$ isomorph.

Bew. 2: Sei $t \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$

Beh. 4: Es gibt ein $n \geq 1$ mit $\mathfrak{m}^n \subseteq (t)$.
Sei n in Beh.4 minimal, $y \in \mathfrak{m}^{-1} \setminus (t)$, $x := \frac{y}{t} \in K$. Dann ist $x \in \mathfrak{m}^{-1} : x \cdot \mathfrak{m} = \frac{y}{t} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \frac{1}{t} \cdot \mathfrak{m}^n \subseteq R$, aber $x \notin R$, sonst wäre $y = x \cdot t \in (t) \Rightarrow$ Widerspruch.

Bew. 4: $\sqrt{(t)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset R, t \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$.
Seien $x_1, \dots, x_r$ Erzeuger von $\mathfrak{m}$, $\nu_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \dots, r)$ mit $x_i^{\nu_i} \in (t)$.
Für $N = 1 + \sum_{i=1}^r (\nu_i - 1)$ ist dann $\mathfrak{m}^N \subseteq (t)$, da $\mathfrak{m}^N$ erzeugt wird von den $x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{\nu_r}$ mit $\sum \nu_i = N \Rightarrow \exists\, \nu_i = 1$.

Beispiele
$R = \left(k[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)\right)_{(X,Y)}$ ist nullteilerfrei, eindimensional, lokal, noethersch aber *kein* diskreter Bewertungsring.
Denn: das maximale Ideal in R ist kein Hauptideal: $\mathfrak{m} = (X,Y),\ f = Y^2 - X^2(X+1) \in \mathfrak{m}^2$.
Es gilt $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2$, da X, Y linear unabhängig in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Sei $\mathfrak{M}$ das von X und Y in $k[X,Y]$ erzeugte Ideal. $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{M}/(f))/(\mathfrak{M}^2/(f)) \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$
Geometrisch:
$V(f) = \{(x,y) \in k^2 :\ f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in k^2 : y^2 = x^2(x+1)\}$
Singularität in $(0,0) = (X,Y) \Rightarrow$ "Newton-Knoten".



§10 Dedekindringe

Definition 2.39
Ein nullteilerfreier Ring heißt ***Dedekindring***, wenn er noethersch, normal und eindimensional ist.

Beispiele
1) $\mathbb{Z}$, $k[X]$ (k Körper)
2) diskrete Bewertungsringe
3) Hauptidealringe (nullteilerfrei)
4) der ganze Abschluss $\mathcal{O}_d$ von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ wobei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei.

$$\mathcal{O}_d = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & d \not\equiv 1 \mod 4 \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] & d \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

Beobachtung: Es gibt Dedekindringe, die nicht faktoriell sind: Beispiel: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
$(2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}))$.

Definition + Bemerkung 2.40
Sei R nullteilerfrei, $K = \mathrm{Quot}(R)$

a) Ein R-Untermodul $I \neq (0)$ von K heißt ***gebrochenes Ideal*** von R, wenn es ein $a \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $a \cdot I \subseteq R$. (Beispiel: $(\frac{1}{n})$ ist gebrochenes Ideal von $\mathbb{Z}$, da $n \cdot (\frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{Z}$ mit $R = \mathbb{Z}$.)
b) Für gebrochene Ideale I, J von R sei $I \cdot J$ der von allen $a \cdot b$, $a \in I, b \in J$, erzeugte R-Untermodul von K.
c) Die gebrochenen Ideale von R bilden mit der Multiplikation aus b) ein kommutatives Monoid mit neutralem Element R.
d) Die Einheiten in diesem Monoid heißen ***invertierbare*** (gebrochene) Ideale.

   d.h. I invertiertbar $\Leftrightarrow \exists I'$ mit $I \cdot I' = R$.

Beispiele
0) Jedes von 0 verschiedene Ideal in R ist gebrochenes Ideal.

