

# Algebraische Geometrie

Prof. Dr. F. Herrlich

Wintersemester 2008/2009

Die Mitarbeiter von <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Affine Varietäten</b>	<b>4</b>
1.1 Der Polynomring . . . . .	4
1.2 Die Zariski-Topologie . . . . .	4
1.3 Irreduzible Komponenten . . . . .	6
1.4 Der Hilbertsche Nullstellensatz . . . . .	8
1.5 Morphismen . . . . .	9
1.6 Reguläre Funktionen . . . . .	11
1.7 Rationale Abbildungen . . . . .	15
<b>2 Projektive Varietäten</b>	<b>17</b>
2.8 Der projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$ . . . . .	17
2.9 Affine und projektive Varietäten . . . . .	20
2.10 Reguläre Funktionen . . . . .	22
2.11 Morphismen . . . . .	25
2.12 Graßmann-Varietäten . . . . .	28
2.13 Varietäten . . . . .	31
<b>3 Lokale Eigenschaften</b>	<b>34</b>
3.14 Lokale Ringe zu Punkten . . . . .	34
3.15 Dimension einer Varietät . . . . .	35
3.16 Der Tangentialraum . . . . .	36
3.17 Der singuläre Ort einer Varietät . . . . .	40
<b>4 Nichtsinguläre Kurven</b>	<b>43</b>
4.18 Funktionenkörper in einer Variablen . . . . .	43
4.19 Divisoren . . . . .	46
4.20 Das Geschlecht einer Kurve . . . . .	49
4.21 Der Satz von Riemann-Roch . . . . .	54
<b>Vokabeln</b>	<b>56</b>
<b>Benannte Sätze</b>	
Satz 2 Hilbertscher Nullstellensatz . . . . .	8
Satz 3 Hilbertscher Nullstellensatz . . . . .	8
Proposition 2.8.9 Projektiver Nullstellensatz . . . . .	19
Satz + Definition 9 Riemann . . . . .	50
Satz 10 Riemann-Roch . . . . .	54

# Vorwort

## Über dieses Skriptum

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Algebraische Geometrie“ von Prof. Dr. F. Herrlich im Wintersemester 08/09 an der Universität Karlsruhe. Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Prof. Dr. F. Herrlich hier veröffentlicht, Prof. Dr. F. Herrlich ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

## Wer

Getippt wurde das Skriptum soweit von Diego De Filippi, Felix Wellen, Tobias Columbus und Andreas Schatz, die Wiki-Technik ist von Joachim Breitner.

## Wo

Alle Kapitel inklusive  $\text{\LaTeX}$ -Quellen können unter <http://mitschriebwiki.nomeata.de> abgerufen werden. Dort ist ein von Joachim Breitner programmiertes *Wiki*, basierend auf <http://latexki.nomeata.de> installiert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.

# 1 Affine Varietäten

## §1 Der Polynomring

Sei  $k$  ein Körper,  $k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $n \geq 0$  der Polynomring über  $k$  in  $n$  Variablen.

### Universelle Abbildungseigenschaft (UAE) des Polynomrings

Ist  $A$  eine  $k$ -Algebra und sind  $a_1, \dots, a_n \in A$ , so gibt es genau einen  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $f : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  mit  $f(X_i) = a_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Folgerung: Jede endlich erzeugte  $k$ -Algebra ist Faktorring eines Polynomrings.

$n = 1$ , also  $k[X]$

Euklidischer Algorithmus: Zu  $f, g \in k[X], g \neq 0$  gibt es  $q, r \in k[X]$  mit  $f = qg + r$  und  $\deg(r) < \deg(g)$  oder  $r = 0$ .

Folgerung:  $k[X]$  ist Hauptidealring.

### Eindeutige Primfaktorzerlegung

$k[X_1, \dots, X_n]$  ist faktorieller Ring.

Folgerung: Jedes irreduzible Polynom erzeugt ein Primideal.

### Hilbertscher Basissatz

$k[X_1, \dots, X_n]$  ist noethersch, d.h.

- Jedes Ideal ist endlich erzeugbar.
- Jede aufsteigende Kette von Idealen wird stationär.

## §2 Die Zariski-Topologie

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

### Definition 1.2.1

Eine Teilmenge  $V \subseteq k^n$  heißt **affine Varietät**, wenn es eine Menge von Polynomen  $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  gibt, so dass  $V(F) = V = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$ .

### Beispiele

- 1)  $n = 1$ :  $V \subseteq k$  affine Varietät  $\Leftrightarrow V$  endlich oder  $V = k$
- 2)  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  linear (d.h.  $\deg(f) = 1$ )  $\Rightarrow V(f)$  ist affine Hyperebene.

$f_1, \dots, f_r$  linear  $\Rightarrow V(f_1, \dots, f_r)$  ist affiner Unterraum. (Jeder affine Unterraum lässt sich so beschreiben.)

3) Quadriken sind affine Varietäten.

4) Lemniskate

$$C = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_1) = d(P, P_2) = c\}$$

für Punkte  $P_1, P_2 \in k^2, c > 0$ .

Für  $P_1(-1, 0)$  und  $P_2(1, 0)$  ist  $C = V(f)$  mit  $f = ((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) - 1$ . Dies ist aber keine affine Varietät, da das in  $\mathbb{C}^2$  nicht klappt.

### Bemerkung 1.2.2

(i) Für  $F_1 \subseteq F_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $V(F_1) \supseteq V(F_2)$ .

(ii)  $V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$  und  $V(f_1, f_2) = V(f_1) \cap V(f_2)$

(iii)  $V(F) = V(\sqrt{(F)})$  für das von  $F$  erzeugte Ideal  $(F) \subset k[X_1, \dots, X_n]$

(iv)  $V(F) = V(\sqrt{(F)})$  für das von  $F$  erzeugte Radikalideal

$$\sqrt{(F)} = \{g \in k[X_1, \dots, X_n] : \exists d > 0 \text{ mit } g^d \in (F)\}$$

(v) Zu jeder affinen Varietät  $V \subseteq k^n$  gibt es endlich viele Polynome  $f_1, \dots, f_r$ , so dass  $V = V(f_1, \dots, f_r)$ , da jedes Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  endlich erzeugbar ist.

**Beweis** (iii) “ $\subseteq$ “ Sei  $x \in V(F), g \in (F)$ . Schreibe  $g = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$  mit  $f_i \in F, a_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ , dann ist  $g(x) = a_1(x)f_1(x) + \dots + a_r(x)f_r(x) = 0$ .  $\square$

### Definition 1.2.3

(i) Für eine Teilmenge  $V \subseteq k^n$  heißt  $I(V) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] : f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$  das **Verschwindungsideal**.

(ii)  $A(V) := k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$  heißt **affiner Koordinatenring** von  $V$ .

Für  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$  gilt:  $f|_V = g|_V \Leftrightarrow f - g \in I(V)$

### Bemerkung 1.2.4

Für jede Teilmenge  $V \subseteq k^n$  gilt:

(i)  $I(V)$  ist Radikalideal,

(ii)  $V \subseteq V(I(V))$ ,

(iii)  $V(I(V))$  ist die kleinste Varietät, die  $V$  umfasst. Schreibweise:  $V(I(V)) =: \bar{V}$ .

(iv) Sind  $V_1, V_2$  affine Varietäten, so gilt:

$$V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow I(V_1) \supseteq I(V_2)$$

**Beweis** (iii) Sei  $V'$  eine affine Varietät mit  $V \subseteq V'$  und sei  $I' \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ein Ideal mit  $V' = V(I')$ . Dann ist  $I' \subseteq I(V) \Rightarrow V(I') \supseteq V(I(V))$ .

(iv) “ $\Leftarrow$ “  $I(V_1) \supseteq I(V_2) \Rightarrow V(I(V_1)) \subseteq V(I(V_2))$ . Mit  $V_1 = V(I(V_1))$  und  $V_2 = V(I(V_2))$  folgt die Behauptung.  $\square$

### Bemerkung 1.2.5

Für jede Teilmenge  $V \subseteq k^n$  gilt:

(i)  $A(V)$  ist reduzierte  $k$ -Algebra, d.h. es gibt in  $A(V)$  keine nilpotenten Elemente (also  $f^d \neq 0$  für alle  $f \neq 0, d > 0$ ).

(ii) Ist  $V \subseteq V'$ , so gibt es einen surjektiven  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $A(V') \rightarrow A(V)$ .

**Beweis** (i) Sei  $g \in A(V)$ ,  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $\bar{f} = g$ . Dann ist  $(g^d = 0 \text{ (in } A(V))) \Leftrightarrow f^d \in I(V)$  und da  $I(V)$  Radikalideal ist, folgt  $f \in I(V)$  und somit  $g = 0$ .

(ii) Es ist  $I(V') \subseteq I(V)$ , also

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & A(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V) \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ A(V') = k[X_1, \dots, X_n]/I(V') & & \end{array}$$

□

### Definition + Satz 1.2.6

Die affinen Varietäten in  $k^n$  bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der **Zariski-Topologie**.

**Beweis** •  $k^n = V(0)$  und  $\emptyset = V(1)$  sind affine Varietäten.

• Seien  $V_1 = V(I_1)$  und  $V_2 = V(I_2)$  affine Varietäten. Dann ist  $V_1 \cup V_2 = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$ .

Denn: " $\subseteq$ " klar " $\supseteq$ ": Sei  $x \in V(I_1 \cdot I_2)$ ,  $x \notin V_1$ . (Zu zeigen:  $x \in V_2$ )

Dann gibt es ein  $f \in I_1$  mit  $f(x) \neq 0$ .

Da  $x \in V(I_1 \cdot I_2)$  ist  $f(x) \cdot g(x) = 0$  für alle  $g \in I_2 \Rightarrow x \in V(I_2) = V_2$ .

• Seien  $V_i = V(I_i)$ ,  $i \in J$ , affine Varietäten  $\Rightarrow \bigcap_{i \in J} V_i = V(\sum_{i \in J} I_i)$ .

Denn: " $\supseteq$ " klar " $\subseteq$ ": Sei  $x \in \bigcap V_i$ ,  $f \in \sum I_i$ . Schreibe  $f = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$  mit  $f_k \in I_{i_k}$ ,  $a_k \in k[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow f(x) = a_1(x) \cdot 0 + \dots + a_r(x) \cdot 0 = 0$  □

### Bemerkung 1.2.7

(i) Für  $f \in k[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$  ist  $D(f) := k^n \setminus V(f)$  nichtleere offene Teilmenge von  $k^n$ .

(ii) Die  $D(f)$  bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

**Beweis** (ii) Zu zeigen: Jede offene Menge  $U$  ist Vereinigung von Mengen der Form  $D(f)$ .

Zeige dazu: Zu jedem  $x \in U$  gibt es ein  $f$  mit  $x \in D(f) \subseteq U$ .

Sei  $V = k^n \setminus U$ , also  $V = V(I)$  für ein Ideal  $I$ . Da  $x \notin V$ , gibt es  $f \in I$  mit  $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$ .

Weil  $f \in I$ , ist  $V \cap D(f) = \emptyset \Rightarrow D(f) \subseteq U$  □

### Bemerkung 1.2.8

Die Zariski-Topologie auf  $k^n$  ist nicht hausdorffsch.

**Beweis** Wegen 2.7 genügt es zu zeigen, dass  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$  für alle  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ .

Induktion über  $n$ :

$n = 1$ :  $V(f)$  und  $V(g)$  sind endlich  $\Rightarrow D(f) \cap D(g) = k \setminus V(f \cdot g)$  ist unendlich.

$n \geq 1$ : Zerlege  $f$  und  $g$  in Primfaktoren (vgl. §1) und wähle  $a \in k$ , so dass  $(X_n - a)$  nicht Teiler von  $f$  oder  $g$  ist. Identifiziere  $V(X_n - a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n : x_n = a\}$  mit  $k^{n-1}$ .

Nach der Wahl von  $a$  sind  $f|_{V(X_n - a)}$  und  $g|_{V(X_n - a)}$  nicht identisch 0, also  $f' = f(X_1, \dots, X_{n-1}, a) \neq 0 \neq g(X_1, \dots, X_{n-1}, a) =: g'$  in  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es  $x' \in k^{n-1}$  mit  $f'(x') \neq 0 \neq g'(x') \Rightarrow$  Für  $x = (x', a) \in k^n$  gilt  $f(x) = f'(x') \neq 0 \neq g'(x') = g(x)$ . □

## §3 Irreduzible Komponenten

### Definition 1.3.1

a) Ein topologischer Raum  $X$  heißt **irreduzibel**, wenn er nicht Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen ist.

b) Eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  heißt **irreduzible Komponente**, wenn sie irreduzibel ist (bzgl. der induzierten Topologie) und maximal (bzgl. Inklusion).

### Proposition 1.3.2

Eine affine Varietät  $V \subseteq k^n$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I(V)$  Primideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der affine Koordinatenring  $A(V) =: k[V]$  nullteilerfrei ist.

**Beweis** " $\Rightarrow$ " Seien  $f_1, f_2 \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f_1 \cdot f_2 \in I(V)$ . Sei  $f_1 \notin I(V)$ .

Dann ist  $V \not\subseteq V(f_1)$ .

Nach Voraussetzung ist  $V \subseteq V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$ .

$V$  irreduzibel  $\Rightarrow V \subseteq V(f_2)$

$\Rightarrow f_2(x) = 0$  für alle  $x \in V$

$\Rightarrow f_2 \in I(V)$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $V = V_1 \cup V_2$  mit  $V_i = V(I_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Sei  $V_1 \neq V$ .

$\Rightarrow V \not\subseteq V(I_1)$

$\Rightarrow \exists x \in V$  und  $f \in I_1$  mit  $f(x) \neq 0$

Also  $f \notin I(V) \subseteq I(V_1)$

Andererseits ist  $V = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cdot I_2) \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq I(V)$

$\Rightarrow f \cdot g(x) = 0$  für alle  $g \in I_2$

$I(V)$  prim und  $f \notin I(V) \Rightarrow g \in I(V)$  für alle  $g \in I_2$

$\Rightarrow V_2 = V(I_2) \supseteq V(I(V)) = V$  □

### Satz 1

Jede affine Varietät  $V \subseteq k^n$  hat eine Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten. Diese Zerlegung ist eindeutig.

**Beweis** 1. Schritt  $V$  ist endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten.

Sei dazu  $\mathcal{B}$  die Menge der Varietäten in  $k^n$ , die nicht endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten sind. Sei weiter  $\mathcal{J} := \{I(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$ .

Zu zeigen:  $\mathcal{B} = \emptyset$

Annahme:  $\mathcal{J} \neq \emptyset$ . Dann enthält  $\mathcal{J}$  ein maximales Element  $I_0 = I(V_0)$  für ein  $V_0 \in \mathcal{B}$ .

$\Rightarrow V_0$  ist minimales Element in  $\mathcal{B}$ .

$V_0 \in \mathcal{B} \Rightarrow V_0$  irreduzibel

$\Rightarrow V_0 = V_1 \cup V_2$  mit  $V_1 \neq V_0 \neq V_2, V_i$  abgeschlossen

$\Rightarrow V_i \notin \mathcal{B}, i = 1, 2$  (da  $V_0$  minimales Element in  $\mathcal{B}$ )

$\Rightarrow V_i$  ist endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten

$\Rightarrow V_0$  auch. Widerspruch!

2. Schritt "Irreduzible Komponenten"

Sei  $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$  mit irreduziblen Varietäten  $V_1, \dots, V_n$ .

Ohne Einschränkung sei  $V_i \not\subseteq V_j$  für  $i \neq j$ .

Sei  $W \subseteq V$  irreduzibel und  $V_i \subseteq W$  für ein  $i$ .

Es ist  $W = V \cap W = (V_1 \cup \dots \cup V_n) \cap W = (V_1 \cap W) \cup \dots \cup (V_n \cap W)$

$W$  irreduzibel  $\Rightarrow \exists j$  mit

$$V_j \cap W = W \Rightarrow V_i \subseteq W = W \cap V_j \subseteq V_j \Rightarrow i = j \text{ und } W = V_i$$

$\Rightarrow V_1, \dots, V_n$  sind irreduzible Komponenten von  $V$ .

Genauso:  $W \subseteq V$  irreduzible Komponente  $\Rightarrow \exists j : W \subseteq V_j$ ,

da  $W$  maximal  $\Rightarrow$  Zerlegung eindeutig. □

### Beispiele 1.3.3

$f = y^2 - x(x-1)(x+1) \in \mathbb{R}[x, y]$   $E := V(f)$

## §4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

### Satz 2 (Hilbertscher Nullstellensatz)

Sei  $k$  ein Körper,  $n \geq 1, m \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  maximales Ideal. Dann ist  $L = k[X_1, \dots, X_n]/m$  eine endlich erzeugte Körpererweiterung von  $k$ .

**Beweis** Siehe Algebra II, Theorem 4. □

### Folgerung 1.4.1

Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so entsprechen die maximalen Ideale in  $k[X_1, \dots, X_n]$  bijektiv den Punkten in  $k^n$ .

### Beweis

$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$  (maximal, da Faktorring Körper) ist eine injektive Zuordnung  $\varphi : k^n \rightarrow m\text{-Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$  (= Menge der Maximalideale).

$\varphi$  surjektiv:

Sei  $m \in m\text{-Spec}(k[X_1, \dots, X_n]), \alpha : k[X_1, \dots, X_n]/m \rightarrow k$  der Isomorphismus, den es nach Satz 2 gibt. (Das ist tatsächlich ein Isomorphismus, da  $k$  algebraisch abgeschlossen ist und somit jede endliche Erweiterung von  $k$  wieder  $k$  selbst ist.)

$\Rightarrow X_i - \alpha(X_i) \in m, i = 1, \dots, n$  (da  $\alpha \in \text{Hom}_k \Rightarrow \alpha(X_i - \alpha(X_i)) = 0$ )

$\Rightarrow (X_1 - \alpha(X_1), \dots, X_n - \alpha(X_n)) \subseteq m$  □

### Folgerung 1.4.2 (Schwacher Nullstellensatz)

Für jedes echte Ideal  $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $V(I) \neq \emptyset$ .

**Beweis**  $I \subseteq m$  für ein maximales Ideal  $m \Rightarrow V(I) \supseteq V(m) \neq \emptyset$  □

Sei jetzt  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $n \geq 1$ , und

$$\mathcal{V}_n := \{V \subseteq k^n \mid V \text{ affine Varietät}\}$$

$$\mathcal{I}_n := \{I \subseteq k[X_1, \dots, X_n] \mid I \text{ Radikalideal}\}$$

### Satz 3 (Hilbertscher Nullstellensatz)

Die Zuordnungen

$$V : \mathcal{I}_n \rightarrow \mathcal{V}_n, \quad I \mapsto V(I)$$

$$I : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{I}_n, \quad V \mapsto I(V)$$

sind bijektiv und zueinander invers.

**Beweis** Zu zeigen: (1)  $V(I(V)) = V$  für jedes  $V \in \mathcal{V}_n$

(2)  $I(V(I)) = I$  für jedes  $I \in \mathcal{I}_n$

(1): Ist Bemerkung 2.4 (iii).

(2): Zeige:  $I(V(I)) = \sqrt{I}$  für jedes Ideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ .

“ $\supseteq$ “:  $\sqrt{\phantom{x}}$

“ $\subseteq$ “: Sei  $g \in I(V(I))$ , seien  $f_1, \dots, f_m$  Erzeuger von  $I$ .

Zu zeigen:  $\exists d : g^d = \sum_{i=1}^m a_i f_i$  für gewisse  $a_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ .

Betrachte in  $k[X_1, \dots, X_n, Y]$  das von  $f_1, \dots, f_m$  und  $gY - 1$  erzeugte Ideal  $J$ .

Es ist  $V(J) = \emptyset$

Schwacher Nullstellensatz  $\Rightarrow J = k[X_1, \dots, X_n, Y]$

$\Rightarrow \exists b_i, b \in k[X_1, \dots, X_n, Y]$  sodass  $1 = \sum_{i=1}^m b_i f_i + b(gY - 1)$

In  $R := k[X_1, \dots, X_n, Y]/(gY - 1)$  gilt also

$1 = \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i f_i$  ( $\tilde{b}_i \in k[X_1, \dots, X_n, \frac{1}{g}]$  die Restklasse von  $b_i$ ). Multipliziere mit Hauptnenner  $g^d$ . □



### Bemerkung 1.4.3

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq k^n$  eine affine Varietät. Dann entsprechen die Punkte in  $V$  bijektiv den maximalen Idealen in  $k[V]$  ( $= k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$ ).