1) Jeder von 0 verschiedene endlich erzeugbare R-Untermodul von K ist gebrochenes Ideal.
   denn: Seien $x_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n}$ Erzeuger von M $(a_i, b_i \in R) \Rightarrow$ für $b = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$ ist $b \cdot M \subseteq R$.
2) Ist I gebrochenes Ideal, so ist $I^{-1} := \{x \in K : x \cdot I \subseteq R\}$ ebenfalls gebrochenes Ideal: für jedes $a \in I$ ist $a \cdot I^{-1} \subseteq R$.
   I ist invertierbar $\Leftrightarrow I \cdot I^{-1} = R$.
3) $R = k[X, Y]$, $I = (X, Y) \Rightarrow I^{-1} = R$.
   denn: für $a = \frac{f}{g} \in I^{-1}$ muss gelten: $a \cdot X \in R$, $a \cdot Y \in R$.
4) Jedes Hauptideal $\neq (0)$ ist invertierbar: $(a) \cdot (\frac{1}{a} \cdot R) = R$.

Bemerkung 2.41
Jedes invertierbare Ideal von einem Integritätsbereich ist endlich erzeugbar (als R-Modul).

Beweis
Sei I invertierbar, also $I \cdot I^{-1} = R$, dann gibt es $a_i \in I, b_i \in I^{-1}$ mit $1 = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

Beh: $a_1, \dots a_n$ erzeugen I.

denn: Sei $a \in I \Rightarrow a = a \cdot 1 = a \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{(ab_i)}_{\in R}$

Satz 13 (Dedekindringe)
Für einen nullteilerfreien Ring R sind äquivalent:

(i) R ist Dedekindring oder Körper.
(ii) R ist noethersch und $R_\mathfrak{p}$ ist diskreter Bewertungsring für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ in R.
(iii) Jedes Ideal $I \neq (0)$ in R ist invertierbar.
(iv) Die gebrochenen Ideal in R bilden eine Gruppe.
(v) Jedes echte Ideal in R ist Produkt von endlich vielen Primidealen.
(vi) Jedes echte Ideal besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt von endlich vielen Primidealen.

Beweis
Beweisplan:

$$\begin{tikzcd}
 & (ii) \arrow[dr, Rightarrow] & & (v) \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow] \\
(i) \arrow[ur, Rightarrow] & & (iii) \arrow[dl, Rightarrow] & \\
 & (iv) \arrow[ul, Rightarrow] & & (vi)
\end{tikzcd}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

Sei $\mathfrak{p} \neq (0)$ Primideal im Dedekindring R. $\Rightarrow R_\mathfrak{p}$ noethersch, $\dim R_\mathfrak{p} = \operatorname{lat}(\mathfrak{p}) = 1$, da $\dim R = 1$.

$R_\mathfrak{p}$ normal: Sei $a \in K = \operatorname{Quot}(R) = \operatorname{Quot}(R_\mathfrak{p})$ ganz über $R_\mathfrak{p}$.

Dann gibt es eine Gleichung: $a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{s_i} a^i = 0$ mit $b_i \in R, s_i \in R \setminus \mathfrak{p}$

$\Rightarrow (s \cdot a)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{b_i} (sa)^i = 0$ mit $\widetilde{b_i} \in R$, $s := \prod_{i=0}^{n-1} s_i$

$\underset{R \text{ normal}}{\Longrightarrow} s \cdot a \in R \Rightarrow a \underset{s \notin \mathfrak{p}}{=} \frac{s \cdot a}{s} \in R_\mathfrak{p}$

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** :

Sei $(0) \neq I \subset K$ gebrochenes Ideal, $a \in R \setminus \{0\}$ mit $a \cdot I \subseteq R$. $\underset{\text{(iii)}}{\Rightarrow}$ $a \cdot I$ invertierbar. $\Rightarrow$ $R = (a \cdot I) \cdot I' = I \cdot (a \cdot I') \Rightarrow I$ ist invertierbar.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** :

Sei $I \neq (0)$ Ideal in R. $K = \mathrm{Quot}(R)$. $I^{-1} := \{x \in K : x \cdot I \subseteq R\}$

Zu zeigen: $I \cdot I^{-1} = R$.

Annahme: $I \cdot I^{-1} \subsetneqq R$:
Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von R mit $I \cdot I^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$.
$\Rightarrow R_{\mathfrak{m}}$ ist diskreter Bewertungsring.
$\Rightarrow I \cdot R_{\mathfrak{m}}$ ist Hauptideal, d.h. $I \cdot R_{\mathfrak{m}} = \frac{a}{s} \cdot R_{\mathfrak{m}}$ für ein $a \in I, s \in R \setminus \mathfrak{m}$

Seien $b_1, \ldots, b_n \in I$ Erzeuger (R ist noethersch). $\Rightarrow \frac{b_i}{1} = \frac{a}{s} \cdot \frac{r_i}{s_i}$ für gewisse $r_i \in R, s_i \in R \setminus \mathfrak{m}$

Sei $t = s \cdot \prod_{i=1}^{n} s_i$. Es gilt: $t \in R \setminus \mathfrak{m}$.