**Beweis** Die maximalen Ideale in  $k[V]$  entsprechen bijektiv denjenigen maximalen Idealen in  $k[X_1, \dots, X_n]$ , die  $I(V)$  umfassen, also nach 4.1 den Punkten  $(x_1, \dots, x_n)$ , für die  $(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) \supseteq I(V)$  ist

$$\Leftrightarrow V(\underbrace{X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n}_{\{(x_1, \dots, x_n)\}}) \subseteq V(I(V)) = V \quad \square$$

## §5 Morphismen

### Definition + Bemerkung 1.5.1

(a) Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper,  $V \subseteq k^n$  und  $W \subseteq k^m$  affine Varietäten. Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **Morphismus**, wenn es Polynome  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  gibt, so dass  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  für jedes  $x \in V$ .

(b) Jeder Morphismus  $V \rightarrow W$  ist Einschränkung eines Morphismus  $k^n \rightarrow k^m$ .

(c) Die affinen Varietäten über  $k$  bilden zusammen mit den Morphismen aus (a) eine Kategorie  $\text{Aff}(k)$ . Als Objekte von  $\text{Aff}(k)$  bezeichnen wir  $k^n$  mit  $\mathbb{A}^n(k)$ .

### Beispiele 1.5.2

(1) Projektionen und Einbettungen  $\mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$ .

(2) Jedes  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist Morphismus  $\mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$ .

(3)  $V = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$  ("Neilsche Parabel")

$f : V \rightarrow W, x \mapsto (x^2, x^3)$  ist Morphismus.

$f$  ist bijektiv: injektiv  $\checkmark$

surjektiv: Sei  $(x, y) \in W \setminus \{(0, 0)\}$ , d.h.  $y^2 = x^3$

Dann ist  $(x, y) = f(\frac{y}{x}) = ((\frac{y}{x})^2, (\frac{y}{x})^3) = (\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2}), f(0) = (0, 0)$

Umkehrabbildung:

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{y}{x} & \text{sonst} \end{cases} \text{ ist kein Morphismus.}$$

(4) Sei  $\text{char}(k) = p > 0$ .  $f : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^n(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p)$ , heißt Frobenius-Morphismus.  $f$  ist bijektiv, aber kein Isomorphismus. Die Fixpunkte von  $f$  sind die Elemente von  $\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_p)$ .

### Bemerkung 1.5.3

Morphismen sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

**Beweis** Ohne Einschränkung sei  $f : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$ . Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  abgeschlossen,  $V = V(I)$  für ein Radikalideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_m]$ . Zu zeigen:  $f^{-1}(V)$  abgeschlossen in  $\mathbb{A}^n(k)$ .

Genauer gilt:  $f^{-1}(V) = V(J)$  mit  $J = \{g \circ f \mid g \in I\}$

denn:  $x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V \Leftrightarrow g(f(x)) = 0$  für alle  $g \in I \Leftrightarrow x \in V(J) \quad \square$

**Bemerkung 1.5.4**

Jeder Morphismus  $f : V \rightarrow W$  induziert einen  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $f^\# : k[W] \rightarrow k[V]$  (durch Hintereinanderschalten).

Genauer: Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_m] & \xrightarrow{g \mapsto g \circ f} & k[X_1, \dots, X_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[W] = k[X_1, \dots, X_m]/I(W) & \xrightarrow{f^\#} & k[X_1, \dots, X_n]/I(V) = k[V] \end{array}$$

$f^\#$  existiert, weil für alle  $g \in I(W)$  gilt:  $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0$  für alle  $x \in V$

**Proposition 1.5.5**

Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Morphismus von affinen Varietäten,  $\alpha := f^\# : k[W] \rightarrow k[V]$  der induzierte  $k$ -Algebra-Homomorphismus. Seien  $x \in V, y \in W$  und  $m_x \subset k[V], m_y \subset k[W]$  die Verschwindungsideale zum jeweiligen Punkt. Dann gilt:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(m_x) = m_y$$

**Beweis** " $\Rightarrow$ "  $g \in m_y \Leftrightarrow g(y) = 0 \Rightarrow g \circ f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{g \circ f}_{=\alpha(g)} \in m_x \Leftrightarrow g \in \alpha^{-1}(m_x) \Leftrightarrow m_y \subseteq$

$\alpha^{-1}(m_x)$ . Gleichheit folgt daraus, dass  $m_y$  maximales Ideal ist.

" $\Leftarrow$ " Wäre  $f(x) \neq y$ , dann gäbe es ein  $g \in k[W]$  mit  $g(f(x)) = 0$  und  $g(y) = 1$ .

Andererseits:

$$\alpha(g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \alpha(g) \in m_x \Leftrightarrow g \in \alpha^{-1}(m_x) = m_y \Leftrightarrow g(y) = 0 \quad \square$$

**Satz 4**

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi : \underline{\text{Aff}} &\longrightarrow \underline{k\text{-Alg}}^\circ \\ V &\longmapsto k[V] \\ f &\longmapsto f^\# \end{aligned}$$

eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien. Hierbei bezeichnet  $\underline{k\text{-Alg}}^\circ$  die Kategorie der endlich erzeugten, reduzierten  $k$ -Algebren.

**Beweis**  $\Phi$  ist ein Funktor:  $\checkmark$

Definiere Umkehrfunktor  $\Psi$ :

(i) Sei  $A \in k\text{-Alg}^\circ, a_1, \dots, a_n$  Erzeuger von  $A$

$\Rightarrow p_A : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A, X_i \mapsto a_i$  ist surjektiver  $k$ -Algebra-Homomorphismus.

Sei  $I_A := \text{Kern}(p_A)$  (Radikalideal).

$\Psi(A) := V(I_A) \subseteq k^n$  affine Varietät mit  $k[V(I_A)] \cong A$ .

(ii) Sei  $\alpha : A \rightarrow B$   $k$ -Algebra-Homomorphismus in  $\underline{k\text{-Alg}}^\circ$ .

Definiere die Abbildung  $f_\alpha := V(I_B) \rightarrow V(I_A)$  durch  $f_\alpha(y) = x$ , falls  $m_x = \alpha^{-1}(m_y)$ . Diese ist wohldefiniert aufgrund der folgenden

**Proposition 1.5.6**

Sei  $\alpha : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus von endlich erzeugten  $k$ -Algebren,  $m \subset B$  ein maximales Ideal. Dann ist  $\alpha^{-1}(m) \subset A$  ein maximales Ideal.

(Beispiel.: Für  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  ist  $\alpha^{-1}(\{0\})$  kein maximales Ideal.)

## Beweis

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\alpha^{-1}(m) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & B/m \end{array}$$

$\alpha$  induziert einen injektiven  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $\bar{\alpha}$ . Nach dem HNS ist  $B/m = k$ .  
 $k$  hat keine echte  $k$ -Unteralgebra  $\Rightarrow A/\alpha^{-1}(m) = k$ .  $\square$

**Ende des Beweises des Satzes** Noch zu zeigen:  $f_\alpha : V(I_B) \rightarrow V(I_A)$  ist ein Morphismus.  
 Schreibe dazu  $A \cong k[X_1, \dots, X_n]/I_A$ ,  $B = k[Y_1, \dots, Y_m]/I_B$ .

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & k[Y_1, \dots, Y_m] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

Bastle Lift  $\tilde{\alpha}$  von  $\alpha$ :

$$\tilde{\alpha}(X_i) = f_i \text{ mit } \bar{f}_i = \alpha(\bar{X}_i)$$

Beh.: Für  $y \in V(I_B)$  ist  $f_\alpha(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ .

Denn: Sei  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , dann ist  $m_y$  das Bild in  $B$  von  $M_y = (Y_1 - y_1, \dots, Y_m - y_m) \Rightarrow \alpha^{-1}(m_y)$  ist das Bild in  $A$  von  $\tilde{\alpha}^{-1}(M_y) = (X_1 - f_1(y), \dots, X_n - f_n(y))$ .

Nachrechnen:  $\Phi \circ \Psi \cong \text{id}_{k\text{-Alg}^\circ}$ ,  $\Psi \circ \Phi \cong \text{id}_{\text{Aff}(k)}$   $\square$

## §6 Reguläre Funktionen

### Bemerkung 1.6.1

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät. Dann gilt für  $h \in k[X_1, \dots, X_n]$ :

$\bar{h}$  ist Einheit in  $k[V] \Leftrightarrow V(h) \cap V = \emptyset$

**Beweis**  $V(h) \cap V = \emptyset \Leftrightarrow (h) + I(V) = k[X_1, \dots, X_n]$

$\Leftrightarrow 1 = g \cdot h + f$  für  $g \in k[X_1, \dots, X_n]$  und  $f \in I(V)$

$\Leftrightarrow 1 = \bar{g} \cdot \bar{h}$  in  $k[V]$ .  $\square$

### Definition 1.6.2

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät,  $U \subseteq V$  offen.

a) Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  heißt **reguläre Funktion** auf  $U$ , wenn es zu jedem  $x \in U$  eine Umgebung  $U(x) \subseteq U$  und  $g_x, h_x \in k[V]$  gibt mit  $h_x(y) \neq 0$  für alle  $y \in U(x)$  und  $f(y) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)}$  für alle  $y \in U(x)$ .

b) Eine Abbildung  $f : U \rightarrow U'$  mit  $U' \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  offen heißt **Morphismus**, wenn es reguläre Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  auf  $U$  gibt mit  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ .

### Beispiele 1.6.3

$\frac{1}{x}$  ist eine reguläre Funktion auf  $k \setminus \{0\}$ .

Dann ist  $U \rightarrow \mathbb{A}^2(k)$ ,  $x \mapsto (x, \frac{1}{x})$  ein Isomorphismus mit Bild  $V(XY - 1)$ .

### Definition 1.6.4

a) Eine **Prägarbe** besteht aus einer  $k$ -Algebra  $\mathcal{O}(U)$  für jede offene Menge  $U \subseteq V$  zusammen mit  $k$ -Algebra-Homomorphismen

$$\rho_{UU'} : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U') \quad \forall U' \subseteq U \text{ offen}$$

so dass  $\rho_{UU''} = \rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'}$  für  $U'' \subseteq U' \subseteq U$  gilt.

b) Eine Prägarbe heißt **Garbe**, falls zusätzlich noch folgende Bedingungen gelten:

Sei  $U \subseteq V$  offen und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $U$ .

(i) Ist  $f \in \mathcal{O}(U)$  und  $\rho_{UU'}(f) =: f|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $f = 0$ .

(ii) Ist für jedes  $i \in I$  ein  $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$  gegeben, so dass für alle  $i, j \in I$  gilt  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ , so gibt es  $f \in \mathcal{O}(U)$  mit  $f|_{U_i} = f_i$  für jedes  $i \in I$ .

### Bemerkung 1.6.5

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät.

(a) Für jedes offene  $U \subseteq V$  ist

$$\mathcal{O}(U) := \{f : U \rightarrow k \mid f \text{ regulär}\}$$

eine  $k$ -Algebra.

(b)  $f \mapsto \frac{f}{1}$  ist ein  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $k[V] \rightarrow \mathcal{O}(U)$  für jedes offene  $U \subseteq V$ . Dieser ist injektiv, falls  $U$  dicht in  $V$  ist. Dies ist für alle  $\emptyset \neq U$  der Fall, wenn  $V$  irreduzibel ist.

(Gegenbsp.:  $V(X \cdot Y)$ ,  $U = D(x)$ ,  $f = y$ )

(c) Die Zuordnung  $U \mapsto \mathcal{O}(U)$  ist eine Garbe  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_V$  von  $k$ -Algebren auf  $V$ .

**Beweis** Seien  $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(U)$ . Ohne Einschränkung sei  $U_1(x) = U_2(x) =: U(x)$  für alle  $x \in U$ .

Sei  $f_i = \frac{g_{i,x}}{h_{i,x}}$  auf  $U(x)$ .

$\Rightarrow h_{1,x}(y) \cdot h_{2,x}(y) \neq 0$  für alle  $y \in U(x) \Rightarrow f_1 \pm f_2$  und  $f_1 \cdot f_2$  sind reguläre Funktionen.

Mit  $h_x = 1$  und  $g_x = f$  für alle  $x$  ist jedes  $f \in k[V]$  reguläre Funktion auf jedem offenen  $U$ .  $\square$

### Proposition 1.6.6

Für jede affine Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  gilt  $\mathcal{O}(V) = k[V]$ .

**Beweis** Nach Bem. 1.6.5(b) ist  $k[V] \rightarrow \mathcal{O}(V)$  injektiv, also gilt ohne Einschränkung  $k[V] \subseteq \mathcal{O}(V)$ .

Sei zunächst  $V$  irreduzibel: Sei  $f \in \mathcal{O}(V)$ ,  $x_i \in V, i = 1, 2, U_i \subseteq V$  offene Umgebungen von  $x_i$ , auf denen  $f(y) = \frac{g_i(y)}{h_i(y)}$  gilt für geeignete  $g_i, h_i \in k[V], h_i(y) \neq 0 \quad \forall y \in U_i$ .

Dann ist  $U := U_1 \cap U_2$  offen und dicht in  $V \Rightarrow g_1 h_2 - g_2 h_1 \in I(U)$  (weil  $\frac{g_1(y)}{h_1(y)} = f(y) = \frac{g_2(y)}{h_2(y)}$  für alle  $y \in U$ ).

Mit  $V(I(U)) = \bar{U} = V$  folgt  $g_1 h_2 = g_2 h_1$  in  $k[V] \Rightarrow \frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2}$  auf  $U_1 \cap U_2$ , d.h.  $\exists g, h \in k[V]$  mit  $\frac{g_i}{h_i} = \frac{g}{h}, i = 1, 2$ .

Ist  $V$  zusammenhängend, so sei  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Die Argumentation ist die gleiche, allerdings für  $x \in V_1 \cap V_i$  ( $V_i$  geeignet).

Ist  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$  disjunkte Vereinigung von affinen Varietäten  $V_1, V_2$ , so ist  $\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(V_1) \oplus \mathcal{O}(V_2)$  (folgt aus der Definition von regulären Funktionen) und  $k[V] = k[V_1] \oplus k[V_2]$  (Übung).  $\square$

**Proposition 1.6.7**

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät,  $f \in k[V]$ . Dann ist  $\mathcal{O}(D(f)) \cong k[V]_f$  (Lokalisierung von  $k[V]$  nach dem multiplikativen System  $S = \{f^d : d \geq 0\}$ , d.h.:  $k[V]_f := \{\frac{g}{f^m} \mid g \in k[V], m \geq 0\}$ ).  $D(f)$  ist als offene Teilmenge von  $V$  zu interpretieren.

**Beispiele 1.6.8**

1)  $V = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $f = x$ ,  $D(f) = k \setminus \{0\}$

$\mathcal{O}(D(f)) = \{\frac{g}{h} : g, h \in k[X] \text{ mit } h(x) \neq 0 \text{ für alle } x \neq 0\}$   
 $= \{\frac{g}{x^d} : g \in k[X], d \geq 0\}$

2)  $V = V(x \cdot y) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ ,  $f = x \in k[V] = k[X, Y]/(X \cdot Y)$

$D(f) = V - V(x) = x$ -Achse ohne die 0

$k[V]_x = \{\frac{g}{x^d} : g \in k[V], d \geq 0\} / \sim$  mit der Äquivalenzrelation  $\frac{g}{x^d} \sim 0 \Leftrightarrow \exists d' \geq 0$  mit  $x^{d'} \cdot g = 0 \Leftrightarrow g = y \cdot g'$  für ein  $g' \in k[V] \Rightarrow \text{Kern}(k[V] \rightarrow k[V]_x) = (y) \Rightarrow k[V]_x \cong k[X]_x$ .

**Beweis** Sei  $I = I(V)$ , also  $k[V] \cong k[X_1, \dots, X_n]/I$ . Sei weiter  $\tilde{f} \in k[X_1, \dots, X_n]$  Repräsentant von  $f$ .

Beh.:  $D(f)$  ist isomorph zu einer affinen Varietät  $W := V(\underbrace{I + (\tilde{f}X_{n+1} - 1)}_{:=\tilde{I}}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$

Beweis: Übung (Blatt 4, A.3).

Nach Prop. 6.4:  $\mathcal{O}(D(f)) \cong \mathcal{O}(W) = k[W] = k[X_1, \dots, X_{n+1}]/\tilde{I}$

Sei  $\alpha : k[X_1, \dots, X_{n+1}] \rightarrow k[V]_f$  der durch  $x_i \mapsto \begin{cases} x_i : i = 1, \dots, n \\ \frac{1}{f} : i = n + 1 \end{cases}$  erzeugte Homomorphismus.

Beh.:  $\text{Kern}(\alpha) = \tilde{I}$

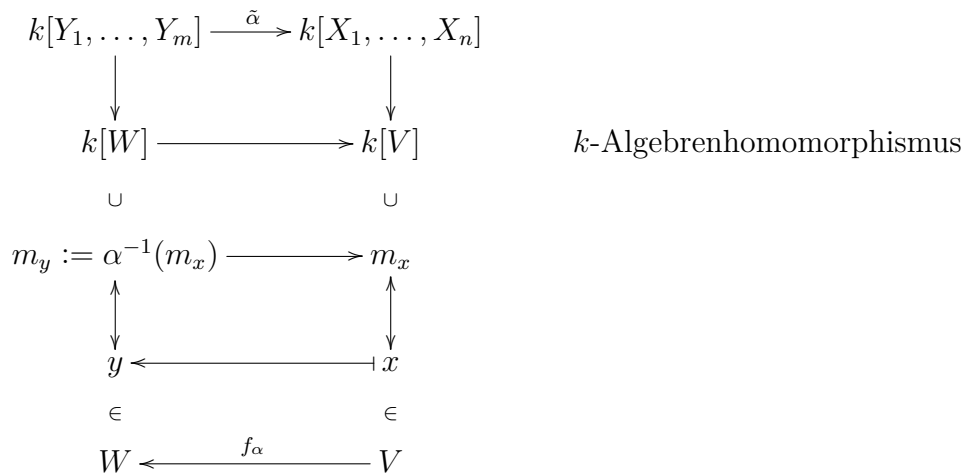
“ $\supseteq$ “  $\checkmark$

“ $\subseteq$ “  $\alpha$  induziert einen Homomorphismus:  $\tilde{\alpha} : \underbrace{k[X_1, \dots, X_{n+1}]}_{k[V][X_{n+1}]} / \tilde{I} \rightarrow k[V]_f$

zu zeigen ist also:  $A$   $k$ -Algebra,  $f \in A$

$\alpha : A[X] \rightarrow A_f$ , so ist  $\text{Kern}(\alpha) = (Xf - 1)$ . □

**Nachtrag**



### Behauptung

Für  $x \in V$  ist  $f_\alpha(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) =: y$ . Noch zu zeigen:  $\alpha^{-1}(m_x) = m_y$ . Es ist  $m_y = \overline{(Y_1 - f_1(x), \dots, Y_m - f_m(x))}$ . Dann ist  $\alpha(m_y)$  das von  $\tilde{\alpha}(Y_i - f_i(x), i = 1, \dots, n$  erzeugte Ideal. Also:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha(m_y) \subseteq m_x \\ &\Rightarrow m_y \subseteq \alpha^{-1}(m_x) \\ &\Rightarrow m_y = \alpha^{-1}(m_x) \end{aligned}$$

### Proposition 1.6.9

Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten und  $U_1 \subseteq V, U_2 \subseteq W$  offen. Dann gilt: Eine Abbildung  $f : U_1 \rightarrow U_2$  ist genau dann ein Morphismus, wenn  $f$  stetig ist und für jedes offene  $U \subseteq U_2$  gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U)) \text{ für jedes } g \in \mathcal{O}(U)$$

**Beweis** "⇒"  $f$  ist stetig nach 1.5.3. Seien  $g \in \mathcal{O}(U), x \in f^{-1}(U), U'$  Umgebung von  $f(x)$ , sodass  $g(y) = \frac{h_1(y)}{h_2(y)}$  für alle  $y \in U'$ , wobei  $h_1, h_2 \in k[W], h_2(y) \neq 0$  für alle  $y \in U'$ . Daraus folgt für  $z \in f^{-1}(U')$ :

$$g \circ f(z) = \frac{h_1(f(z))}{h_2(f(z))} = (*)$$

weil  $f$  ein Morphismus ist, gilt  $f(z) = \left(\frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \dots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right)$  für geeignete  $a_i, b_i \in k[V]$  und  $\mathcal{O}$  alle  $z \in f^{-1}(U')$  und damit

$$(*) = \frac{h_1\left(\frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \dots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right)}{h_2\left(\frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \dots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right)} =: \frac{\tilde{h}_1}{\tilde{h}_2}(z), \text{ mit } \tilde{h}_i \in k[V].$$

"⇐" Seien  $x \in U_1$  und  $U \subseteq W$  eine offene Umgebung von  $f(x) \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq V$  ist offen.

Sei  $p_i : U \rightarrow k$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion, also  $p_i(y_1, \dots, y_m) = y_i, i = 1, \dots, m$ . Nach Voraussetzung ist  $p_i \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U)), i = 1, \dots, m$ . Also gibt es  $g_i, h_i \in k[V]$  mit  $p_i \circ f(y) = \frac{g_i(y)}{h_i(y)}$  für alle  $y$  in einer geeigneten Umgebung von  $x$ .

$$\Rightarrow f(z) = \left(\frac{g_1(z)}{h_1(z)}, \dots, \frac{g_m(z)}{h_m(z)}\right) \Rightarrow f \text{ ist ein Morphismus.} \quad \square$$

### Definition 1.6.10

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät und irreduzibel. Dann heißt  $k(V) := \text{Quot}(k[V])$  **Funktionskörper** von  $V$ .

### Beispiele 1.6.11

(a)  $V = \mathbb{A}^n(k) \Rightarrow k(V) = k(X_1, \dots, X_n)$

(b)  $V = V(Y^2 - X^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$   
 $k[V] = k[X, Y]/(Y^2 - X^2) \cong k[T^2, T^3] \subseteq k[T]$   
 $\Rightarrow k(V) \cong k(T)$

### Proposition 1.6.12

Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten.

- (a)  $f$  induziert genau dann einen Körperhomomorphismus  $\varphi_f : k(W) \rightarrow k(V)$ , der den  $k$ -Algebrenhomomorphismus  $f^\# : k[W] \rightarrow k[V]$  fortsetzt, wenn  $f^\#$  injektiv ist.
- (b)  $f^\#$  ist genau dann injektiv, wenn  $f(V)$  dicht in  $W$  ist (in diesem Fall heißt  $f$  **dominant**).

### Beweis

- (a)  $k(W) = \text{Quot}(k[W])$ . Für  $x = \frac{a}{b} \in k(W)$  mit  $a, b \in k[W], b \neq 0$  muss gelten  $\varphi_f(x) = \frac{f^\#(a)}{f^\#(b)}$ . Das ist wohldefiniert  $\Leftrightarrow f^\#(b) \neq 0$  für alle  $b \neq 0$ .
- (b) Sei  $\alpha := f^\# : k[W] \rightarrow k[V], Z \subseteq V$ , dann gilt  $\alpha^{-1}(I(Z)) = I(f(Z))$ , denn:

$$\begin{aligned} g &\in \alpha^{-1}(I(Z)) \\ \Leftrightarrow \forall z \in Z : \alpha(g)(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall z \in Z : (g \circ f)(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow g &\in I(f(Z)) \end{aligned}$$

Für  $Z = V$  heißt das:  $\text{Kern}(\alpha) = \alpha^{-1}(0) = \alpha^{-1}(I(V)) = I(f(V))$ . Also:  $\text{Kern}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow I(f(V)) = 0 \Leftrightarrow V(I(f(V))) = \overline{f(V)} = W$  □

## §7 Rationale Abbildungen

### Definition + Bemerkung 1.7.1

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät.

- (a) Eine **rationale Funktion** auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$ , wobei  $U \subseteq V$  offen und dicht und  $f \in \mathcal{O}(U)$  ist. Dabei sei  $(U, f) \sim (U', f') : \Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$
- (b) In jeder Äquivalenzklasse  $[(U', f')]$  gibt es ein (bezüglich " $\subseteq$ ") maximales Element  $(U, f)$ , dessen  $U$  **Definitionsbereich** der rationalen Funktion heißt.  $V \setminus U$  heißt **Pol(stellen)menge**.
- (c) Die rationalen Funktionen auf  $V$  bilden eine  $k$ -Algebra  $\text{Rat}(V)$ .
- (d) Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $\text{Rat}(V) \cong k(V)$ .

**Beweis** (a)  $\sim$  ist transitiv: Seien  $(U, f) \sim (U', f'), (U', f') \sim (U'', f'')$ , dann folgt:  $f|_{U \cap U' \cap U''} = f'|_{U \cap U' \cap U''}$ . Da  $U \cap U' \cap U''$  dicht in  $V$  ist, ist dann auch  $f|_{U \cap U''} = f''|_{U \cap U''}$ .

- (b) Ist  $(U, f) \sim (U', f')$ , so definiere auf  $U \cup U'$  eine Funktion  $\tilde{f}$  durch  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ f'(x) & x \in U' \end{cases}$ .

Dann ist  $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U \cup U')$ .

- (c)  $f \pm g, f \cdot g$  sind reguläre Funktionen auf  $U \cap U'$ , wobei  $(U, f)$  und  $(U', g)$  Repräsentanten sind.
- (d)  $\frac{g}{h} \in k(V)$  ist eine reguläre Funktion auf  $D(h)$ .  $D(h)$  liegt dicht in  $V$ , weil  $V$  irreduzibel ist. Es folgt:  $\frac{g}{h} \mapsto (D(h), \frac{g}{h})$  ist ein wohldefinierter  $k$ -Algebrenhomomorphismus  $\alpha : k(V) \rightarrow \text{Rat}(V)$ .

$\alpha$  ist surjektiv, denn:

Sei  $(U, f)$  ein Repräsentant einer rationalen Funktion auf  $V$ . Dann gibt es offenes  $U' \subseteq U$  und  $g, h \in k[V]$  mit  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  für alle  $x \in U'$ . Da  $V$  irreduzibel ist, ist  $U'$  dicht in  $V$ . Also ist  $\alpha(\frac{g}{h})$  gleich der Klasse  $(U', \frac{g}{h})$ , was gleich der Klasse von  $(U, f)$  ist.  $\square$

### Definition + Bemerkung 1.7.2

Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten.

- (a) Eine **rationale Abbildung**  $f : V \dashrightarrow W$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f_U)$ , wobei  $U \subseteq V$  offen und dicht ist und  $f_U : U \rightarrow W$  ein Morphismus ist; dabei sei  $(U, f_U) \sim (U', f'_U) :\Leftrightarrow f_U|_{U \cap U'} = f'_U|_{U \cap U'}$ .
- (b) Rationale Funktionen sind rationale Abbildungen  $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ .
- (c) Jede rationale Abbildung hat einen maximalen Definitionsbereich.
- (d) Die Komposition von dominanten rationalen Abbildungen ist wieder eine dominante rationale Abbildung wegen  $\overline{f(U)} = \overline{f(\bar{U})}$ .
- (e) Jede dominante rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  induziert einen  $k$ -Algebrenhomomorphismus  $\text{Rat}(W) \rightarrow \text{Rat}(V)$ .
- (f) Eine dominante rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  heißt **birational**, wenn es eine rationale Abbildung  $g : W \dashrightarrow V$  gibt mit  $f \circ g \sim \text{id}_W$  und  $g \circ f \sim \text{id}_V$ .

### Beispiele

- 1)  $f : \mathbb{A}^1(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k), x \mapsto (x, \frac{1}{x})$  ist eine rationale Abbildung.
- 2)  $\sigma : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k), (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$  ist eine birationale Abbildung. Es gilt  $\sigma \circ \sigma = \text{id}$  auf  $\mathbb{A}^2(k) - V(XY)$ .

### Proposition 1.7.3

Seien  $V, W$  irreduzible affine Varietäten. Dann gibt es zu jedem Körperhomomorphismus  $\alpha : k(W) \rightarrow k(V)$  eine rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  mit  $\alpha = \alpha_f$ .

**Beweis** Wähle Erzeuger  $g_1, \dots, g_m$  von  $k(W)$  als  $k$ -Algebra. Für  $\alpha(g_i) \in k(V) = \text{Rat}(V)$  sei  $U_i \subseteq V$  der Definitionsbereich. Sei  $\tilde{U} := \bigcap_{i=1}^m U_i$ ,  $\tilde{U}$  ist offen und dicht in  $V$ . Sei  $U \subseteq \tilde{U}$  affin (d.h. isomorph zu einer affinen Varietät) und dicht (sowas gibt es, da  $D(f)$  affine Teilmenge).

$$\stackrel{1.6.6}{\Rightarrow} \alpha(g_i) \in \mathcal{O}(U) = k[U], i = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow \alpha|_{k[W]} : k[W] \rightarrow k[U] \text{ ist } k\text{-Algebrenhomomorphismus.}$$

$$\stackrel{\text{Satz 2}}{\Rightarrow} \text{Es gibt einen Morphismus } f : U \rightarrow W \text{ mit } f^\# = \alpha.$$

$\alpha_f$  ist der von  $f^\#$  induzierte Homomorphismus auf  $\text{Quot}(k[W])$ .  $\square$

### Proposition 1.7.4

Zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung  $K/k$  gibt es eine irreduzible affine  $k$ -Varietät  $V$  mit  $K \cong k(V)$ .

**Beweis** Seien  $x_1, \dots, x_n \in K$  Erzeuger der Körpererweiterung  $K/k$ . Sei weiter  $A := k[x_1, \dots, x_n]$  die von den  $x_i$  erzeugte  $k$ -Algebra.  $A$  ist nullteilerfrei, da  $A \subseteq K$ . Nach Satz 2 gibt es eine affine Varietät  $V$  mit  $A \cong k[V]$ .  $V$  ist irreduzibel, da  $A$  nullteilerfrei.  $k(V) = \text{Quot}(k[V]) \cong \text{Quot}(A) = K$ .  $\square$

### Korollar 1.7.5

Die Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen  $K/k$  (mit  $k$ -Algebrenhomomorphismen) ist äquivalent zur Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten über  $k$  mit dominanten rationalen Abbildungen.



# 2 Projektive Varietäten

## §8 Der projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$

Erinnerung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &= \{ \text{Geraden in } k^{n+1} \text{ durch } 0 \} \\ &= (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \text{ mit } (x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) : \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times : \lambda x_i = y_i \text{ für } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Schreibweise  $(x_0 : \dots : x_n) := [(x_0, \dots, x_n)]_\sim$  ("homogene Koordinaten")

**Beispiele**

$n = 0$ :  $\mathbb{P}^0(k)$  ist ein Punkt.

$n = 1$ :  $\mathbb{P}^1(k) \rightarrow k \cup \{\infty\}$  ist bijektiv.

$$(x_0 : x_1) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1}{x_0} & x_0 \neq 0 \\ \infty & x_0 = 0 \end{cases} \text{ Also: } \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1 / \{\pm 1\}$$

$k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ :

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \stackrel{(k=\mathbb{R})}{=} S^n / \pm 1$$

$\Rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  ist mit der Quotiententopologie ein kompakter topologischer Raum.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist nicht orientierbar ("Kreuzhaube").

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$\underline{k = \mathbb{F}_q}: \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) \text{ hat } \underbrace{\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}_{=1+q+q^1+\dots+q^n} \text{ Punkte.}$$

**Bemerkung 2.8.1**

Für  $n \geq 1$  und  $i = 0, \dots, n$  sei

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}$$

(a)  $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$

(b)

$$\rho_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & k^n \\ (x_0 : \dots : x_n) & \longmapsto & \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{array}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Umkehrabbildung:

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n)$$

(c)  $\varphi_i : \mathbb{P}^n(k) \setminus U_i \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k), (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n)$  ist bijektiv.

### Folgerung 2.8.2

$\mathbb{P}^n(k)$  ist disjunkte Vereinigung von  $\mathbb{A}^n(k)$  und  $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ , oder auch von  $\mathbb{A}^n(k), \mathbb{A}^{n-1}(k), \dots, \mathbb{A}^0(k)$ .

### Beobachtung

- (a) Ist  $f \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen vom Grad  $d \geq 0$ , so gilt für  $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$  und  $\lambda \in k$  stets  $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$ .
- (b) Jedes homogene Polynom in  $k[X_0, \dots, X_n]$  hat eine wohldefinierte Nullstellenmenge in  $\mathbb{P}^n(k)$ .

### Definition 2.8.3

Eine Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt **projektive Varietät**, wenn es eine Menge  $\mathcal{F} \subset k[X_0, \dots, X_n]$  von homogenen Polynomen gibt, sodass

$$V = V(\mathcal{F}) := \{x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\}.$$

### Beispiele 2.8.4

- (a)  $H_i = V(X_i) = \mathbb{P}^n(k) \setminus U_i$  ( $\stackrel{\varphi_i}{=} \mathbb{P}^{n-1}(k)$ ) ist eine projektive Varietät ("Hyperebene").
- (b)  $V = V(X_0 X_2 - X_1^2) \subset \mathbb{P}^2(k)$  ist eine projektive Varietät.  
 $V \cap U_0 = V(\frac{x_2}{x_0} - (\frac{x_1}{x_0})^2)$  Parabel in  $\mathbb{A}^2(k)$   
 $V \cap U_1 = V(\frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_1} - 1)$  Hyperbel in  $\mathbb{A}^2(k)$

### Definition + Bemerkung 2.8.5

- (a)  $S = k[X_0, \dots, X_n]$  ist **graduierter Ring** (genau: graduierte  $k$ -Algebra), das heißt:

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d, \quad S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$$

(hier:  $S_d = \{f \in k[X_0, \dots, X_n] \mid f \text{ homogen vom Grad } d\}, S_0 = k$ )

- (b) Ein Ideal  $I \subseteq S$  heißt **homogen**, wenn  $I$  von homogenen Elementen erzeugt wird. Äquivalent:  $I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap S_d)$
- (c) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen sind wieder homogen.

**Beweis** (c) Seien  $I_1, I_2$  homogene Ideale mit homogenen Erzeugern  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  beziehungsweise  $(g_j)_{j \in \mathcal{J}}$ , dann folgt, dass  $I_1 + I_2$  von den  $f_i$  und  $g_j$  erzeugt wird. Genauso  $I_1 \cdot I_2$ .

$$\begin{aligned} \bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap I_2) \cap S_d) &= \bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap S_d) \cap (I_2 \cap S_d)) \\ &= \left( \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_1 \cap S_d \right) \cap \left( \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_2 \cap S_d \right) = I_1 \cap I_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow I_1 \cap I_2$  ist homogen.

Sei  $I := I_1, x \in \sqrt{I}, x = \sum_{d=0}^n x_d, x_d \in S_d$ . Zu zeigen:  $x_d \in \sqrt{I}$ .

Dann gibt es  $m \geq 0$  mit  $x^m \in I$ :  $x^m = x_n^m +$  Terme kleineren Grades

$\Rightarrow x_n^m \in I$  da die Summe aller Monome gleichen Grades auch immer in  $I$  liegen  $\Rightarrow x_n \in \sqrt{I}$ .

Mit Induktion folgt die Behauptung  $(x - x_n = \sum_{d=0}^{n-1} x_d \in \sqrt{I} \Rightarrow x_{n-1} \in I)$  □

### Definition + Bemerkung 2.8.6

- (a) Für  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  sei  $I(V)$  das Ideal in  $k[X_0, \dots, X_n]$ , das von allen homogenen Polynomen  $f$  erzeugt wird, für die  $f(x) = 0 \forall x \in V$  gilt.  $I(V)$  heißt **Verschwindungsideal** von  $V$ .  $I(V)$  ist Radikalideal.
- (b) Für eine Menge  $F \subset k[X_0, \dots, X_n]$  von homogenen Polynomen sei  $V(F) = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \forall f \in F\}$  die zugehörige projektive Varietät. Für ein homogenes Ideal  $I$  sei  $V(I) = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I\}$ . Dann ist  $V(F) = V((F)) = V(\sqrt{(F)})$  wobei  $(F)$  das von  $F$  erzeugte Ideal sei.

**Beweis** (a)  $\sqrt{I(V)}$  ist nach 2.8.5 c) auch ein homogenes Ideal, wird also von homogenen Elementen  $f_i$  erzeugt.

$$\Rightarrow f_i^m(x) = 0 \forall x \in V \text{ und ein } m \geq 0 \Rightarrow f_i(x) = 0 \Rightarrow f_i \in I(V) \Rightarrow \sqrt{I(V)} = I(V) \quad \square$$

### Proposition 2.8.7

- (a) Die projektiven Varietäten bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Diese heißt die **Zariski-Topologie** auf  $\mathbb{P}^n(k)$ .
- (b) Eine projektive Varietät  $V$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I(V)$  ein Primideal ist.
- (c) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Komponenten.

**Beweis** Wie im affinen Fall.  $\square$

### Definition + Bemerkung 2.8.8

- (a) Für eine nicht leere projektive Varietät  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt  $\tilde{V} := \{x = (x_0, \dots, x_n) \mid (x_0 : \dots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$  der **affine Kegel** über  $V$ .
- (b)  $\tilde{V}$  ist affine Varietät. Genauer  $V = V(I)$  für ein homogenes Ideal  $I$  in  $k[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $\tilde{V} = V(I)$  als affine Varietät in  $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ .
- (c)  $I(\tilde{V}) = I(V)$

**Beweis** (b) Klar ist  $(x_0 : \dots : x_n) \in V \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . Da  $V \neq \emptyset$ , enthält das Ideal  $I$ , für das  $V = V(I)$  ist, kein Element aus  $k \setminus \{0\}$ . Für jedes homogene Element  $f \in I$  ist daher  $\deg(f) > 0 \Rightarrow f(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow \tilde{V} = V(I)$ .

(c) Für jedes homogene Polynom  $f \in k[X_0, \dots, X_n]$  gilt  $f \in I(V) \Leftrightarrow f \in I(\tilde{V})$ . Es genügt zu zeigen, dass  $I(\tilde{V})$  ein homogenes Ideal ist.

Sei also  $f \in I(\tilde{V})$  mit  $f = \sum_{i=0}^d f_i$ ,  $f_i$  homogen vom Grad  $i$ . Sei  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V}$ . Dann ist  $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda x \in \tilde{V} \forall \lambda \in k$ , also  $0 = f(\lambda x) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(x) \forall \lambda \in k$ . Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit  $|k|$  Zeilen.  $k$  ist aber algebraisch abgeschlossen, hat also unendlich viele Elemente  $\Rightarrow f_i(x) = 0 \forall i \in \{0, \dots, d\} \Rightarrow f_i \in I(\tilde{V})$ .  $\square$

### Proposition 2.8.9 (Projektiver Nullstellensatz)

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $n \geq 0$ . Für jedes von  $(X_0, \dots, X_n)$  verschiedene Radikalideal  $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  gilt  $I(\underbrace{V(I)}_{\subset \mathbb{P}^n(k)}) = \sqrt{I}$ .

**Beweis** Für gegebenes Radikalideal  $I$  sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  die zugehörige projektive Varietät.

Ist  $I = k[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $V(I) = \emptyset$  und  $I(V(I)) = k[X_0, \dots, X_n] = \sqrt{k[X_0, \dots, X_n]}$ .

Ist  $I \subsetneq k[X_0, \dots, X_n]$  homogen, so ist mit der Voraussetzung  $I \neq (X_0, \dots, X_n)$   $I \subsetneq (X_0, \dots, X_n)$ ,

und so ist die affine Nullstellenmenge von  $I$  in  $\mathbb{A}^n(k)$  echte Obermenge von  $\{(0, \dots, 0)\}$ , enthält also einen Punkt  $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ . Dann ist  $(x_0 : \dots : x_n) \in V$ , also  $V \neq \emptyset$ . Nach 2.8.8 b) ist  $\tilde{V}$  auch die durch  $I$  bestimmte affine Varietät in  $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ . Nach 2.8.8 c) ist  $I(\tilde{V}) = I(V)$ . Nach Satz 3 (Hilbertscher Nullstellensatz) ist  $I(\tilde{V}) = \sqrt{I}$ .  $\square$

### Definition + Bemerkung 2.8.10

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  projektive Varietät mit homogenem Verschwindungsideal  $I(V)$ . Dann heißt  $k[V] := k[X_0, \dots, X_n]/I(V)$  der **homogene Koordinatenring** von  $V$ .  $k[V]$  ist graduierte  $k$ -Algebra. Dabei ist  $k[V]_d := k[X_0, \dots, X_n]_d / (I(V) \cap k[X_0, \dots, X_n]_d)$ .