Für jedes $i = 1, \ldots n$ ist $\frac{t}{a} \cdot b_i = r_i \cdot s_i \cdot \ldots \cdot \widehat{s_i} \cdot \ldots \cdot s_n \in R$.

$\Rightarrow \frac{t}{a} \in I^{-1} \Rightarrow t = a \cdot \frac{t}{a} \in I \cdot I^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$. Widerspruch.

(iv) $\Rightarrow$ **(i)** :

<u>R noethersch</u>: Nach Bemerkung 2.41 ist jedes invertierbare Ideal endlich erzeugbar.

<u>R normal</u>: Sei $x \in K$ ganz über R. $\Rightarrow R[x]$ ist endlich erzeugbarer R-Modul, also gebrochenes Ideal (Beispiel 1). $\underset{\text{(iv)}}{\Rightarrow}$ $R[x]$ ist invertierbar.

Da $R[x]$ Ring ist, gilt $R[x] \cdot R[x] = R[x]$. $\underset{R[x] \text{ invertierbar}}{\Longrightarrow}$ $R[x] = R$ (neutrale Element).

$\Rightarrow x \in R$.

<u>$\dim R \leq 1$</u>: Sei $\mathfrak{p} \neq (0)$ Primideal in R, $\mathfrak{m} \subseteq R$ maximales Ideal mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$.
$\Rightarrow \mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} \underset{\text{(iv)}}{=} R$ und $\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

$\underset{\mathfrak{p} \text{ Primideal}}{\Longrightarrow}$ $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$.

Falls $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p} \underset{\cdot \mathfrak{p}^{-1}}{\Rightarrow} \mathfrak{m}^{-1} \subseteq R$. Widerspruch (da sonst $\mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$)

(iii) $\Rightarrow$ **(v)** :

Sei $I \neq (0)$, $I \neq R$ Ideal in R.

Setze $I_0 := I$.

Definiere induktiv: I_n für $n \geq 1$:

Ist $I_{n-1} \neq R$, so sei $\mathfrak{m}_{n-1}$ maximales Ideal mit $I_{n-1} \subseteq \mathfrak{m}_{n-1}$ und $I_n := I_{n-1}\mathfrak{m}_{n-1}^{-1} \subseteq R$.

Es ist $I_{n-1} \subseteq I_n$

Wäre $I_n = I_{n-1}$, so wäre $\mathfrak{m}_{n-1}^{-1} = R$. Widerspruch zu $\mathfrak{m}_{n-1}^{-1} \cdot \mathfrak{m}_{n-1} = R$.

Da nach 2.41 R noethersch ist, wird die Kette $I_0 \subsetneqq I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \cdots$ stationär.

$\Rightarrow \exists n$ mit $R = I_n = I_{n-1}\mathfrak{m}_{n-1}^{-1} = I_{n-2}\mathfrak{m}_{n-2}^{-1}\mathfrak{m}_{n-1}^{-1} = \cdots = I_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{m}_i^{-1}$

$\Rightarrow I = I_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{m}_i$

(v) $\Rightarrow$ **(vi)** :

Sei $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$. Zu zeigen: $n = m$ und $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_{\sigma(i)}$ für eine Permutation $\sigma \in S_n$:

Induktion über n:

$n=1$: $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1=\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_m \underset{\mathfrak{p}\text{ prim}}{\Rightarrow} \exists\, i_0$ mit $\mathfrak{q}_{i_0}\subseteq\mathfrak{p}$. Umgekehrt ist $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}_i$ für jedes i. $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}_{i_0}$

$n>1$: Ohne Einschränkung $\mathfrak{p}_1$ minimal bzgl. $\subseteq$ in $\{\mathfrak{p}_1,\ldots\mathfrak{p}_n\}$.