## §9 Affine und projektive Varietäten

Es ist  $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\} = \mathbb{P}^n(k) \setminus V(X_i)$  offen.

$\rho_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n(k)$   $(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$  ist bijektiv.

### Proposition 2.9.1

Die Bijektionen  $\rho_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n(k)$ ,  $i = 0, \dots, n$  sind Homöomorphismen bzgl. der jeweiligen Zariski-Topologie.

**Beweis**  $\text{OE}$   $i = 0$ ,  $\rho := \rho_0$

(i)  $\rho$  ist stetig: Genügt zu zeigen: Für jedes  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $\rho^{-1}(D(f))$  offen in  $U_0$ .

Äquivalent dazu:  $\rho^{-1}(V(f))$  ist abgeschlossen in  $U_0$ . Dies folgt aus:

### Bemerkung + Definition 2.9.2

Für  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $\rho^{-1}(V(f)) = U_0 \cap V(F)$ .

Dabei sei  $f = \sum_{i=0}^d f_i$ ,  $f_i$  homogen vom Grad  $i$ ,  $f_d \neq 0$  und  $F := \sum_{i=0}^d f_i \cdot X_0^{d-i} \in k[X_0, \dots, X_n]$ .  $F$  ist homogen vom Grad  $d$  und heißt die **Homogenisierung** von  $f$ .

**Beweis**  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V(f) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^d f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$

$\Leftrightarrow F(1 : x_1 : \dots : x_n) = 0 \Leftrightarrow \rho^{-1}(x) \in V(F)$ .  $\square$

Damit ist gezeigt, dass  $\rho$  stetig ist.

(ii)  $\rho^{-1}$  ist stetig: Wie in (i) genügt zu zeigen: Für jedes homogene  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  ist  $\rho(V(F) \cap U_0)$  abgeschlossen in  $\mathbb{A}^n(k)$ .

Beachte: Die  $D(F), F \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf  $\mathbb{P}^n(k)$  (Bew. wie in Bemerkung 1.2.7 (ii)).  $\square$

### Bemerkung + Definition 2.9.3

$\rho(V(F) \cap U_0) = V(f)$ , wobei mit  $y_i := \frac{x_i}{x_0}, i = 1, \dots, n$ ,  $f \in k[Y_1, \dots, Y_n]$  definiert sei durch  $f(Y_1, \dots, Y_n) = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ .

$f$  heißt **Dehomogenisierung** von  $F$  bzgl.  $x_0$ .

**Beweis**  $x = (x_0 : \dots : x_n) \in V(F) \cap U_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$  und  $F(x) = 0 \Leftrightarrow F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = 0 \Leftrightarrow f(\rho(x)) = 0 \Leftrightarrow \rho(x) \in V(f)$   $\square$

### Beispiele 2.9.4

$F(X_0, X_1, X_2) = X_1^2 - X_0 X_2$ ,  $f_{X_0}(Y_1, Y_2) = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = Y_1^2 - Y_2$ ,  $f_{X_1}(Y_0, Y_2) = 1 - Y_0 Y_2$

Frage: Wie sieht  $F$  aus, wenn  $V(F) \cap U_0 = \emptyset$ ?

Antwort: z.B.  $F = X_0^d, \sqrt{(F)} = (X_0)$ .

### Bemerkung 2.9.5

- (a) Sei  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  die Homogenisierung. Dann gilt für die Dehomogenisierung  $\tilde{f}$  von  $F$  bzgl.  $X_0$ :  $\tilde{f} = f$ .
- (b) Sei  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen,  $f \in k[Y_1, \dots, Y_n]$  die Dehomogenisierung bzgl.  $X_0$ ,  $\tilde{F}$  die Homogenisierung von  $f$ . Dann gilt:  $F = \tilde{F} \cdot X_0^d$  für ein  $d \geq 0$ .

**Beweis** (a) Sei  $f = \sum_{i=0}^d f_i$ ,  $f_d \neq 0 \Rightarrow F = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} \Rightarrow \tilde{f} = \sum_{i=0}^d f_i \cdot 1 = f$ .

- (b) Schreibe  $F = X_0^d \cdot \tilde{F}$  mit  $X_0 \nmid \tilde{F}$ . Dann hat die Dehomogenisierung von  $\tilde{F}$  bzgl.  $X_0$  denselben Grad wie  $\tilde{F} \Rightarrow$  ihre Homogenisierung ist  $\tilde{F}$ .  $\square$

### Definition + Bemerkung 2.9.6

Eine Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt **quasiprojektive Varietät**, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $W$  ist offen in einer projektiven Varietät.  
(ii) Es gibt eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{P}^n(k)$  und eine abgeschlossene Teilmenge  $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ , so dass  $W = U \cap V$ .

### Beispiele 2.9.7

$\mathbb{P}^2 \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$  ist quasiprojektiv, aber weder projektiv noch affin (was zu zeigen wäre).

### Proposition 2.9.8

Betrachte  $\mathbb{A}^n(k)$  über  $\rho_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n(k)$  als Teilmenge von  $\mathbb{P}^n(k)$ . Für ein Radikalideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  sei  $I^* \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  das von den Homogenisierungen aller  $f \in I$  erzeugte Ideal. Dann ist  $V_p(I^*) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  der Zariski-Abschluss von  $V_a(I) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ .

**Beweis** (i) " $V_a(I) \subseteq V_p(I^*)$ ": Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_a(I)$  und sei  $f \in I$ ,  $F \in I^*$  die Homogenisierung von  $f$ .

Dann ist  $F(\rho_0^{-1}(x)) = F(1 : x_1 : \dots : x_n) = f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , weil  $f \in I = I(V(I))$ .

- (ii) Sei  $V \in \mathbb{P}^n(k)$  abgeschlossen, mit  $V_a(I) \subseteq V$ .

Zu zeigen:  $V(I^*) \subseteq V$ .

Sei dazu  $V = V(\mathcal{J})$  für ein homogenes Ideal  $\mathcal{J}$ . Zu zeigen also:  $\mathcal{J} \subseteq I^*$ .

Sei  $F \in \mathcal{J}$  homogen,  $f = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$  die Dehomogenisierung von  $F$  bzgl.  $x_0$ .

Sei  $y = (y_1, \dots, y_n) \in V_a(I)$ .

Dann ist  $f(y) = F(1, y_1, \dots, y_n) = 0$ , weil  $\rho_0^{-1}(y) \in V(\mathcal{J})$ . Somit folgt  $f \in I$ .

Sei  $\tilde{F}$  die Homogenisierung von  $f$ , also  $\tilde{F} \in I^*$ , dann folgt mit 2.9.5:  $F = \tilde{F} \cdot X_0^d$  für ein  $d \geq 0 \Rightarrow F \in I^*$ .  $\square$

### Bemerkung 2.9.9

Sei  $W$  eine quasiprojektive Varietät in  $\mathbb{P}^n(k)$ .

- (a) Die Zariski-Topologie auf  $W$  besitzt eine Basis aus affinen Varietäten.

- (b)  $W$  ist quasikompakt (d.h. jede offene Überdeckung von  $W$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung)

**Beweis** (a) Sei  $W = \bigcup_{i=0}^n (W \cap U_i)$  mit  $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n(k)$ .

Also  $\text{OE } W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $W$  ist offen in einer affinen Varietät, nämlich dem Zariski-Abschluss  $V_i$  von  $W \cap U_i$  in  $U_i$ . Nach 1.2.7(ii) bilden die  $D(f)$ ,  $f \in k[V_i]$  eine Basis der Zariski-Topologie auf  $W \cap U_i$ . Jedes  $D(f)$  ist aber isomorph zu einer affinen Varietät mittels

$$\rho : \begin{array}{ccc} D(f) & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n+1}(k) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}) \end{array}$$

für  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Bild von  $\rho$  ist  $V(Yf - 1)$ .

(b) Sei  $(O_j)_{j \in J}$  offene Überdeckung von  $W$ . Nach dem Beweis von (a) wird jedes  $O_j$  überdeckt von offenen Teilen der Form  $D(f)$  für geeignete  $f \in k[\overline{O_j \cap U_i}]$ .

Also  $\exists O_j = D(f_j)$  für ein  $f_j \in k[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$  (im Folgenden bedeutet  $\hat{X}_i$ : "die  $i$ -te Variable streichen").

Sei  $F_j \in k[X_0, \dots, X_n]$  die Homogenisierung von  $f_j$ . Dann ist

$$W \subseteq \bigcup_{j \in J} D(F_j) = \mathbb{P}^n(k) - \bigcap_{j \in J} V(F_j) = \mathbb{P}^n(k) - V(\underbrace{\sum_{j \in J} (F_j)}_{=: I})$$

$I$  ist endlich erzeugtes Ideal, z.B. von  $F_1, \dots, F_r \Rightarrow W \subseteq \bigcup_{j=1}^r D(F_j) \Rightarrow W \subseteq \bigcup_{j=1}^r D(f_j) \quad \square$

## §10 Reguläre Funktionen

### Definition 2.10.1

Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine quasiprojektive Varietät. Eine Abbildung  $f : W \rightarrow k$  heißt **reguläre Funktion** auf  $W$ , wenn  $f|_{W \cap U_i}$  reguläre Funktion ist für  $i = 0, \dots, n$ .

### Bemerkung 2.10.2

Sind  $G, H \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen vom gleichen Grad, so ist  $\frac{G(x)}{H(x)}$  wohlbestimmte Funktion auf  $\mathbb{P}^n(k) \setminus V(H)$ .

### Bemerkung 2.10.3

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  quasiprojektive Varietät. Dann gilt:

$f : V \rightarrow k$  ist regulär genau dann, wenn für alle  $p \in V$  eine Umgebung  $U_p$  von  $p$  existiert, sowie homogene Polynome  $G_p, H_p$  vom gleichen Grad, so dass  $f(x) = \frac{G_p(x)}{H_p(x)}$  für alle  $x \in U_p$ .

**Beweis** " $\Rightarrow$ " Sei  $p \in U_i$ ,  $g_p, h_p \in k[V_i]$  ( $V_i = \overline{V \cap U_i}$ ) wie in 1.6.2 (d.h. es gibt ein  $U_p \subseteq U_i$ ,  $g_p, h_p \in k[V_i]$ ,  $h_p(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_p : f(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)}$ ).

Seien  $\tilde{g}_p, \tilde{h}_p$  Repräsentanten von  $g_p$  bzw.  $h_p$  in  $k[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$  und  $G_p, H_p$  Homogenisierungen.

Ist  $\deg(G_p) \neq \deg(H_p)$ , so ersetze  $G_p$  durch  $G_p \cdot X_i^{\deg(H_p) - \deg(G_p)}$  (falls  $\deg(H_p) > \deg(G_p)$ ).

$\forall x \in U_p$  ist dann

$$f(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} = \frac{G_p(x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)}{H_p(x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)}$$

" $\Leftarrow$ " Dehomogenisieren ...

### Bemerkung 2.10.4

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine quasiprojektive Varietät. Für jede offene Teilmenge  $U$  von  $V$  sei  $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_V(U) = \{f : U \rightarrow k \mid f \text{ regulär}\}$ .

(a)  $\mathcal{O}(U)$  ist  $k$ -Algebra.

(b)  $\mathcal{O}_V$  ist eine Garbe von  $k$ -Algebren auf  $V$ .

**Lemma 1**

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine projektive Varietät,  $f \in k[V]$  homogen,  $l \in \mathcal{O}_V(D(f))$ . Dann besitzt  $D(f)$  eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in J}$  mit  $U_i = D(h_i)$  für homogene  $h_i \in k[V]$ , so dass

$$l(x) = \frac{g_i(x)}{h_i(x)} \quad \forall x \in U_i$$

$g_i \in k[V]$  ebenfalls homogen mit  $\deg(g_i) = \deg(h_i)$

**Beweis** Eine offene Überdeckung  $(U'_i)_{i \in J'}$  mit  $l(x) = \frac{G_i(x)}{H_i(x)} \quad \forall x \in U'_i$ ,  $G_i, H_i$  vom gleichen Grad, existiert nach Bem 10.3. Seien  $g'_i$  und  $h'_i$  deren Restklassen in  $k[V]$ . (Beachte:  $D(h'_i)$  kann größer als  $U'_i$  sein)

Nach dem Beweis von 9.9 a) wird  $U'_i$  überdeckt von offenen Mengen der Form  $D(\tilde{h}'_i)$  für homogene  $\tilde{h}'_i \in k[V]$  (da die  $D(\tilde{h}'_i)$  eine Basis der Zariski-Topologie bilden), also

$$\begin{aligned} D(\tilde{h}'_i) &\subseteq U'_i \subseteq D(h'_i) \\ \Rightarrow V(h'_i) &\subseteq V(\tilde{h}'_i), \text{ also } \tilde{h}'_i \in \sqrt{(h'_i)} \quad (\text{HNS}) \\ \Rightarrow (\tilde{h}'_i)^m &= ah'_i \text{ für ein } a \in k[V] \text{ und ein } m \geq 0 \\ \Rightarrow \text{Auf } D(\tilde{h}'_i) &\text{ ist } l = \frac{g'_i}{h'_i} = \frac{g'_i a}{h'_i a} = \frac{g'_i a}{(\tilde{h}'_i)^m} \end{aligned}$$

Da  $D(\tilde{h}'_i) = D((\tilde{h}'_i)^m)$ , ist mit  $h_i := (\tilde{h}'_i)^m$  die Behauptung erfüllt. □

**Satz 5**

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine projektive Varietät.

- (a) Ist  $V$  zusammenhängend, so ist  $\mathcal{O}(V) \cong k$ .
- (b) Sei  $k[V]$  der homogene Koordinatenring von  $V$ ,  $f \in k[V]$  homogen. Dann ist  $\mathcal{O}_V(D(f)) \cong k[V]_{(f)} := \{ \frac{g}{f^r} : g \in k[V] \text{ homogen, } \deg(g) = r \cdot \deg(f) \} \simeq$  ("homogene Lokalisierung" von  $k[V]$  nach den Potenzen von  $f$ ).

**Beweis** (b)  $k[V]_{(f)}$  ist  $k$ -Algebra  $\checkmark$

Sonderfälle:  $f = 0$   $\checkmark$

$\deg(f) = 0$ :  $D(f) = V \xrightarrow{a)} \mathcal{O}(D(f)) \cong k$

$k[V]_{(f)} = \{ \frac{g}{f^r} : \deg(g) = 0 \} \cong k$ .

Sei also  $\deg(f) \geq 1$ :

Sei  $\alpha : k[V]_{(f)} \rightarrow \mathcal{O}(D(f))$ ,  $\frac{g}{f^r} \mapsto \frac{G}{F^r}$  ( $G, F \in k[X_0, \dots, X_n]$  Repräsentanten) ist wohldefinierter, injektiver  $k$ -Algebra-Homomorphismus (Kern ist 0).

surjektiv: Sei  $l \in \mathcal{O}(D(f))$

Nach dem Lemma gibt es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in J}$  von  $D(f)$  und  $g_i, h_i \in k[V]$  homogen vom gleichen Grad mit

$$l(x) = \frac{g_i}{h_i}(x) \text{ für alle } x \in U_i$$

und  $U_i = D(h_i) \quad \forall i \in J$

Beh.:  $\exists g_i h_j = g_j h_i$  in  $k[V]$  für alle  $i, j$ .

Denn: Auf  $U_i \cap U_j$  gilt  $\frac{g_i}{h_i} = \frac{g_j}{h_j}$ , deshalb ist  $g_i h_j = g_j h_i$

Nach dem Lemma ist  $V \setminus (U_i \cap U_j) = V(h_i) \cup V(h_j) \Rightarrow h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0$  auf ganz  $V$ .

Setze  $\tilde{g}_i = g_i h_i, \tilde{h}_i = h_i^2 \Rightarrow \frac{\tilde{g}_i}{\tilde{h}_i} = \frac{g_i}{h_i} = l$  auf  $U_i$  und  $\tilde{g}_i \tilde{h}_j - \tilde{g}_j \tilde{h}_i = 0$  auf  $V$

$\Rightarrow \tilde{g}_i \tilde{h}_j = \tilde{g}_j \tilde{h}_i$  in  $k[V]$ .

Nach Bem 9.9 und dem Lemma überdecken endlich viele der  $D(h_i)$  ganz  $D(f)$ , also  $\mathfrak{O}_E$

$$\begin{aligned} D(f) &= \bigcup_{i=1}^r D(h_i) \\ \Rightarrow V(f) &= \bigcap_{i=1}^r V(h_i) = V(h_1, \dots, h_r) \\ \Rightarrow f &\in I(V(h_1, \dots, h_r)) \stackrel{HNS}{=} \sqrt{(h_1, \dots, h_r)} \\ \Rightarrow f^m &= \sum_{i=1}^r a_i h_i \text{ für geeignetes } m \geq 0, a_i \in k[V] \text{ homogen.} \end{aligned}$$

Setze  $g := \sum_{i=1}^r a_i g_i$ . Dann ist  $g$  homogen und  $\deg(g) = \deg(f)$ . Für  $j = 1, \dots, r$  gilt

$$f^m g_j = \sum_{i=1}^r (a_i h_i) g_j \stackrel{Beh.}{=} \sum_{i=1}^r a_i g_i h_j = g h_j$$

$\Rightarrow$  auf  $U_j$  ist  $\frac{g}{f^m} = \frac{g_j}{h_j} = l$

(a)  $\mathfrak{O}_E$   $V$  irreduzibel (Die Konstante auf jeder Komponente muss auf den Durchschnitten gleich sein)

Sei  $V_i := V \cap U_i$  (wobei  $U_i = D(X_i) = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\}$ ).  $\mathfrak{O}_E$   $V_i \neq \emptyset$

Sei  $f \in \mathcal{O}(V)$ . Dann ist  $f|_{V_i} \in \mathcal{O}(V_i) \stackrel{b)}{=} k[V]_{(X_i)}$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

(Beachte: Beim Beweis des (b)-Teils wurde der (a)-Teil nur für den Fall, dass  $\deg f = 0$  ist, verwendet. Hier ist aber  $f = X_i$ , also  $\deg f = 1$ ).

Da  $V$  irreduzibel ist, folgt mit 2.8.7 b), dass  $k[V]$  nullteilerfrei ist.

Sei also  $L := \text{Quot}(k[V])$ . Insbes.  $f_i := f|_{V_i} \in L$ .

Schreibe  $f_i = \frac{g_i}{X_i^{d_i}}$  für ein homogenes  $g_i \in k[V]$  vom Grad  $d_i$ .

$f_i = f_j$  auf  $U_i \cap U_j \Rightarrow f_i = f_j = f$  in  $L$ .

Beh. 1:  $f$  ist ganz über  $k[V]$ .

Dann ist  $f^m + \sum_{j=1}^{m-1} a_j f^j = 0$  für geeignetes  $m \geq 0, a_j \in k[V]$ .

Multipliziere mit  $X_i^{d_i m} \Rightarrow \underbrace{g_i^m}_{\deg=d_i m} + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \underbrace{g_i^j \cdot X_i^{d_i(m-j)}}_{\deg=d_i m} = 0$

$\Rightarrow \mathfrak{O}_E$   $a_j$  homogen vom Grad 0  $\Rightarrow a_j \in k$  und damit auch  $f \in k$ .

Beweis von Beh. 1:

Genügt (Alg II):  $k[V][f]$  ist in einem endlich erzeugten  $k[V]$ -Modul enthalten.

Beh. 2:  $k[V][f] \subseteq \frac{1}{X_0^d} k[V]$ , wobei  $d = \sum_{i=0}^n d_i$

Beweis von Beh. 2: Zu zeigen:  $X_0^d \cdot f^j \in k[V]$  für jedes  $j \geq 0$ . Dies folgt aus

Beh. 3:  $k[V]_d \cdot f^j \subseteq k[V]_d$  für alle  $j \geq 0$ .

Beweis von Beh. 3:

$k[V]_d$  wird erzeugt von den Restklassen der Monome  $X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n}$  mit  $\sum_{i=0}^n j_i = d$  (und  $j_i \geq 0$ )

$\Rightarrow \exists i$  mit  $d_i \leq j_i$

$\Rightarrow X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n} \cdot f = X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_i^{j_i - d_i} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n} \cdot g_i \in k[V]_d$  □



# §11 Morphismen

## Definition + Bemerkung 2.11.1

Seien  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  und  $W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$  quasiprojektive Varietäten.

- (a) Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **Morphismus** wenn es zu jedem  $x \in V$  eine Umgebung  $U_x$  und homogene Polynome  $f_0^{(x)}, \dots, f_m^{(x)} \in k[X_0, \dots, X_n]$ , alle vom gleichen Grad, sodass  $f(y) = (f_0^{(x)}(y) : \dots : f_m^{(x)}(y))$  für jedes  $y \in U_x$ .
- (b) Die Morphismen  $V \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  entsprechen bijektiv den regulären Funktionen auf  $V$ .
- (c) Morphismen sind stetig.
- (d) Die quasiprojektiven Varietäten über  $k$  bilden mit den Morphismen aus a.) eine Kategorie  $\underline{Var}^o(k)$ .

**Beweis** (a) -

- (b) Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  ein Morphismus. Sei  $x \in V, U_x, f_0^{(x)}, f_1^{(x)}$  wie in a.), das heißt:  $f(y) = (f_0^{(x)} : f_1^{(x)})$  für alle  $y \in U_x$  (wobei  $\mathbb{A}^1(k)$  mit  $U_0$  identifiziert sei). Dann ist  $\frac{f_1^{(x)}(y)}{f_0^{(x)}(y)} \in k$  für alle  $y \in U_x$ .  $\Rightarrow f \in \mathcal{O}(V)$ . Die Umkehrung folgt aus Bemerkung 2.10.3.
- (c) Wie für affine Varietäten, siehe 1.5.3. □

## Beispiele

- 1.) Die Abbildung  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1)$  ist ein Morphismus  $\mathbb{P}^2(k) \setminus \{(0 : 0 : 1)\} \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ , der sich nicht stetig auf ganz  $\mathbb{P}^2(k)$  fortsetzen lässt.

$$\begin{aligned} \text{Für } (\lambda : \lambda : \mu), \lambda \neq 0, \text{ ist } f(\lambda : \lambda : \mu) &= (1 : 1) \\ \text{aber für } (\lambda : -\lambda : \mu), \lambda \neq 0, \text{ ist } f(\lambda : -\lambda : \mu) &= (1 : -1) \end{aligned}$$

$\{(1 : 1)\}$  und  $\{(1 : -1)\}$  sind abgeschlossen, also müssen ihre Urbilder auch abgeschlossen sein. Der Abschluss von  $\{(x_0 : x_1 : x_2) \subseteq \mathbb{P}^2(k) : x_0 = x_1\}$  ist aber in  $V(X_0 - X_1)$  enthalten, denn  $V(X_0 - X_1)$  ist irreduzibel und es gilt:

$$\begin{aligned} V(X_0 - X_1) &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \subseteq \mathbb{P}^2(k) : x_0 = x_1\} \\ &= \{(0 : 0 : 1)\} \cup \{(\lambda : \lambda : \mu) \in \mathbb{P}^2(k) : \lambda \in k^\times, \mu \in k\} \end{aligned}$$

Das Urbild von  $\{1, 1\}$  ist  $V(X_0 - X_1) \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ , also nicht abgeschlossen.

- 2.) Sei  $E := V(X_0 X_2^2 - X_1^3 + X_1 X_0^2)$  (elliptische Kurve  $y^2 = x^3 - x$ ).

$$f : \begin{array}{ccc} E \setminus \{(0 : 0 : 1)\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (x_0 : x_1) \end{array}$$

lässt sich zu einem Morphismus  $E \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  fortsetzen.

Sei  $(x_0 : x_1 : x_2) \in E \setminus \{(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0)\}$  mit  $x_2^2 + x_1 x_0 \neq 0$  Dann ist auch  $x_1 \neq 0$  und somit

$$\begin{aligned} f(x_0 : x_1 : x_2) &= (x_0 : x_1) \stackrel{x_2^2 + x_1 x_0 \neq 0}{=} (x_0(x_2^2 + x_1 x_0) : x_1(x_2^2 + x_1 x_0)) \\ &= (x_1^3 : x_1(x_2^2 + x_1 x_0)) \stackrel{x_1 \neq 0}{=} (x_1^2 : x_2^2 + x_1 x_0) \end{aligned}$$

Seien

$$U = E \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$$

$$U' = E \setminus \{(1 : 0 : 0)\}$$

$$\Rightarrow E = U \cup U'.$$

$f : U \rightarrow \mathbb{P}^1, (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1)$  ist ein Morphismus.

$f' : U' \rightarrow \mathbb{P}^1, (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1^2 : x_2^2 + x_1x_0)$  ist ein Morphismus.

Auf  $U \cap U'$  gilt  $f(y) = f'(y)$ .

### Folgerung 2.11.2

Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  von quasiprojektiven Varietäten ist genau dann ein Morphismus, wenn  $f$  stetig ist und für jedes offene  $U \subseteq W$  und jedes  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$$

**Beweis** Folgt aus 2.11.1 b). Alternativ: Beweis von Proposition 1.6.6 anpassen.

“ $\Rightarrow$ “  $f$  ist ein Morphismus  $\Rightarrow f$  ist stetig. Mit 2.11.1.b) folgt:  $g : U \rightarrow k$  ist ein Morphismus ( $U \subseteq W$ )  $\Rightarrow g \circ f$  ist als Komposition von Morphismen auch ein Morphismus, also folgt mit 2.11.1.b), dass  $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

“ $\Leftarrow$ “ Angenommen,  $f$  ist kein Morphismus.

Sei  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Dann existiert ein  $f_i$ , das sich auf  $U_x$  nicht als Polynom darstellen lässt.

Sei  $g_i$  die Projektion auf diese Komponente.

Dann ist  $g \circ f = f_i$  kein Morphismus, also  $g \circ f \notin \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$  □

### Folgerung 2.11.3

Sind  $V, W$  affine Varietäten, so ist eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  genau dann ein Morphismus von affinen Varietäten, wenn sie ein Morphismus im Sinne von Definition 2.11.1 a) ist.

Eleganter: Die Homöomorphismen  $\mathbb{A}^n(k) \xrightarrow{\sim} U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  ( $n \geq 0$ ) induzieren einen volltreuen Funktor  $\underline{Aff}(k) \rightarrow \underline{Var}^o(k)$ .

### Proposition 2.11.4

Für jedes  $n \geq 1$  ist  $Aut(\mathbb{P}^n(k)) \simeq \text{PGL}_{n+1}(k) = \text{GL}_{n+1}(k) / \{\lambda \cdot I_{n+1} : \lambda \in k^\times\}$

**Beweis** Für  $A \in \text{GL}_{n+1}(k)$  sei

$$\sigma_A : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k) \text{ die Abbildung } \sigma_A(x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n) \text{ mit } A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$\sigma_A$  ist wohldefiniert, da  $A(\lambda x) = \lambda Ax$ .

$\sigma_A$  ist Morphismus, denn  $y_i$  ist lineares Polynom in den  $x_j$

$\sigma_A$  ist Automorphismus, da  $\sigma_A \circ \sigma_{A^{-1}} = id$

Es ist  $\sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_{A \cdot B} \Rightarrow \sigma : \text{GL}_{n+1}(k) \rightarrow Aut(\mathbb{P}^n(k)), A \mapsto \sigma_A$  ist Gruppenhomomorphismus.

Noch zu zeigen:

1.  $\{\lambda \cdot I_{n+1} : \lambda \in k^\times\} = \ker \sigma$
2.  $\sigma$  ist surjektiv.

Beweis von 1:

„ $\subseteq$ “: klar.

„ $\supseteq$ “: Sei  $\sigma_A = id$ . Dann gibt es für  $i = 0, \dots, n$  ein  $\lambda_i \in k^\times$  mit

$$\begin{aligned}
 A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\
 \Rightarrow A &= \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \in k^\times \\
 \Rightarrow \lambda_0 &= \dots = \lambda_n = \lambda \quad \square
 \end{aligned}$$

### Bemerkung 2.11.5

Sei  $f : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^m(k)$  ein Morphismus, dann gibt es homogene Polynome  $f_0, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ , so dass  $f(x) = (f_0(x) : \dots : f_m(x))$  für alle  $x \in \mathbb{P}^n(k)$ .

**Beweis** Übungsblatt 8, Aufgabe 3 □

**Beweis (von Beh. 2)** Sei  $f : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  Automorphismus, dann gibt es also nach 2.11.5 homogene Polynome  $f_0, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_n]$  vom gleichen Grad  $d$  mit  $f(x) = (f_0(x) : \dots : f_n(x))$ . Genauso gibt es homogene Polynome  $g_0, \dots, g_n \in k[X_0, \dots, X_n]$  vom gleichen Grad  $e$  mit  $f^{-1}(x) = (g_0(x) : \dots : g_n(x))$ .

Es ist  $(f_0(f^{-1}(x)) : \dots : f_n(f^{-1}(x))) = (x_0 : \dots : x_n)$  für jedes  $x \in \mathbb{P}^n(k)$ .

$\Rightarrow f_i \circ f^{-1} = X_i \cdot h$  für ein homogenes Polynom  $h$  vom Grad  $d \cdot e - 1$ .  $h$  kann keine Nullstelle haben, denn  $f_i \circ f^{-1}$  ist auf ganz  $\mathbb{P}^n(k)$  definiert.

$\Rightarrow h \in k^\times \Rightarrow d \cdot e = 1 \Rightarrow d = 1$  und  $e = 1$

$\Rightarrow f_i = \sum_{j=0}^m a_{ij} X_j$  für geeignete  $a_{ij} \in k$ .

$\Rightarrow f = \sigma_A$  mit  $A = (a_{ij})$ . □

### Beispiele

Seien  $n = 1, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k), x = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1(k)$

Dann ist  $\sigma_A(x) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1)$

In  $U_1$  ist also

$$\sigma_A(x) = \frac{ax_0 + bx_1}{cx_0 + dx_1} = \frac{a \frac{x_0}{x_1} + b}{c \frac{x_0}{x_1} + d}$$

### Erinnerung / Definition + Bemerkung 2.11.6

Sei  $V \subset \mathbb{P}^n(k)$  quasiprojektive Varietät.

- (a) Eine **rationale Funktion** auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$ , wo  $U \subset V$  offen und dicht und  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  mit der Äquivalenzrelation  $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$ .

- (b) Ist  $V$  irreduzibel, so bilden die rationalen Funktionen auf  $V$  einen Körper  $k(V)$ , den **Funktionskörper** von  $V$ .
- (c) Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $k(V) \simeq \text{Quot}(k[U])$  für jede dichte, affine und offene Teilmenge  $U \subset V$ .
- (d) Ist  $W$  eine weitere quasi-projektive Varietät, so ist eine **rationale Abbildung**  $f : V \dashrightarrow W$  eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f_U)$ , wo  $U \subset V$  offen, dicht und  $f_U : U \rightarrow W$  Morphismus und  $(U, f_U) \sim (U', f'_U) : \Leftrightarrow f_U|_{U \cap U'} = f'_U|_{U \cap U'}$ .
- (e) Erinnerung: Eine rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  heißt **dominant**, wenn  $f_U(U)$  dicht in  $W$  ist, für einen (jeden) Repräsentanten  $(U, f_U)$  von  $f$ .
- (f) Die Zuordnung  $V \mapsto k(V)$  ist eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{irred. quasi-proj. Varietäten} \\ + \text{ dom. rationale Abb.} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{endl. erzeugte Körpererweiterungen } K/k \\ + \text{ } k\text{-Algebra-hom.} \end{array} \right\}$$

## §12 Graßmann-Varietäten

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $1 \leq d \leq n$  natürliche Zahlen.

### Definition + Bemerkung 2.12.1

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $k$ -Vektorraum.

- (a)  $G(d, n)(V) := \{U \subseteq V : U \text{ ist Untervektorraum von } V, \dim(U) = d\}$
- (b)  $G(d, n) := G(d, n)(k^n)$
- (c) Es gibt eine Bijektion  $G(d, n)(V) \rightarrow G(d, n)$ .

### Beispiele

$$d = 1: G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$$

### Bemerkung 2.12.2

Es gibt "natürliche" Bijektionen

$$G(d, n) \rightarrow G(n - d, n)$$

für alle  $1 \leq d \leq n - 1$ .

**Beweis** Sei  $V^*$  der Dualraum zu  $V$ . Dann ist die Bijektion gegeben durch

$$\begin{aligned} G(d, n)(V) &\rightarrow G(n - d, n)(V^*) \\ U &\mapsto \{l \in V^* : U \subseteq \text{Kern}(l)\} \\ \bigcap_{l \in U^*} \text{Kern}(l) &\leftarrow U^* \end{aligned} \quad \square$$

### Bemerkung + Definition 2.12.3

Sei  $\mathcal{F}_n(k) = \{(x_1 : \dots : x_n), (y_1, \dots, y_n)\} \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \times k^n :$

$$(y_1 : \dots : y_n) = (x_1 : \dots : x_n) \text{ oder } (y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)\}$$

Beh.  $\mathcal{F}_n(k)$  ist quasiprojektive Varietät, als Untervarietät von

$$\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$((x_1 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_n)) \mapsto (x_1 y_0 : x_1 y_1 : \dots : x_n y_n)$$

mit  $N = n(n+1)$  und  $x_i y_k : x_j y_k = x_i y_l : x_j y_l$

Denn:  $\mathcal{F}_n(k) = V(x_i y_j - x_j y_i, 1 \leq i < j \leq n)$

Sei  $pr : \mathcal{F}_n(k) \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k)$  die Projektion auf die erste Komponente.

$pr$  ist ein surjektiver Morphismus.

Für  $x := (x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$  ist

$$pr^{-1} = \{((x_1 : \dots : x_n)(y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{P}^{n-1} \times k^n : y_i = \lambda x_i \text{ für ein } \lambda \in k \text{ und alle } i = 1, \dots, n\}$$

$\mathcal{F}_n(k)$  heißt **tautologisches Bündel**

Für die folgende Proposition, sei zunächst folgende

Erinnerung: Ist  $e_1, \dots, e_n$  Basis von  $v$ , so ist  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$  Basis von  $\wedge^d V$ . (zwei  $e_{i_j}$  vertauschen dreht das Vorzeichen, zwei gleiche  $e_{i_j}$  gibt deshalb 0)

### Proposition 2.12.4

$G(d, n)(V)$  "ist" quasiprojektive Varietät.

Genauer: Sei  $\wedge^d V$  die  $d$ -te äußere Potenz von  $V$  und sei

$$\psi := \psi_{d,n} : \begin{array}{ccc} G(d, n)(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\wedge^d V) \\ U & \longmapsto & [u_1 \wedge \dots \wedge u_d] \end{array}$$

wobei  $u_1, \dots, u_d$  eine Basis von  $U$  ist. Dann gilt:

(a)  $\psi$  ist wohldefiniert.

(b)  $\psi$  ist injektiv

(c)  $\text{Bild}(\psi)$  ist Zariski-abgeschlossen in  $\mathbb{P}(\wedge^d V) = \mathbb{P}^{N-1}(k)$ ,  $N = \dim(\wedge^d V) = \binom{n}{d}$

**Beweis** (a) Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine weitere Basis von  $U$ .

$$\text{Dann gibt es ein } A \in \text{GL}_d(k) \text{ mit } A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \sum_{i=1}^d a_{1i} u_i \wedge \dots \wedge \sum_{i=1}^d a_{di} u_i =$$

$$(\sum_{\sigma \in S_d} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{d\sigma(d)}) \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_d = \det A \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_d$$

(b) Sei  $u_1, \dots, u_d$  eine Basis von  $U$

Zu zeigen:  $U$  ist durch  $[u_1 \wedge \dots \wedge u_d]$  eindeutig bestimmt.

Dies folgt aus der Behauptung:

$$U = \{v \in V : v \wedge (u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = 0\}$$

Beweis der Beh.:  $v \wedge (u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = 0$

$\Leftrightarrow v, u_1, \dots, u_d$  sind linear abhängig

$\Leftrightarrow v \in \langle u_1, \dots, u_d \rangle = U$

- (c) Wir brauchen homogene Gleichungen, die in allen Punkten in  $\text{Bild}(\psi)$  erfüllt werden.  
Beobachtung:

$$\text{Bild}(\psi) = \{[\omega] : \omega \in \bigwedge^d V \text{ und } \omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_d \text{ für lin. unabh. Vektoren } u_1, \dots, u_d \text{ in } V\}$$

( $\omega$  ist "total zerlegbar")

Für  $\omega \in \bigwedge^d V$  sei

$$\varphi_\omega : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^{d+1} V \\ v & \longmapsto & \omega \wedge v \end{array}$$

und  $L_\omega = (l_{ij}(\omega))$  ("Plücker Koordinaten") die Darstellungsmatrix von  $\varphi_\omega$  bezüglich der Basen  $e_1, \dots, e_n$  und  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{d+1}} : 1 \leq i_1 < \dots < i_{d+1} \leq n\}$ .

Die Abbildung

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \bigwedge^d V & \longrightarrow & \text{Hom}_k(V, \bigwedge^{d+1} V) \\ \omega & \longmapsto & \varphi_\omega \end{array}$$

ist linear. Dabei sind die  $l_{ij}(\omega)$  linear in  $\omega$ , das heißt

$$l_{ij} : \begin{array}{ccc} \bigwedge^d V & \longrightarrow & k \\ \omega & \longmapsto & l_{ij}(\omega) \end{array}$$

ist eine lineare Abbildung.

### Behauptung

$[\omega] \in \text{Bild}(\psi) \Leftrightarrow \det(l_{ij}(\omega))_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \in \mathcal{J}}} = 0$  für alle  $(n-d+1)$ -Minoren  $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$  von  $L_\omega$

Diese Determinanten sind homogene Polynome vom Grad  $n-d+1$  in den Linearformen  $l_{ij}$ . Also ist

$$\text{Bild}(\psi) = V((\det(l_{ij})_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \in \mathcal{J}}}) : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \text{ ist } (n-d+1)\text{-Minor})$$

das heißt  $\text{Bild}(\psi)$  ist abgeschlossen.

### Beweis (der Behauptung)

$$\begin{aligned} & \det(l_{ij})_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \in \mathcal{J}}} = 0 \text{ für alle } (n-d+1)\text{-Minoren} \\ \Leftrightarrow & \text{Rg}(\varphi_\omega) \leq n-d \\ \Leftrightarrow & \dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \geq d \end{aligned}$$

Die Behauptung lautet also:

### Behauptung (')

$\omega$  total zerlegbar  $\Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \geq d$

### Behauptung (")

- $\dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \leq d$
- $\dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) = d \Leftrightarrow \omega$  total zerlegbar
- Für  $v \neq 0$ :  $v \in \text{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \bigwedge^{d-1} V$  und  $\omega = v \wedge \omega'$

**Beweis** (c)  $\mathbf{OE} v = e_n$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \\ \Rightarrow 0 = \omega \wedge v &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_n \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\underline{i}} = 0 \text{ f\u00fcr alle } \underline{i} = (i_1, \dots, i_d) \text{ mit } i_d \neq n \\ \Rightarrow \omega &= \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_{d-1}, n} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{d-1}} \right) \wedge e_n =: \omega' \wedge e_n \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ ”  $\checkmark$

- (a) Aus (c) folgt mit Induktion \u00fcber  $m$ : Sind  $v_1, \dots, v_m \in \text{Kern}(\varphi_\omega)$  linear unabh\u00e4ngig, so gibt es  $\omega \in \wedge^{d-m} V$  mit  $\omega = \omega_m \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_m \Rightarrow m \leq d$
- (b) “ $\Rightarrow$ ” Sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis von  $\text{Kern}(\varphi_\omega)$   
<sup>Bew.a)</sup>  $\Rightarrow \omega = \lambda \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_d$  f\u00fcr ein  $\lambda \in k^\times$   
“ $\Leftarrow$ ” Sei  $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_d$

$$\begin{aligned} v \in \text{Kern}(\varphi_\omega) &\Leftrightarrow v, u_1, \dots, u_d \text{ linear abh\u00e4ngig} \\ &\Leftrightarrow v \in \langle u_1, \dots, u_d \rangle \\ &\Rightarrow \text{Kern}(\varphi_\omega) = \langle u_1, \dots, u_d \rangle \\ &\text{mit } \dim \text{Kern}(\varphi_\omega) = d \end{aligned}$$

□

## §13 Variet\u00e4ten

Seien  $V_1, V_2$  quasiprojektive Variet\u00e4ten,  $U_i \subseteq V_i$  offen ( $i = 1, 2$ ),  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  ein Isomorphismus.