Aus $\prod\mathfrak{q}_i\subseteq\prod\mathfrak{p}_j\subseteq\mathfrak{q}_{i_1}\Rightarrow\exists j_0$ mit $\mathfrak{p}_{j_0}\subseteq\mathfrak{q}_{i_0}\subseteq\mathfrak{p}_1 \underset{\mathfrak{p}_1\text{ minimal}}{\Rightarrow} \mathfrak{p}_1=\mathfrak{q}_{i_0} \underset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} \mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_1\ldots\widehat{\mathfrak{q}_{i_0}}\ldots\mathfrak{q}_m \Rightarrow$ Behauptung aus Induktionsvoraussetzung.

(v) $\Rightarrow$ (iii) :

Sei $I\neq(0)$, $I=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_i$. Ist jedes $\mathfrak{p}_i$ invertierbar, so ist $I^{-1}=\mathfrak{p}_1^{-1}\ldots\mathfrak{p}_r^{-1}$ und $I\cdot I^{-1}=R$. Also ohne Einschränkung $I=\mathfrak{p}$ Primideal.

Sei $a\in\mathfrak{p}-\{0\}$, $(a)=\mathfrak{q}_1\ldots\mathfrak{q}_n$ mit Primidealen $\mathfrak{q}_i\Rightarrow\mathfrak{q}_i\subseteq\mathfrak{p}$ für ein i.

$\mathfrak{q}_i$ ist invertierbar: $\mathfrak{q}_i^{-1}=\frac{1}{a}\cdot R\cdot\mathfrak{q}_1\cdots\widehat{\mathfrak{q}_i}\cdots\mathfrak{q}_n$

Es genügt also zu zeigen: $\mathfrak{q}_i=\mathfrak{p}$

Beh. 1: Jedes invertierbare Primideal $\mathfrak{q}$ in R ist maximal.

Bew. 1: Ist $\mathfrak{q}$ nicht maximal, so sei $x\in R\setminus\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}+(x)\neq R$.

Beh. 2: Dann ist $(\mathfrak{q}+(x))^2=\mathfrak{q}+(x^2)$

Dann ist $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{q}+(x^2) \underset{\text{Beh. 2}}{=} (\mathfrak{q}+(x))^2\subseteq\mathfrak{q}^2+(x)$ $(*)$

Weiter ist $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{q}^2+\mathfrak{q}\cdot(x)$

denn: Sei $b\in\mathfrak{q}$, schreibe nach $(*)$ $b=c+rx$ mit $c=\mathfrak{q}^2, r\in R$, dabei ist $r\in\mathfrak{q}$, da $r\cdot x\in\mathfrak{q}$ und $x\notin\mathfrak{q}$.

$\Rightarrow\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^2+\mathfrak{q}\cdot(x)$ („$\supseteq$“ ist trivial)

$\Rightarrow\mathfrak{q}=\mathfrak{q}(\mathfrak{q}+(x)) \underset{\mathfrak{q}\text{ invertierbar}}{\Rightarrow} R=\mathfrak{q}+(x)$ Widerspruch.

Bew. 2: „$\subseteq$“ ✓, „$\supseteq$“

Schreibe beide Seiten als Produkt von Primidealen.

$\mathfrak{q}+(x)=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{q}_r$, $\mathfrak{q}+(x^2)=\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_s$.

In $R/\mathfrak{q}$ ist dann: $(\bar{x})=\bar{\mathfrak{p}}_1\cdots\bar{\mathfrak{p}}_r$, $(\bar{x})^2=\bar{\mathfrak{q}}_1\cdots\bar{\mathfrak{q}}_s=\bar{\mathfrak{p}}_1^2\cdots\bar{\mathfrak{q}}_r^2$

$(\bar{x}),(\bar{x}^2)$ invertierbar. $\Rightarrow\bar{\mathfrak{p}}_i,\bar{\mathfrak{q}}_j$ invertierbar.

$\underset{\text{„(iii) + (v) = (vi)“}}{\Rightarrow} \bar{\mathfrak{q}}_i=\bar{\mathfrak{p}}_{\sigma(i)}^2\Rightarrow$ ohne Einschränkung $\mathfrak{q}_i=\mathfrak{p}_i^2$.

Satz 14

Sei R ein Dedekindring, $K=\mathrm{Quot}(R)$, L/K endliche separable Körpererweiterung. S der ganze Abschluß von R in L.
Dann ist S ein Dedekindring.