Sei  $V := (V_1 \dot{\cup} V_2) / \sim$ , wobei f\u00fcr  $x \in V_1$  und  $y \in V_2$  gelte

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \in U_1 \text{ und } y = \varphi(x) \in U_2$$

$V$  ist ein topologischer Raum mit der Quotiententopologie. F\u00fcr  $U \subseteq V$  offen sei

$$\mathcal{O}_V(U) := \{f : U \rightarrow k \mid \forall x \in U \exists U_x \text{ offen mit } U_x \subseteq V_1 \text{ oder } U_x \subseteq V_2 \text{ und } f|_{U_x} \text{ ist regul\u00e4r}\}$$

d.h.  $f|_{U_x} \in \mathcal{O}_{V_1}(U_x)$ , bzw.  $\mathcal{O}_{V_2}(U_x)$ .

Ist  $x \in U_1$  (oder  $x \in U_2$ ), so ist  $\mathbf{OE} U_x \subseteq U_1$  und  $\varphi(U_x) \subseteq U_2$  ebenfalls offene Umgebung von  $x$  in  $V$ .

dann ist  $f \in \mathcal{O}_{V_2}(\varphi(U_x)) \Leftrightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{V_1}(U_x)$

### Bemerkung 2.13.1

$\mathcal{O}_V$  ist Garbe von  $k$ -Algebren auf  $V$ .

### Definition 2.13.2

$V$  wie oben hei\u00dft die aus  $V_1$  und  $V_2$  durch Verkleben l\u00e4ngs  $U_1$  und  $U_2$  via  $\varphi$  entstandene **Pr\u00e4variet\u00e4t**. (Begriff nicht so in der Literatur)

### Beispiele 2.13.3

(a)  $V_1 = V_2 = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$   
 $\varphi : U_1 \rightarrow U_2, x \mapsto \frac{1}{x}$

Dann ist die Verklebung  $V$  von  $V_1$  und  $V_2$  längs  $\varphi$  isomorph zu  $\mathbb{P}^1(k)$ .

Dabei heißt  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  **Isomorphismus**, wenn  $\Psi$  ein Homöomorphismus ist und für jedes offene  $U \subset \mathbb{P}^1(k)$  gilt:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)} \rightarrow \mathcal{O}_V(\Psi^{-1}(U)), \quad f \mapsto f \circ \Psi$$

ist ein Isomorphismus von  $k$ -Algebren.  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  sei wie folgt definiert:

$$\Psi | V_1 = \rho_0 : \mathbb{A}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad x \mapsto (1 : x)$$

$$\Psi | V_2 = \rho_1 : \mathbb{A}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad y \mapsto (y : 1)$$

für  $x \in U_1$  ist  $(1 : x) = (\varphi(x) : 1) = (\frac{1}{x} : 1)$

Übungsaufgabe: Verklebe  $n + 1$  Kopien von  $\mathbb{A}^n(k)$ , so dass  $\mathbb{P}^n(k)$  entsteht.

(b)  $V_1 = V_2 = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}$

$\varphi : U_1 \rightarrow U_2, \varphi = \text{id}$ ,  $V$  Verklebung längs  $\varphi$ .

Für jedes offene  $U \subseteq V$  mit  $0_1 \in U$  und  $0_2 \in U$  und jedes  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  ist  $f(0_1) = f(0_2)$ .

So ein  $V$  heißt **separiert**.

### Bemerkung 2.13.4

Ein topologischer Raum ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

abgeschlossen in  $X \times X$  ist.

**Beweis** “ $\Rightarrow$ “ Sei  $X$  hausdorffsch,  $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$

$\Rightarrow x \neq y$ . Dann gibt es ein  $U \subset X$  offen,  $V \subset X$  offen mit  $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow U \times V$  ist offene Umgebung von  $(x, y)$  mit  $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$

“ $\Leftarrow$ “ Sei  $x \neq y \in X$ ,  $W$  eine offene Umgebung von  $(x, y)$  in  $X \times X$  mit  $W \cap \Delta = \emptyset$

$\Rightarrow W = U \times V$ , da die  $U \times V$  eine Basis der Topologie auf  $X \times X$  bilden  $\Rightarrow U \cap V = \emptyset$  □

### Definition 2.13.5

Eine Prävarietät  $X$  heißt **separiert**, wenn  $\Delta \subset X \times X$  abgeschlossen ist.

### Beispiele 2.13.6

Sei  $V$  wie im letzten Beispiel. Dann ist  $\Delta \subset V \times V$  nicht abgeschlossen:

In  $V \times V$  gibt es über  $(0, 0)$  die folgenden Punkte:

$(0_1, 0_1), (0_1, 0_2), (0_2, 0_1), (0_2, 0_2)$ .

Davon liegen  $(0_1, 0_1)$  und  $(0_2, 0_2)$  in  $\Delta$ , die beiden anderen nicht. Diese liegen aber in  $\overline{\Delta}$ .

### Definition 2.13.7

- (a) Eine **Prävarietät** über  $k$  ist ein topologischer Raum  $X$ , zusammen mit einer Garbe  $\mathcal{O}_X$  von  $k$ -Algebren, der eine endliche offene Überdeckung  $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$  besitzt, so dass  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  isomorph zu einer affinen Varietät ist.

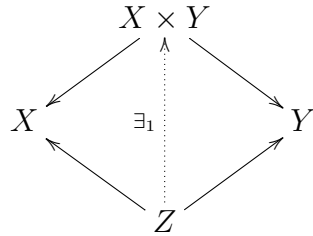


(b) Eine separierte Prävarietät heißt **Varietät**.

**Definition 2.13.8**

Für eine Prävarietät  $X$  mit affiner Überdeckung  $(U_i)_{i=1, \dots, n}$  sei  $X \times X$  die Prävarietät, die durch Verkleben der  $U_i \times U_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  hervorgeht.

Dabei ist  $U_i \times U_j$  die affine Varietät, die durch  $\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_k \mathcal{O}_X(U_j)$  bestimmt ist. Produkt ist folgendes:



# 3 Lokale Eigenschaften

## §14 Lokale Ringe zu Punkten

### Erinnerung / Definition + Bemerkung 3.14.1

Sei  $V$  eine Varietät (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ ) und  $x \in V$ .

(a)

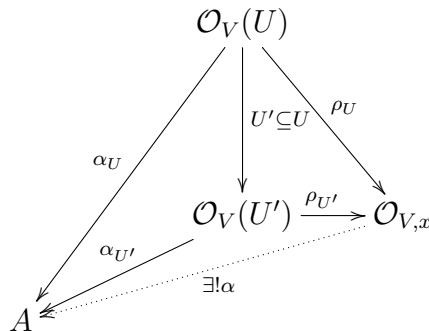
$$\mathcal{O}_{V,x} := \{[(U, f)] : U \subseteq V \text{ offen, } x \in U, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$$

heißt **lokaler Ring** von  $V$  in  $x$ , dabei sei  $(U, f) \sim (U', f') \Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$

(b)  $\mathcal{O}_{V,x}$  ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$m_x = \{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{V,x} : f(x) = 0\}.$$

(c)  $\mathcal{O}_{V,x} = \varinjlim_{U \subseteq V \text{ offen, } x \in U} \mathcal{O}_V(U)$



### Bemerkung 3.14.2

Seien  $V, x \in V$  wie in 3.14.1, sei weiter  $V_0 \subseteq V$  offen und affin mit  $x \in V_0$ . Dann gilt:

- (a)  $\mathcal{O}_{V,x} \cong k[V_0]_{m_x^{V_0}}$ , wobei  $k[V_0]$  der affine Koordinatenring von  $V_0$  sei und  $m_x^{V_0}$  das zu  $x$  gehörige maximale Ideal in  $k[V_0]$ , das heißt  $m_x^{V_0} = \{f \in k[V_0] : f(x) = 0\}$ .
- (b) Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $\mathcal{O}_{V,x} \cong \{f = \frac{g}{h} \in k(V) : g, h \in k[V_0], h(x) \neq 0\}$ .

**Beweis** Übung. □

### Proposition 3.14.3

Seien  $V, W$  Varietäten,  $x \in V, y \in W$ . Ist  $\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{W,y}$  (als  $k$ -Algebra), so gibt es (affine) offene Umgebungen  $U_1 \subseteq V$  von  $x$  und  $U_2 \subseteq W$  von  $y$  mit  $U_1 \cong U_2$ .

**Beweis** Übungsblatt 7 Aufgabe 1. □

### Bemerkung 3.14.4

Sei  $\varphi : V \rightarrow W$  ein Morphismus von Varietäten. Für jedes  $x \in V$  induziert  $\varphi$  einen  $k$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi_x^\# : \mathcal{O}_{W, \varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{V, x} \quad \text{mit} \quad \varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}) \subseteq m_x.$$

**Beweis**  $\square$   $V, W$  affin (geeignet einschränken!).

Dann induziert  $\varphi$  einen  $k$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi^\# : \begin{array}{ccc} k[W] & \longrightarrow & k[V] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Dabei gilt für  $f \in k[W]$ :

$$(*) \quad f \in m_{\varphi(x)}^W \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_x^\#(f) \in m_x^V$$

$\Rightarrow \varphi^\#$  induziert einen Homomorphismus

$$\varphi_x^\# : \underbrace{k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}}_{\cong \mathcal{O}_{W, \varphi(x)}} \longrightarrow \underbrace{k[V]_{m_x^V}}_{\cong \mathcal{O}_{V, x}}.$$

Aus (\*) folgt weiter:

$$\varphi_x^\#(\underbrace{m_{\varphi(x)}^W \cdot k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}}_{=m_{\varphi(x)}}) \subseteq m_x^V k[V]_{m_x^V} = m_x \quad \square$$

## §15 Dimension einer Varietät

### Definition 3.15.1

Sei  $X$  ein topologischer Raum ( $\neq \emptyset$ ). Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{Es gibt irreduzible Teilmengen } \emptyset \neq V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_n \subseteq X\}$$

die **(Krull-)Dimension** von  $X$ .

### Erinnerung / Definition 3.15.2

Sei  $R$  ein Ring (kommutativ mit Eins).

(a) Für ein Primideal  $\wp \subseteq R$  heißt

$$\text{ht}(\wp) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{Es gibt Primideale } \wp_0 \subsetneq \dots \subsetneq \wp_n = \wp\}$$

die **Höhe** von  $\wp$ .

(b)  $\dim R := \sup\{\text{ht}(\wp) : \wp \subset R \text{ Primideal}\}$  heißt **(Krull-)Dimension** von  $R$ .

### Bemerkung 3.15.3

Sei  $V$  eine affine Varietät. Dann ist  $\dim(V) = \dim(k[V])$ .

**Beweis** Nach Proposition 1.3.2 ist eine abgeschlossene Teilmenge  $Z$  von  $V$  genau dann irreduzibel, wenn ihr Verschwindungsideal  $I(Z)$  ein Primideal ist. Nach Satz 2 ist das eine Bijektion.  $\square$

**Proposition 3.15.4**

- (a)  $\dim(k[X_1, \dots, X_n]) = n$
- (b) Ist  $A$  eine nullteilerfreie  $k$ -Algebra, so haben alle maximalen Primidealketten die gleiche Länge.

**Beweis** Algebra 2. □

**Bemerkung + Definition 3.15.5**

Sei  $V$  eine Varietät,  $x \in V$ ,  $V_0 \subseteq V$  eine offene und affine Umgebung von  $x$ .

- (a)  $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(m_x^{V_0}) (= \text{ht}(m_x^{V_0} \cdot k[V_0]_{m_x^{V_0}}))$
- (b) Ist  $V$  irreduzibel, so ist

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim \mathcal{O}_{V,y} = \dim V \text{ für alle } x, y \in V.$$

- (c)  $\dim_x V := \dim \mathcal{O}_{V,x}$  heißt **lokale Dimension** von  $V$  in  $x$ .
- (d)  $\dim_x V = \max\{\dim Z : Z \text{ irreduzible Komponente von } V, x \in Z\}$

**Beweis** b) Ist  $V$  affin (also  $V = V_0$ ), so folgt die Aussage aus a) und Proposition 3.15.4(b). Im allgemeinen Falle überdecke  $V$  durch affine Varietäten  $V_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Da  $V$  irreduzibel ist, ist  $V_i \cap V_j \neq \emptyset \forall i, j$ .

$\Rightarrow \dim \mathcal{O}_{V,x}$  ist unabhängig von  $x$ , also gleich  $\dim V_i$  für jedes  $i = 1, \dots, n$ .

noch zu zeigen:  $\dim V_i = \dim V$ .

Sei  $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_d = V$  eine maximale Kette von irreduziblen Teilmengen. Dabei ist  $Z_0 = \{z_0\}$  einpunktig. Es folgt  $d = \dim \mathcal{O}_{V,z_0}$ .

d)  $\square$  sei  $V$  affin. Die irreduziblen Komponenten  $Z_1, \dots, Z_n$  von  $V$  entsprechen den minimalen Primidealen in  $k[V]$ . Es gilt  $x \in Z_i \Leftrightarrow m_x^V \supseteq I(Z_i) =: \mu_i$ . Weiter ist  $k[Z_i] = k[V]/\mu_i$ . Es folgt:  
 $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(m_x^V) = \max_{i=1; \mu_i \subseteq m_x^V}^n \{\text{maximale Länge einer Primidealkette } \mu_i \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq m_x^V\} = \max_{i=1; \mu_i \subseteq m_x^V}^n \underbrace{\{\dim k[Z_i]\}}_{=\dim Z_i}$ . □

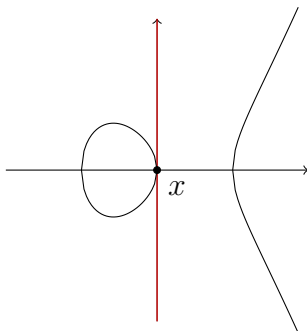
## §16 Der Tangentialraum

Zunächst einige einführende Beispiele:

**Beispiele**

- 1.)  $V = V(Y^2 - X^3 + X)$ ,  $x = (0, 0)$ .

Die Tangente in  $x$  an  $V$  ist die  $y$ -Achse, also  $V(X)$ . Der Tangentialraum in  $x = (1, 0)$  ist derselbe, d.h. der Tangentialraum ist nicht als affiner Raum, sondern als Vektorraum zu verstehen.



- 2.)  $V = V(Y^2 - X^3 + X^2)$  (Newton-Knoten),  $x = (0, 0)$ .  
 Hier kann man an den Nullpunkt 2 Tangenten anlegen ( $y = x$  und  $y = -x$ ). Der Tangentialraum, wie wir ihn definieren werden, ist der davon aufgespannte  $\mathbb{A}^2(k)$ .
- 3.)  $V = V(Y^2 - X^3)$ ,  $x = (0, 0)$ .  
 Ist jeder beliebige eindimensionale Unterraum im Tangentialraum enthalten?
- 4.)  $V = V(X^2 + Y^2 - Z^2)$  (doppelter Kegel),  $x = (0, 0, 0)$ ,  $y = (1, 0, 1)$ .

### Definition + Bemerkung 3.16.1

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät,  $x \in V$ ,  $I = I(V)$ .

- (a) Für  $f \in I$  sei  $f^{(1)} := f_x^{(1)} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) \cdot X_i$ . Weiter sei  $I_x$  das von den  $f^{(1)}$ ,  $f \in I$ , erzeugte Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  und  $T_x := T_{V,x} := V(I_x)$ .  $T_{V,x}$  heißt **Tangentialraum** an  $V$  in  $x$ .
- (b)  $T_x$  ist ein linearer Unterraum von  $\mathbb{A}^n(k)$ .
- (c) Sind  $f_1, \dots, f_r$  Erzeuger von  $I$ , so wird  $I_x$  erzeugt von  $f_1^{(1)}, \dots, f_r^{(1)}$ .

Beispiele von oben:

- 1.)  $I_x = (X)$ ,  $T_x = V(X)$   
 2.)  $I_x = (0)$ ,  $T_x = \mathbb{A}^2(k)$   
 3.)  $I_x = (0)$ ,  $T_x = \mathbb{A}^2(k)$   
 4.)  $I_x = (0)$ ,  $T_x = \mathbb{A}^3(k)$ ;  
 $I_y = (2X - 2Z) = (X - Z)$ ,  $T_y = V(X - Z)$

### Bemerkung 3.16.2

Jeder Morphismus  $\varphi : V \rightarrow W$  von affinen Varietäten induziert für jedes  $x \in V$  eine  $k$ -lineare Abbildung  $d_x\varphi : T_{V,x} \rightarrow T_{W,\varphi(x)}$ .

**Beweis**  $\text{OE } x = 0, \varphi(x) = 0$ .

Schreibe  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ . Brauche  $k$ -Algebrenhomomorphismus:

$$(d_x\varphi)^\sharp : k[Y_1, \dots, Y_m]/I_{\varphi(x)} \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_x$$

Für  $j = 1, \dots, m$  ist  $\varphi^\sharp(Y_j) = Y_j \circ \varphi = \varphi_j \Rightarrow (\varphi^\sharp(Y_j))^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(0) \cdot X_i =: (d_x\varphi)^\sharp(Y_j)$ .

Sei  $f \in I_\varphi$ ,  $\text{OE } f = g^{(1)}$  für ein  $g \in I(V)$ .

Schreibe  $g^{(1)} = \sum_{j=1}^m a_j Y_j$ ,  $a_j \in k = (d_x\varphi)^\sharp(f) = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i}(0) \cdot X_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i}(0)) \cdot X_i = (g \circ \varphi)^{(1)}$

da  $\frac{\partial (g \circ \varphi)}{\partial X_i}(0) = \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial g}{\partial Y_j}(\varphi(0))}_{=a_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(0)$  □

### Proposition + Definition 3.16.3

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät,  $x \in V$ . Dann ist  $T_x$  in natürlicher Weise isomorph zu dem Dualraum  $(m_x/m_x^2)^\vee$  von  $m_x/m_x^2$ . Der  $k$ -Vektorraum  $(m_x/m_x^2)^\vee$  heißt **Zariski-Tangentialraum** an  $V$  in  $x$ .

$m_x/m_x^2$  ist ein  $k$ -Vektorraum: Zunächst ist  $m_x/m_x^2$  ein  $R$ -Modul für  $R = \mathcal{O}_{V,x}$ . Weiter ist  $R/m_x = k$ .

Da  $m_x \cdot (m_x/m_x^2) = 0$  ist, hat  $m_x/m_x^2$  eine Struktur als  $R/m_x$ -Modul.

**Definition + Bemerkung 3.16.4**

Sei  $V$  eine Varietät,  $x \in V$ .

(a)  $x$  heißt **nichtsingulärer Punkt** (oder **regulärer Punkt**), wenn

$$\dim T_{V,x} = \dim_x V.$$

(b) (Jacobi-Kriterium) Sei  $U \subseteq V$  eine offene, affine Umgebung von  $x$ ,  $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$  Erzeuger des Verschwindungsideals  $I(U)$ . Dann gilt:

$$x \text{ nichtsingulär} \Leftrightarrow \text{Rang} \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}} = n - \dim_x V$$

(c) Ist  $x$  singulär, so ist  $\dim T_{V,x} > \dim_x V$ .

**Beweis** b) Sei  $x \in V$ ,  $V = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ .

$$\mathcal{J}_f(x) := \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}}$$

$T_{V,x}$  ist die Lösungsmenge des LGS  $\mathcal{J}_f(x) \cdot X = 0$ , denn  $f_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \cdot X_j$ .

c) Sei  $\mathcal{J}_f := \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$ .