Beweis

<u>$\dim S=1$:</u> Folgt aus Satz 10(c)

<u>S normal:</u>

Sei $x\in L$ ganz über S, also $x^n+\sum_{i=1}^{n-1}a_ix^i=0$ mit $a_i\in S$. Sei S' der von R und $a_1,\ldots,a_{n-1}$ erzeugte Unterring von S. S' ist endlich erzeugbarer R-Modul, da die a_i ganz über R sind. $S[X]$ ist endlich erzeugter S'-Modul und damit endlich erzeugbarer R-Modul $\Rightarrow x$ ist ganz über $R\Rightarrow x\in S$.

<u>S noethersch:</u>

Beh. 1: Es gibt ein primitives Element α von L/K mit $\alpha\in S$.

Bew. 1: Sei $\tilde{\alpha}\in L$ primitives Element, also $1,\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}^2,\ldots,\tilde{\alpha}^{n-1}$ ist K-Basis von L ($n:=[L:K]$).

Sei $\tilde{\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \tilde{\alpha}^i$ für gewisse $c_i \in K,\ i = 0, \dots, n-1$. Schreibe $c_i = \frac{a_i}{b_i}$ mit $a_i, b_i \in R,\ b := \prod_{i=0}^{n-1} b_i$. Setze $\alpha := b \cdot \tilde{\alpha} \Rightarrow \alpha^n = b^n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} c_i \tilde{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{c_i b^{n-i}}_{\in R} \alpha^i \Rightarrow \alpha \in S$

$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ linear unabhängig:
Sei $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \alpha^i = 0 \Rightarrow \sum \lambda_i b^i \tilde{\alpha}^i = 0 \Rightarrow \lambda_i b^i = 0\ \forall i$
Sei nun $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die verschiedenen Einbettungen von L in $\bar{K}$, also die Elemente von $\mathrm{Hom}(L, \bar{K})$.
$d := d(\alpha) := (\det(\sigma_i(\alpha^{j-1})_{i,j=1,\dots,n}))^2$ heißt die Diskriminante von L/K (bzgl. α).

Beh. 2:
(a) $d \neq 0$
(b) S ist in dem von $\frac{1}{d}, \frac{\alpha}{d}, \dots, \frac{\alpha^{n-1}}{d}$ erzeugten R-Untermodul von L enthalten.

Dann ist S als Untermodul eines endlich erzeugbaren R-Modul selbst endlich erzeugbar und damit noethersch (weil R noethersch ist).

Bew. 2:

(a) $$d = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sigma_1(\alpha) & \sigma_2(\alpha) & \dots & \sigma_n(\alpha) \\ \sigma_1(\alpha)^2 & \sigma_2(\alpha)^2 & \dots & \sigma_n(\alpha)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(\alpha)^{n-1} & \sigma_2(\alpha)^{n-1} & \dots & \sigma_n(\alpha)^{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{Vandermonde}}{=} \prod_{i>j} (\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha)) \neq 0$$

(b) Für $x \in L$ sei $\mathrm{Spur}(x) := \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \in \bar{K}$
$\mathrm{Spur}(x) \in K$: Für $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(\bar{K})$ ist $\sigma \circ \sigma_i \in \mathrm{Hom}_K(L, \bar{K})$
$\sigma(\mathrm{Spur}(x)) = \sum_{i=1}^n (\sigma \circ \sigma_i)(x) = \mathrm{Spur}(x) \in \bar{K}^{\mathrm{Aut}_K(\bar{K})} = K$.
Sei $x \in S,\ x = \sum_{j=1}^n c_j \alpha^j$ mit $c_j \in K$.

Beh. 3: $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ist Lösung eines LGS $A \cdot c = b$ mit $b \in R^n$ und $A \in R^{n \times n}$ mit $\det A = d$.

Nach der Cramerschen Regel ist dann $c_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ wobei A_i aus A dadurch entsteht, dass die i-te Zeile durch b ersetzt wird. $\Rightarrow c_i \in \frac{1}{d} R \Rightarrow x$ liegt in dem von $\frac{1}{d}, \frac{\alpha}{d}, \dots, \frac{\alpha^{n-1}}{d}$ erzeugten R-Modul.
Bew. 3: Für $i = 1, \dots, n$ ist $\mathrm{Spur}(\alpha^{i-1} x) = \sum_{j=1}^n \mathrm{Spur}((\alpha^{i-1} \alpha^{j-1}) c_j) \in K \quad (*)$ ganz über R
$\Rightarrow \mathrm{Spur}(\alpha^{i-1} x) \in R \Rightarrow A := (\mathrm{Spur}(\alpha^{i-1} \alpha^{j-1})_{i,j=1,\dots,n}) \in R^{n \times n}$

$$b := \begin{pmatrix} \mathrm{Spur}(x) \\ \mathrm{Spur}(\alpha x) \\ \vdots \\ \mathrm{Spur}(\alpha^{n-1} x) \end{pmatrix} \in R^n\ (*) \text{ heißt } A \cdot c = b.$$

Noch zu zeigen: $\det A = d$.
Nach Definition ist $d = (\det B)^2$ mit $B = (\sigma_i(\alpha^{j-1})_{i,j})$
$\Rightarrow B^T \cdot B = (\beta_{ij})$ mit $\beta_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma(\alpha^{i-1}) \sigma_k(\alpha^{j-1}) = \mathrm{Spur}(\alpha^{i-1} \alpha^{j-1})$
$\Rightarrow B^T \cdot B = A \Rightarrow \det A = (\det B)^2 = d$

Beispiele
$K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, D quadratfrei, $R = \mathbb{Z}$.
Was ist d? $\alpha = \sqrt{D}$, $\sigma_1 = \mathrm{id}$, $\sigma_2(a + b\sqrt{D}) = a - b\sqrt{D}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{D} & -\sqrt{D} \end{pmatrix}$$

$d = (\det B)^2 = (-2\sqrt{D})^2 = 4D$

§11 Primärzerlegung

Beispiele
$R = k[X,Y]$. $I = (X^2, Y)$ hat keine Darstellung als Produkt von Primidealen.

denn: Wäre $I = \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\nu_r}$ mit paarweise verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_i$, so wäre $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r = (X,Y) = \mathfrak{m}$. also $r = 1$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}$. Aber: $\mathfrak{m} \supsetneqq I \supsetneqq \mathfrak{m}^2$.

Definition + Bemerkung 2.42
Sei R Ring, $\mathfrak{q} \subseteq R$ echtes Ideal.

a) $\mathfrak{q}$ heißt ***Primärideal***, wenn für alle $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in \mathfrak{q}$ und $a \notin \mathfrak{q}$ gilt: es gibt ein $n \geq 1$ mit $b^n \in \mathfrak{q}$.
b) Ist $\mathfrak{q}$ Primärideal, so ist $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ Primideal. $\mathfrak{p}$ heißt zu $\mathfrak{q}$ ***assoziiertes*** Primideal.

   Beweis
   Seien $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in \sqrt{\mathfrak{q}} \Rightarrow a^n b^n \in \mathfrak{q}$ für ein $n \geq 1$.
   Ist $a \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$, so ist $a^n \notin \mathfrak{q} \underset{\text{Def.}}{\Rightarrow} (b^n)^m \in \mathfrak{q} \Rightarrow b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$

c) $\mathfrak{q}$ Primärideal $\Leftrightarrow$ jeder Nullteiler in $R/\mathfrak{q}$ ist nilpotent.

Beispiele

1) Ist $p \in R$ ein Primelement, so ist $(p^n) = (p)^n$ Primärideal für jedes $n \geq 1$.
   denn: Seien $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in (p^n)$ und $a \notin (p^n)$ Ist $b \in (p)$, so ist $b^n \in (p^n)$.
   Anderenfalls ist $a \in (p)$. Dann gibt es $1 \leq d < n$ mit $a \in (p^d) \setminus (p^{d+1}) \Rightarrow a = p^d \cdot u$ mit $u \in R \setminus (p)$. Dann ist $u \cdot b \notin (p) \Rightarrow a \cdot b = p^d \cdot u \cdot b \notin (p^{d+1})$ Widerspruch.
2) Ist R Dedekindring, so sind die Primärideale genau die Potenzen von Primidealen.
   denn: Ist $\mathfrak{q}$ Primärideal, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\nu_r}$ die Zerlegung von $\mathfrak{q}$ in Primidealen.
   $\Rightarrow \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \underset{\sqrt{\mathfrak{q}} \text{ ist prim}}{\Rightarrow} r = 1$.
   Sei umgekehrt $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^n$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$, $n \geq 1$. Seien $a, b \in R$, $a \cdot b \in \mathfrak{p}^n$, $a \notin \mathfrak{p}^n$. Nach Satz 13 ist $R_\mathfrak{p}$ Hauptidealring. D.h. $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ wird erzeugt von einem $\frac{p}{s}$, wobei $p \in \mathfrak{p}, s \in R \setminus \mathfrak{p}$ $\underset{\text{Bsp 1}}{\Rightarrow} \mathfrak{p}^n R_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})^n$ ist Primideal.
   Ist $a \in \mathfrak{p}^n R_\mathfrak{p}$, so ist $a = \frac{p^n}{s^n} \cdot \frac{u}{t}$ mit $u \in R, t \in R \setminus \mathfrak{p} \Rightarrow t \cdot s^n \cdot a \in \mathfrak{p}^n \Rightarrow a \in \mathfrak{p}^n$. Widerspruch.
   Anderenfalls ist $b^m \in \mathfrak{p}^n R_\mathfrak{p}$ für ein m und damit $b \in \mathfrak{p}$ und $b^n \in \mathfrak{p}^n$.