$\Rightarrow \text{Rang}(\mathcal{J}_f(x)) = \max\{d : \exists (d \times d)\text{-Minor } M \text{ von } \mathcal{J}_f \text{ mit } \det M(x) \neq 0\}$

$\Rightarrow$  Es gibt eine offene Teilmenge  $U$  von  $V$ , auf der  $\text{Rang}(\mathcal{J}_f(x))$  maximal ist. □

**Beispiele 3.16.5**

(a)  $V = (Y^2 - X^3 - X^2) =: V(f)$

$$\mathcal{J}_f = \left( \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \right) = (-3X^2 - 2X, 2Y)$$

$$\text{Rang}(\mathcal{J}_f(x)) = \begin{cases} 0 & , -3X^2 - 2X = 0 \text{ und } Y = 0 \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$$

(b)  $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  mit einem Polynom  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ .

$$x \in \mathbb{A}^n(k) \text{ singulärer Punkt von } V \Leftrightarrow 0 = f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x)$$

**Proposition 3.16.6**

$$\mathcal{T}_{V,x} \cong (m_x/m_x^2)^* \quad \mathcal{O}_{V,x}/m_x \cong k$$

(in natürlicher Weise)

**Beweis** Sei  $I = I(V)$  das Verschwindungsideal von  $V$  in  $k[X_1, \dots, X_n]$ .  $\mathfrak{O}_x = (0, \dots, 0)$

Dann ist  $\mathcal{M} := m_x^{\mathbb{A}^n} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow m_x^V = \mathcal{M}_x/I \cap \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x/I, \text{ da } I \subseteq \mathcal{M}_x$$

Beh. 1:  $m_x/m_x^2 \cong m_x^V/(m_x^V)^2$

Denn:  $\mathcal{O}_{x,V} \cong k[v]_{m_x^V}$

$$m_x = m_x^V k[V]_{m_x^V}$$

$a \mapsto \frac{a}{1}$  ist ein Homomorphismus  $\rho : m_x^V \rightarrow m_x \rightarrow m_x/m_x^2$  mit Kern  $(m_x^V)^2$

$\rho$  ist surjektiv: Sei  $p = q \cdot \frac{a}{b} \in m_x$  mit  $q \in m_x^V$ ,  $a, b \in k[V]$ ,  $b \notin m_x^V$

Ansatz: Wähle  $\tilde{a}(= q \cdot \tilde{b}) \in m_x^V \Rightarrow p - \frac{\tilde{a}}{1} = q \cdot \frac{a}{b} - \frac{q \cdot \tilde{b}}{1} = q \frac{a - \tilde{b}b}{b}$   
 Hätte gerne:  $a - b\tilde{b} \in m_x^V$

????????????????????

Beh. 2:  $m_x/(m_x^V)^2 \cong \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 + I = \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 + I_x$

denn:  $m_x/(m_x^V)^2 \cong \mathcal{M}_x/I/(\mathcal{M}_x/I)^2$

$\cong (\mathcal{M}_x/I)/(\mathcal{M}_x^2/I \cap \mathcal{M}_x^2)$

$\cong (\mathcal{M}_x/I)/(\mathcal{M}_x^2 + I/I)$

$\cong \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 + I$

Definiere  $k$ -lineare Abbildung:  $\alpha : (m_x/m_x^2)^* \rightarrow \mathcal{T}_x$  durch  $l \mapsto (l(\overline{X}_1), \dots, l(\overline{X}_n)) \in k^n$

Zu zeigen:  $\alpha$  ist wohldefiniert, d.h.  $\alpha(l) \in \mathcal{T}_x$

Sei also  $f \in I_x$ . Zu zeigen:  $f(\alpha(l)) = 0$

$f = g_x^{(1)}$  für ein  $g \in I$

$\Rightarrow f(L(l)) = \sum \frac{\partial g}{\partial \overline{X}_i}(x) l(\overline{X}_i)$

$= l(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial \overline{X}_i}(x) X_i)$

$= l(g_x^{(1)}) = 0$  weil  $g_x^{(1)} \in I_x \subseteq \mathcal{M}_x^2 + I_x$

Umkehrabbildung:

$$\beta : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_x & \longrightarrow & (m_x/m_x^2)^* \\ (l_1, \dots, l_n) & \longmapsto & (\overline{X}_i \mapsto l_i) \end{array}$$

Wohldefiniertheit von  $\beta$ : Ist  $\sum \lambda_i X_i \in I_x$ , so ist  $\sum \lambda_i l_i = 0$ , da jedes Polynom in  $I_x$  auf dem Tangentialraum verschwindet,  $l_i \in \mathcal{T}_x$  □

**Definition 3.16.7**

- (a) Ein lokaler Ring heißt **regulär**, wenn  $\dim R = \dim_{R/m}(m/m^2)$  ist.
- (b) Sei  $V$  eine Varietät. Ein Punkt  $x \in V$  ist genau dann nichtsingulär, wenn  $\mathcal{O}_{V,x}$  ein regulärer, lokaler Ring ist.

**Definition + Bemerkung 3.16.8**

Sei  $V = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät.

- (a) Für  $i = 1, \dots, r$  sei

$$f_i^1 := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \cdot Y_j \in k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$$

Dann heißt

$$\mathcal{T}_V = V(f_1, \dots, f_r, f_1^1, \dots, f_r^1) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{2n}$$

**Tangentialbündel** über  $V$ .

- (b) Sei  $p : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  die Projektion auf die ersten  $n$  Komponenten. Dann ist  $p(\mathcal{T}_V) = V$ .
- (c) Für jedes  $x \in V$  ist  $p^{-1}(x) \cong T_{V,x}$ .
- (d) Ist  $V$  eine beliebige Varietät und  $V_1, \dots, V_m$  eine affine Überdeckung von  $V$ , so verkleben sich die Tangentialbündel  $\mathcal{T}_{V_1}, \dots, \mathcal{T}_{V_m}$  zu einer Varietät  $\mathcal{T}_V$ , dem **Tangentialbündel** über  $V$ .

**Beispiele 3.16.9**

$$V = V(\underbrace{Y^2 - X^3 - X^2}_{=:f}) \quad \mathcal{T} = V(Y^2 - X^3 - X^2, -(2X + 3X^2)W + 2YZ) \subseteq \mathbb{A}^4$$

Beh:  $\mathcal{T}_V$  hat 2 irreduzible Komponenten  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$ .

Äquivalent dazu:  $I := I(Y^2 - X^3 - X^2, -(2X + 3X^2)W + 2YZ)$  ist kein Primideal.

$$\underbrace{X^2}_{\notin I} \underbrace{(W^2(2 + 3X)^2 - 4Z^2(X + 1))}_{\notin I} = \underbrace{(WX(2 + 3X) - 2YZ)}_{\in I} \underbrace{(WX(2 + 3X) + 2YZ)}_{\in I} - \underbrace{4Z^2 X^2(X + 1) + 4Z^2 Y^2}_{=4Z^2 \underbrace{(Y^2 - X^2(X + 1))}_{\in I}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_1 = V(Y^2 - X^3 - X^2, W^2(2 - 3X)^2 - 4Z^2(X + 1)) \subset \mathcal{T}_V$$

$$\mathcal{T}_2 = V(Y^2 - X^3 - X^2, X) \subset \mathcal{T}_V = V(X, Y) = \mathbb{A}^2 \text{ über dem Nullpunkt.}$$

$$\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = V(X, Y, W^2 - Z^2)$$

## §17 Der singuläre Ort einer Varietät

**Definition 3.17.1**

Für eine Varietät  $V$  heißt

$$\text{Sing}(V) := \{x \in V : x \text{ ist singulärer Punkt}\}$$

der *singuläre Ort* von  $V$ .

**Satz 6**

Sei  $V$  eine Varietät über  $k$ . Dann ist  $\text{Sing}(V)$  echte Untervarietät von  $V$ .

**Beweis**  $\square$  sei  $V$  affin in  $\mathbb{A}^n(k)$ ,  $V$  irreduzibel. Sei  $d = \dim V$ .

Sing(V) ist abgeschlossen: Sei  $V = V(f_1, \dots, f_r)$ ,  $\mathcal{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}}$ .

Dann ist  $\text{Sing}(V) = \{x \in V : \text{Rg}(\mathcal{J}(x)) < n - d = d'\} =$

$\{x \in V : \det(M(x)) = 0 \text{ für alle } (d' \times d')\text{-Minoren } M \text{ von } \mathcal{J}\} =$

$(\bigcap_{M(d' \times d')\text{-Minoren } M \text{ von } \mathcal{J}} V(\det(M))) \cap V$ .

Sing(V)  $\neq$  V:

Fall 1:  $V = V(f)$  Hyperfläche,  $f$  quadratfreies Polynom

$$\Rightarrow \text{Sing}(V) = \{x \in V : \frac{\partial f}{\partial X_j}(x) = 0, j = 1, \dots, n\}$$

Wäre  $\text{Sing}(V) = V$ , so wäre  $\frac{\partial f}{\partial X_j} \in I(V) = (f)$  für  $j = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_j} = 0$  für  $j = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{char}(k) = 0 : f \in k, \text{Wid!} \\ \text{char}(k) = p : f(X_1, \dots, X_n) = g(X_1^p, \dots, X_n^p) = g^p, \text{Wid!} \end{array} \right.$$

Fall 2  $V$  ist beliebig. Dann folgt die Behauptung aus der folgenden Proposition. □

**Proposition 3.17.2**

Jede irreduzible Varietät  $V$  der Dimension  $d$  ist birational Äquivalent zu einer Hyperfläche in  $\mathbb{A}^{d+1}(k)$

**Beweis** Ziel: Finde eine irreduzible Hyperfläche  $W \subseteq \mathbb{A}^{d+1}(k)$  mit  $k(W) \cong k(V)$ . Dann folgt die Proposition aus Korollar 7.5.

Sei  $X_1, \dots, X_d$  Transzendenzbasis von  $k(V)$  (Noether-Normalisierung von  $k(V)$ ).

Dann ist  $k(V)/k(X_1, \dots, X_d)$  endlich.



☐ Sei  $k(V)/k(X_1, \dots, X_d)$  einfach (falls  $\text{char}(k) = p$ , so gibt es eine Transzendenzbasis mit dieser Eigenschaft).

Sei  $y \in k(V)$  ein primitives Element.

Sei  $y^m + a_{m-1}y^{m-1} + \dots + a_1y + a_0$  das Minimalpolynom.

Sei  $a_i = \frac{f_i}{g_i}$  mit  $f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_d]$ .

Sei  $g = \prod g_i$ ,  $W := V(g^m y^m + g^m a_{m-1} y^{m-1} + \dots + g^m a_0)$ .

$W$  ist eine Hyperfläche in  $\mathbb{A}^{d+1}(k)$

$k[W] = k[X_1, \dots, X_d, gY]/(\dots) \Rightarrow k(W) \cong k(V)$  ☐

### Bemerkung 3.17.3

Sei  $V$  eine Varietät,  $x \in V$ . Dann gilt:

$\mathcal{O}_{V,x}$  nullteilerfrei  $\Leftrightarrow$  es gibt genau eine irreduzible Komponente  $Z$  von  $V$  mit  $x \in Z$ .

**Beweis** ☐  $V$  affin. Seien  $V_1 \neq V_2$  irreduzible Komponenten von  $V$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x &\in V_1 \cap V_2 \\ \Leftrightarrow I(V_1) + I(V_2) &\subseteq m_x^V \\ \Leftrightarrow \mu_{i,x} := I(V_i) \cdot \mathcal{O}_{V,x} &\text{ ist minimales Primideal in } \mathcal{O}_{V,x} \text{ (} i = 1, 2 \text{) mit } \mu_{1,x} \neq \mu_{2,x} \\ \Leftrightarrow (0) &\text{ nicht Primideal in } \mathcal{O}_{V,x} \\ \Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,x} &\text{ nicht nullteilerfrei} \end{aligned}$$

(das vorletzte " $\Leftarrow$ " folgt mit der Übung:  $\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal in } R} \mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$ ) ☐

### Proposition 3.17.4

Sei  $V$  eine Varietät,  $x \in V$ . Gibt es irreduzible Komponenten  $V_1 \neq V_2$  von  $V$  mit  $x \in V_1 \cap V_2$ , so ist  $x$  singulärer Punkt von  $V$ .

**Beweis** Es genügt zu zeigen:

### Proposition 3.17.5

Jeder reguläre lokale Ring  $R$  ist nullteilerfrei.

**Beweis (mit Import von (1), (3); siehe unten)** Sei  $d = \dim R$ . Induktion über  $d$ :

$d=0$ :  $m/m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$  (Nakayama)

$d=1$ :  $\dim(m/m^2) = 1 \Leftrightarrow R$  ist diskreter Bewertungsring, also insbesondere nullteilerfrei.

$d>1$ : Seien  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$  die minimalen Primideale von  $R$ .  $\mathfrak{p}_i \neq m$ , da  $\dim R \geq 1$ , außerdem  $m \neq m^2$ .

$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \exists a \in m$  mit  $a \notin \mathfrak{p}_i, i = 1, \dots, r$

### Behauptung

$a$  ist ein Primelement in  $R$ .

Dann gibt es ein  $i$  mit  $\mathfrak{p}_i \subseteq (a)$

Für jedes  $b \in \mathfrak{p}_i$  gibt es also  $q \in R$  mit  $b = q \cdot a$

$\Rightarrow q \in \mathfrak{p}_i$ , da  $\mathfrak{p}_i$  Primideal,  $a \notin \mathfrak{p}_i$

$\Rightarrow \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot (a) \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot m$

$\stackrel{(Nakayama)}{\Rightarrow} \mathfrak{p}_i = 0$  ☐

**Beweis (der Behauptung)** Zeige:  $S := R/(a)$  ist regulärer lokaler Ring der Dimension  $d - 1$ .

Es ist  $m_S = m/(a)$  und  $m_S/m_S^2 = m/(a)/m^2/m^2 \cap (a) \cong m/(a)/m^2 + (a)/(a) \cong m/m^2 + (a)$

Da  $a \notin m^2$ , ist  $m_S/m_S^2 \subsetneq m/m^2 \Rightarrow \dim(m_S/m_S^2) \leq d - 1$ .

Noch zu zeigen:  $\dim S = d - 1$

Sei  $\mathfrak{p}$  minimales Primideal in  $R$ , das in einer Kette der Länge  $d$  vorkommt und  $R' := R/\mathfrak{p}$ . Dann ist  $\dim R' = \dim R = d$  und  $R'$  nullteilerfrei. Da  $a \notin \mathfrak{p}$ , ist  $\bar{a} \neq 0$  in  $R' \Rightarrow \text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$  für jedes minimale (Primideal  $\mathfrak{q}$  in  $R'$  mit  $\bar{a} \in \mathfrak{q}$ )

$\Rightarrow \dim S = \dim R' / (\bar{a}) = \dim R' / \mathfrak{q} = d - 1$  □

### Import:

- (1) Jeder noethersche Ring hat nur endlich viele minimale Primideale.
- (2) Vermeiden von Primidealen: Sei  $R$  ein Ring,  $\mathfrak{p}_0 \subseteq R$  ein Ideal,  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$  Primideale. Ist  $I \subseteq R$  Ideal mit  $I \not\subseteq \mathfrak{p}_i, i = 0, \dots, r$ , so ist  $I \not\subseteq \bigcap_{i=0}^r \mathfrak{p}_i$
- (3) Krullscher Hauptidealsatz: Sei  $R$  nullteilerfrei, noethersch,  $x \in R, x \neq 0, x \notin R^\times$ .  
Dann hat jedes Primideal, das  $x$  enthält und minimal mit dieser Eigenschaft ist, Höhe 1.

# 4 Nichtsinguläre Kurven

## §18 Funktionenkörper in einer Variablen

### Satz 7

Ist  $K/k$  Funktionenkörper in einer Variablen über  $k$  (das heißt endlich erzeugt,  $\text{trdeg}_k(K) = 1$ ), so gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte nichtsinguläre Kurve  $C$  mit  $k(C) \cong K$ .

**Beweis** Sei  $C_K = \{R \subset K : R \text{ ist diskreter Bewertungsring, } k \subset R\}$

Ist  $C$  nichtsinguläre Kurve, so ist für jedes  $x \in C$  der lokale Ring  $\mathcal{O}_{C,x}$  ein diskreter Bewertungsring in  $k(C)$  mit  $k \subset \mathcal{O}_{C,x}$

Die Eindeutigkeit wird aus Prop. 18.4 und Prop. 18.5 folgen. □

### Bemerkung 4.18.1

Für  $f \in K$  ist  $P_f := \{R \in C_K : f \notin R\}$  endlich (Polstellenmenge von  $f$ ).

**Beweis**  $\exists f \in K \setminus k$  (sonst ist  $P_f = \emptyset$ ).

Dann ist  $g := \frac{1}{f}$  transzendent über  $k$ , also  $K/k(g)$  endlich.

dann sei  $B$  der ganze Abschluss von  $k[g]$  in  $K$ .  $B$  ist dann ein Dedekindring (Alg I, Satz ...) und somit endlich erzeugt, reduzierte  $k$ -Algebra.

$\Rightarrow$  es gibt eine affine Varietät  $V$  mit  $k[V] \cong B$ .

Für jedes  $x \in V$  ist  $\mathcal{O}_{V,x}$  ein diskreter Bewertungsring  $\Rightarrow V$  ist nicht singulär.

Sei  $R \in P_f$ , also  $f \notin R$ . Dann ist  $g \in R \stackrel{g \notin R}{\Rightarrow} g \in m_R \Rightarrow k[g] \subseteq R \Rightarrow B \subseteq R$ . ( $R$  ist normal).

$m := m_R \cap B$  ist maximales Ideal in  $B \Rightarrow B_m$  ist diskreter Bewertungsring,  $B_m \subseteq R$

Beh.: Dann ist  $B_m = R$ .

Denn: Andernfalls sei  $a \in R \setminus B_m$ .

Schreibe  $a = u \cdot f^{-n}$  mit  $u \in B_m^\times$ ,  $n > 0$ ,  $(f) = m$

Dann wäre  $\frac{1}{a} = u^{-1} \cdot f^n \in m \Rightarrow a \in R^\times$

$f^n \in R^\times$ , Widerspruch zu  $f^n \in m_R$ .

$\Rightarrow \exists x \in V$  mit  $R = \mathcal{O}_{V,x}$ ,  $g \in m_R$ .

ist  $g(x) = 0 \Rightarrow x \in V(g) \subset V$ .

da  $g \neq 0$ , ist  $V(g) \neq V$ , also endlich. □

### Bemerkung 4.18.2

Sei  $C$  eine irreduzible, nichtsinguläre Kurve über  $k$ ,  $K = k(C)$ . Dann gilt:

- (a)  $\mathcal{O}_{C,x} \in C_K$  für jedes  $x \in C$
- (b)  $\varphi : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C_K \\ x & \longmapsto & \mathcal{O}_{C,x} \end{array}$  ist injektiv.
- (c)  $C_K \setminus \varphi(C)$  ist endlich.

**Beweis** c)  $\text{OE}$  Sei  $C$  affin, dann ist  $K = \text{Quot}(k[C])$

Für  $R \in C_k$  gilt:  $R \in \varphi(C) \Leftrightarrow k[C] \subset R$  (denn das ist äquivalent zu  $R = k[C]_m$  für ein maximales Ideal  $m \subset k[C]$ ).

Seien  $x_1, \dots, x_r$  Erzeuger von  $k[C]$  als  $k$ -Algebra, dann ist

$$\varphi(C) = \{R \in C_K : x_i \in R \text{ für } i = 1, \dots, r\} = \bigcap_{i=1}^r \{R \in C_K : x_i \in R\}$$

Nach 18.1. ist  $C_k \setminus U_i (= P_{x_i})$  endlich  $\Rightarrow C_K \setminus \varphi(C)$  ist endlich.  $\square$

**Bemerkung 4.18.3**

$C_K$  ist Varietät durch

(a)  $U \subseteq C_K$  offen  $\Leftrightarrow C_K \setminus U$  endlich (oder  $U = \emptyset$ )

(b) Für  $U$  sei  $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_{C_K}(U) = \bigcap_{R \in U} R$

**Beweis** Sei  $C$  affine, nichtsinguläre Kurve mit  $k(C) \cong K$ . Dann ist nach 18.2  $\varphi(C)$  offen und dicht in  $C_K$  und  $\varphi : C \rightarrow \varphi(C)$  ist Isomorphismus, denn  $\mathcal{O}_{C_K, R_0} = R_0$  für jedes  $R_0 \in C_K$ .