Bemerkung 2.43
Sind $I_1, \ldots I_r$ $\mathfrak{p}$-primär (d.h. I_i primär und $\sqrt{I_i} = \mathfrak{p}$), so ist auch $I := \bigcap_{i=1}^{r} I_i$ $\mathfrak{p}$-primär.

Beweis
Seien $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in I$, $a \notin I$. Dann gibt es i mit $a \notin I_i \Rightarrow b^{n_i} \in I_i$ für ein $n_i \geq 1 \Rightarrow b \in \sqrt{I_i} = \mathfrak{p} \Rightarrow$ Für $j = 1, \ldots r$ gibt es $n_j \geq 1$ mit $b^{n_j} \in I_j \Rightarrow b^n \in I$ für $n = \max_{j=1}^{n} n_j$.

Definition 2.44
Sei I Ideal in R.

a) Eine Darstellung $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ heißt ***Primärzerlegung*** von I, wenn alle $\mathfrak{q}_i$ primär sind.
b) Eine Primärzerlegung heißt ***reduziert***, wenn $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \neq \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ für $i \neq j$ und kein $\mathfrak{q}_i$ weggelassen werden kann.
c) Besitzt $\mathfrak{q}$ eine Primärzerlegung, so auch eine reduzierte.

Satz 15 (Reduzierte Primärzerlegung)
Sei R noetherscher Ring.

Dann hat jedes echte Ideal in R eine reduzierte Primärzerlegung. Die assoziierten Primideale sind eindeutig. Die Primärideale, deren assoziierten Primideale minimal unter den in der Zerlegung vorkommenden sind, sind ebenfalls eindeutig.

Beweis
Sei $\mathcal{B} = \{I \subset R \text{ Ideal} : I \text{ besitzt keine Primärzerlegung}\}$. Ist $\mathcal{B} \neq \emptyset$, so besitzt $\mathcal{B}$ ein maximales Element I_0. Da I_0 nicht primär ist, gibt es $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in I_0$ und $a \notin I_0$ und $b^n \notin I_0$ für alle $n \geq 1$.

Ziel: Konstruiere Ideale I und J mit $I_0 = I \cap J$ und $I \neq I_0 \neq J$. Dann haben I und J Primärzerlegungen, also I_0 auch. Widerspruch!

Für $n \geq 1$ sei $I_n := \{c \in R : c \cdot b^n \in I_0\}$. I_n ist Ideal mit $I_0 \subseteq I_n \subseteq I_{n+1}$. Da R noethersch ist, gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $I_n = I_k$ für alle $n \geq k$. Setze $I := I_n$. Beachte $a \in I_1 \setminus I_0 \subseteq I \setminus I_0$.

Sei $J := I_0 + (b^k) \supsetneqq I_0$, da $b^k \notin I_0$.

Beh: $I \cap J = I_0$

denn: „$\supseteq$“ ✓ „$\subseteq$“ Sei $y \in I \cap J$, also $y = x + b^k \cdot r$ (für ein $x \in I_0, r \in R$) und $y \cdot b^k \in I_0 \Rightarrow y \cdot b^k = b^{2k} \cdot r + x \cdot b^k \Rightarrow r \cdot b^{2k} = yb^k \cdot xb^k \Rightarrow r \in I_{2k} = I_k \Rightarrow r \cdot b^k \in I_0 \Rightarrow y \in I_0$.

Vokabeln