Für  $U \subset C_K$  offen mit  $R_0 \in U$  ist  $\mathcal{O}(U) \hookrightarrow R_0$

$\Rightarrow \mathcal{O}_{C_K, R} = \lim_{R_0 \in U} \mathcal{O}(U) \hookrightarrow R_0$ .

Für  $f \in R_0$  sei  $U_f = C_K \setminus P_f \Rightarrow f \in \mathcal{O}(U_f)$

Für  $U \subset C$  offen ist  $\mathcal{O}_C(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C, x}$

Wir sind sicher:  $\varphi : C \rightarrow \varphi(C)$  ist ein Homöomorphismus.

Wir brauchen noch: Für jedes offene  $U \subset C$  einen Isomorphismus von  $k$ -Algebren (verträglich mit " $\subseteq$ "):

$$\begin{array}{ccc} \alpha_U : & \mathcal{O}_{C_K}(\varphi(U)) & \longrightarrow \mathcal{O}_C(U) \\ & \parallel & \parallel \\ & \bigcap_{R \in \varphi(U)} R & \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C, x} \\ & \parallel & \parallel \\ & \bigcap_{R \in \varphi(U)} \mathcal{O}_{C_K, R} & = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C_K, \varphi(x)} \end{array} \quad \square$$

Beh.: Für jedes  $R \in L_K$  gibt es eine affine Kurve  $C_R$  mit  $R \in \varphi(C_R)$ , also mit  $k[C_R] \subset R$ .

Denn: Sei  $g \in R \setminus k$ ,  $B$  der ganze Abschluss von  $k[g]$  in  $K$ . Dann ist  $B \subset R$  und  $B = k[C_R]$  für eine nichtsinguläre, affine Kurve  $C_R$  (siehe 18.1).

**Proposition 4.18.4**

$C_K$  ist projektiv.

**Beweis** Sei  $C_K = \bigcup_{i=1}^r V_i$  mit affinen nichtsingulären Kurven  $V_i$  wie in ???. Seien weiter  $V_i \subseteq \mathbb{A}^{n_i}(k)$  und  $C_i$  der Zariski-Abschluss von  $V_i$  in  $\mathbb{P}^{n_i}(k)$ .  $C_i$  ist projektive Kurve (eventuell singular). Nach Proposition 4.18.6 lässt sich die Einbettung  $V_i \hookrightarrow C_i$  zu einem Morphismus  $\varphi_i : C_K \rightarrow C_i$ .

Sei  $\varphi : C_K \rightarrow \prod_{i=1}^r C_i$  ist projektiv,  $C := \overline{\varphi(C_K)}$  auch.

$\varphi : C_K \rightarrow C$  ist dominant  $\Rightarrow k(C) \subseteq K \Rightarrow k(C) \cong K$ .

**Behauptung**

$\varphi$  ist surjektiv.

**Beweis** Sei  $x \in C$ ,  $R$  der ganze Abschluss von  $\mathcal{O}_{C,x}$  in  $K$ .  $R$  ist normal, also diskreter Bewertungsring

$$\Rightarrow R \in C_K \Rightarrow \mathcal{O}_{C,x} \subseteq R \cong \mathcal{O}_{C,\varphi(R)} \Rightarrow x = \varphi(R)$$

**Beweis (obiges “ $\cong$ ”)** für  $i$  mit  $R \in V_i$  ist  $R \cong \mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)}$ . Die Projektion  $pr_i : C \rightarrow C_i$  ist dominant

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)} \rightarrow \mathcal{O}_{C,\varphi(R)} \text{ ist injektiv,}$$

also ein Isomorphismus, da  $\mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)}$  ein diskreter Bewertungsring ist. (benutze: Ist  $R$  diskreter Bewertungsring,  $K = \text{Quot}(R)$ ,  $S \subset K$  lokaler Ring mit  $R \subseteq S$  und  $m_S \cap R = m_R$ , so ist  $R = S$ ) □

Noch zu zeigen:

**Bemerkung 4.18.5**

Sei  $\varphi : V \rightarrow W$  ein bijektiver Morphismus. Ist für jedes  $x \in V$  der induzierte Homomorphismus  $\mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{V,x}$  ein Isomorphismus, so ist  $\varphi$  ein Isomorphismus.

**Beweis**  $\mathbb{C} V, W$  affin, sei  $A := k[W], B := k[V]$

Die Voraussetzung ist äquivalent zu:

$\alpha : A \rightarrow B$  ist ein  $k$ -Algebrenhomomorphismus, sodass  $\alpha_m : A_m \rightarrow B_{m'}$  für jedes maximale Ideal  $m$  von  $A$  ein Isomorphismus ist (wobei  $m'$  das, wegen der Bijektivität von  $\varphi$ , eindeutig bestimmte maximale Ideal von  $B$  mit  $\alpha^{-1}(m') = m$ ).

Zu zeigen:  $\alpha$  ist bijektiv

$\alpha$  ist injektiv, da  $\varphi$  surjektiv ist.

$\alpha$  ist surjektiv: Sei  $x \in B$ ,  $I_x := \{y \in A : y \cdot x \in A\}$

$I_x$  ist Ideal in  $A$ .

Ist  $I_x = A$ , so ist  $1 \in I_x$ , also  $x \in A$ .

Ist  $I_x \neq A$ , so sei  $m$  maximales Ideal in  $A$  mit  $I_x \subseteq m$

$$\stackrel{V_{gr.}}{\Rightarrow} \exists a \in A, b \in A - m \text{ mit } \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \text{ in } A_m = B_{m'}$$

$$\Rightarrow \exists t \in A - m \text{ mit } t \cdot (b \cdot x - a) = 0$$

$$\Rightarrow t \cdot bx = ta \in A$$

$$\Rightarrow tb \in I_x \subseteq m \text{ Widerspruch! ,da } t \notin, b \notin m$$

□

### Proposition 4.18.6

Sei  $C$  nichtsinguläre irreduzible Kurve,  $V$  projektive Varietät,  $\emptyset \neq U \subseteq C$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus  $\bar{\varphi} : C \rightarrow V$  mit  $\bar{\varphi}|_U = \varphi$

**Beweis**  $C - U$  ist endlich, also  $\mathcal{O}_C(C - U) = \{x\}$ ,  $\mathcal{O}_C V = \mathbb{P}^n(k)$  und  $\varphi(U) \not\subseteq V(X_i), i = 1, \dots, n$   
 Sei  $h_{ij} := \frac{X_i}{X_j} \circ \varphi$  für  $i \neq j$ .  $h_{ij}$  ist regulär auf  $\varphi^{-1}(D(X_i))$  ( $\neq \emptyset$ , da  $\varphi(U) \not\subseteq V(X_j)$ )  
 $\Rightarrow h_{ij} \in k(C) =: K$

Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{O}_{C,x}$  diskreter Bewertungsring in  $K$ . Sei  $v_x : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  die zugehörige Bewertung. Seien weiter  $v_i := v_x(h_{i,0}), i = 1, \dots, n$  und  $r_k := \min\{v_t, t = 1, \dots, n\}$ .  
 Für  $i \neq k$  ist dann

$$\begin{aligned} v_x(h_{ik}) &= v_x\left(\frac{X_i X_0}{X_0 X_k} \circ \varphi\right) \\ &= v_x\left(\left(\frac{X_i}{X_0} \circ \varphi\right) \cdot \left(\frac{X_0}{X_k} \circ \varphi\right)\right) \\ &= v_x(h_{i,0}) - v_x(h_{k,0}) \\ &= r_i - r_k > 0 \end{aligned}$$

$\exists$  Umgebung  $\bar{U}$  von  $x$  mit  $h_{ik} \in \mathcal{O}_C(\bar{U}), i = 1, \dots, n, i \neq k$ . Für  $y \in U$  sei

$$\tilde{\varphi}(y) := \begin{cases} (h_{0k}(y) : \dots : h_{nk}(y)) & k = 0 \text{ oder } r_k \leq 0 \\ (1 : h_{1,k}(y) \cdot h_{k,0}(y) : \dots : h_{m,k}(y) \cdot h_{k,0}(y)) & k \neq 0 \text{ und } r_k > 0 \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$  ist Morphismus  $\bar{U} \rightarrow V$

(mit Bild in  $D(X_k)$  beziehungsweise  $D(X_0)$ ). Für  $y \neq x$  ist  $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$ . □

## §19 Divisoren

### Definition 4.19.1

Sei  $C$  eine nichtsinguläre, irreduzible Kurve.

(a) Ein **Divisor** auf  $C$  ist eine endliche formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^n n_i P_i, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in C$$

$$\text{Div}(C) := \{D = \sum n_i P_i : D \text{ ist Divisor auf } C\}$$

ist eine freie abelsche Gruppe, genannt **Divisorengruppe** von  $C$ .

(b) Für  $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i$  heißt  $\text{deg}(D) := \sum_{i=1}^n n_i$  der **Grad** von  $D$ .

(c)  $D$  heißt **effektiv**, wenn alle  $n_i \geq 0$  sind.

### Definition + Bemerkung 4.19.2

Sei  $C$  wie in 19.1,  $f \in k(C)^\times$ .

(a) Für  $P \in C$  heißt  $\text{ord}_P(f) := v_P(f)$  die **Ordnung** von  $f$  in  $P$  (dabei sei  $v_P$  die zu  $P$  gehörige diskrete Bewertung von  $k(C)$ ).

(b)  $\text{div}(f) := \sum_{P \in C} \text{ord}_P(f) \cdot P$  heißt **Divisor** von  $f$ .

(c)  $D \in \text{Div}(C)$  heißt **Hauptdivisor**, wenn ein  $f \in k(C)^\times$  existiert mit  $D = \text{div}(f)$ .

- (d) Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe  $\text{Div}_H(C)$  von  $\text{Div}(C)$ .  
 (e)  $\text{Cl}(C) := \text{Div}(C)/\text{Div}_H(C)$  heißt **Divisorenklassengruppe** von  $C$ .  
 (f) Divisoren  $D, D' \in \text{Div}(C)$  heißen **linear äquivalent**, wenn  $D - D'$  Hauptdivisor ist.  
 Schreibweisen:  $D \equiv D', \quad D \sim D'$

### Beweis

b) Zu zeigen:  $\{P \in C : \text{ord}_P(f) \neq 0\}$  ist endlich.

$\{P \in C : \text{ord}_P(f) \neq 0\} = V(f) \cup V(\frac{1}{f})$  und  $f \neq 0$ .

d)  $\text{div}(f) + \text{div}(g) = \text{div}(f \cdot g); \quad -\text{div}(f) = \text{div}(\frac{1}{f}); \quad 0 = \text{div}(1)$  □

### Beispiele 4.19.3

(a)  $C = \mathbb{P}^1(k)$

Dann gilt  $D \in \text{Div}(C)$  ist Hauptdivisor  $\Leftrightarrow \text{deg}(D) = 0$

denn " $\Rightarrow$ " Sei  $f = \frac{\prod_{i=1}^n (X-a_i)}{\prod_{j=1}^m (X-b_j)} \in k(C)^\times$  mit  $a_i, b_j \in k, \quad a_i \neq b_j$  für alle  $i, j$

$\Rightarrow \text{div}(f) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j + (m-n) \cdot \infty$

$\Rightarrow \text{deg}(\text{div}(f)) = 0$

" $\Leftarrow$ " Für Null- und Polstellen, die nicht im Punkt  $\infty$  liegen, schreibe  $f$  wie oben, mit den entsprechenden Linearfaktoren für die Nullstellen im Zähler, bzw. für die Polstellen im Nenner, jeweils mit Vielfachheiten.

(b)  $C = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$  (Homogenisierung von  $y^2 = x^3 - x$ )

$C = V(y^2 - x^3 + x) \cup \{(0 : 1 : 0)\}$  Sei  $f = y = \frac{Y}{Z} \in k(C)^\times$ . Gesucht:  $\text{div}(f)$

Auf  $U_0 = D(Z)$  ist  $y$  regulär und hat 3 Nullstellen, nämlich  $P_{-1} = (-1, 0), \quad P_0 = (0, 0)$  und  $P_1 = (1, 0)$ .

$P_0$ :  $m_{P_0}$  wird erzeugt von  $x$  und  $y$ .

Es ist  $y^2 = x \underbrace{(x^2 - 1)}_{\in \mathcal{O}_{C, P_0}^\times} \Rightarrow y$  erzeugt  $m_{P_0}$  (mit  $x$  dagegen lässt sich nur  $y^2$  erzeugen).

Mit  $y = x(x-1)(x+1)$  und dem gleichen Argument zeigt man das gleiche für  $P_{-1}$  und  $P_1$

$\Rightarrow P_0, P_{-1}, P_1$  haben alle Ordnung 1.

$P_\infty = (0 : 1 : 0)$ :

$m_{P_\infty}$  wird erzeugt von  $\frac{X}{Y}$  und  $\frac{Z}{Y}$  mit der Gleichung

$$\frac{Z}{X} = \left(\frac{X}{Y}\right)^3 - \frac{X}{Y} \left(\frac{Z}{Y}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{Y}\right)^3 = \frac{Z}{Y} \left( \underbrace{1 + \frac{XZ}{Y^2}}_{\in \mathcal{O}_{C, P_\infty}^\times} \right)$$

$\Rightarrow \frac{X}{Y}$  erzeugt  $m_{P_\infty}$

$\Rightarrow \text{ord}_{P_\infty} \left(\frac{Y}{Z}\right) = -3$

Insgesamt folgt:  $\text{div}(f) = P_{-1} + P_0 + P_1 - 3P_\infty$

**Definition + Bemerkung 4.19.4**

Seien  $C, C'$  nichtsinguläre Kurven,  $f : C \rightarrow C'$  ein nichtkonstanter Morphismus.

- (a) Sei  $Q \in C'$  und  $t \in m_Q$  Erzeuger.  
Für  $P \in f^{-1}(Q)$  heißt  $e_P(f) := \text{ord}_P(t \circ f)$  **Verzweigungsordnung** von  $f$  in  $P$ .
- (b)  $e_P(f)$  hängt nicht von der Wahl von  $t$  ab.
- (c) Für  $Q \in C'$  sei

$$f^*Q := \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$

$$\text{und } f^* : \text{Div}(C') \rightarrow \text{Div}(C)$$

der induzierte Gruppenhomomorphismus.

- (d)  $f^*(\text{Div}_H(C')) \subseteq \text{Div}_H(C)$

**Beweis** d.) Sei  $D = \text{div}(g \circ f) \in \text{Div}_H C'$ .

Es gilt  $f^*D = \text{div}(g \circ f)$ , denn:

Für  $P \in C$  ist  $\text{ord}_P(g \circ f) = N$ , falls  $g \circ f = t_P^N \cdot u$  für eine Einheit  $u \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$  und einen Erzeuger  $t_P$  von  $m_P$ . Der Koeffizient von  $P$  in  $f^*D$  ist

$$\underbrace{\text{ord}_{f(P)}(g)}_{=:n} \cdot \underbrace{v_P(t_Q \circ f)}_{=:m}$$

mit  $Q := f(P)$ . Also:

$$\begin{aligned} g &= t_Q^n \cdot u_1, t_Q \circ f = t_P^m \cdot u_2 \\ \Rightarrow g \circ f &= (t_Q^n \circ f)^n \cdot (u_1 \circ f) = t^{m \cdot n} \cdot \underbrace{u_2^n(u_1 \circ f)}_{\in \mathcal{O}_{C,P}^\times} \\ \Rightarrow \text{ord}_P(g \circ f) &= n \cdot m \end{aligned} \quad \square$$

**Definition + Proposition 4.19.5**

Sei  $f : C \rightarrow C'$  ein nichtkonstanter Morphismus irreduzibler, nichtsingulärer, projektiver Kurven.

- (a)  $\text{deg}(f) := [k(C) : k(C')]$  heißt **Grad** von  $f$  (dabei wird  $k(C')$  als Teilkörper von  $k(C)$  über den von  $f$  induzierten Homomorphismus aufgefasst).
- (b) Für  $Q \in C'$  ist  $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) = \text{deg}(f)$

**Beweis** b.) Sei  $f^{-1}(Q) = \{P_1, \dots, P_r\}, t = t_Q$  ein Erzeuger von  $m_Q$

$$\Rightarrow e_{P_i}(f) = \text{ord}_{P_i}(t \circ f) = \text{ord}_{P_i}(t) = \dim_k \left( \mathcal{O}_{C,P_i} / (t) \right) (*)$$

wobei  $(t) = \left( t_{P_i}^{e_{P_i}(f)} \right)$ .

$\mathcal{O}_{C'}$  affin,  $C$  affin (die  $P_i$  müssen in  $C$  sein)

Sei  $R = k[C'], S = k[C]$ . Dann ist  $S$  der ganze Abschluss von  $R$  in  $k(C)$ . Sei  $U = R - m_Q$ , also  $R_U = \mathcal{O}_{C',Q}, S' := S_U$  ist ganz über  $R_U$ .

Behauptung:  $S'$  ist freier  $R_U$ -Modul vom Rang  $n := \text{deg}(f)$ .

“Beweis”:  $S'$  ist endlich erzeugter  $R_U$ -Modul: vergleiche Algebra II, Dedekindringe.



Mit dem Elementarteilersatz für Hauptidealringe folgt die Behauptung “frei”.  
Weiter ist

$$S' \bigoplus_{\mathcal{O}_{C',Q}} k(C') = k(C) \Rightarrow \text{Rg}(S') = [k(C) : k(C')] = n$$

Die maximalen Ideale  $m_1, \dots, m_r$  von  $S'$  entsprechen  $P_1, \dots, P_r$ , genauer:  $S'_{m_i} = \mathcal{O}_{C, P_i}$   
Es ist  $S'/t \cdot S'$   $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $R_U/(t) = k$ .  
Weiter gilt:

$$tS' = \left( \bigcup_{i=1}^r tS'_{m_i} \right) \cap S'$$

Mit dem chinesischen Restsatz folgt:

$$S'/tS' = \bigoplus_{i=1}^r S'/(tS'_{m_i} \cap S') \cong \bigoplus_{i=1}^r S'_{m_i}/tS'_{m_i} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{C, P_i}/(t)$$

und  $\dim(\mathcal{O}_{C, P_i}/(t)) = e_{P_i}(f)$  □

### Satz 8

Jeder Hauptdivisor auf einer irreduziblen, nichtsingulären Kurve hat Grad 0.

**Beweis** (Beweisidee)

$f \in k(C) \setminus k$  kann aufgefasst werden als rationale Abbildung  $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ . Nach Prop. 18.5 ist  $f$  sogar ein Morphismus  $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ . Der Satz folgt dann aus:

Beh 1: “ $\text{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$ ”

Beh 2:  $\text{deg}(f^*D) = \text{deg}(f) \cdot \text{deg}(D)$  für jeden Divisor  $D$ .

**Beweis (von Beh 1)** Seien  $(x_0 : x_1)$  homogene Koordinaten auf  $\mathbb{P}^1(k)$ . Dann ist  $\text{div}(\frac{X_1}{X_0}) = (1 : 0) - (0 : 1)$  und

$$f^*((1 : 0) - (0 : 1)) \stackrel{4.19.4d.}{=} \text{div}\left(\frac{X_1}{X_0} \circ f\right) = \text{div}(f) \quad \square$$

**Beweis (von Beh 2)** folgt aus Proposition 4.19.5 b.) □

## §20 Das Geschlecht einer Kurve

Sei  $C$  eine nichtsinguläre, projektive Kurve über  $k$ .

**Definition + Bemerkung 4.20.1**

Sei  $D = \sum n_P P$  ein Divisor auf  $C$ .

- (a)  $L(D) := \{f \in k(C) : D + \text{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$  heißt **Riemann-Roch-Raum** zu  $D$ ,  $L(D)$  ist  $k$ -Vektorraum.
- (b)  $L(0) = k$
- (c) Ist  $\text{deg}(D) < 0$ , so ist  $L(D) = 0$

(d) Für  $l(D) := \dim L(D)$  gilt:

$$l(D) = l(D'), \text{ falls } D \equiv D'$$

**Beweis** (a)  $f \in L(D) \Leftrightarrow$  für jedes  $P \in C$  ist  $\text{ord}_P(f) \geq -n_P$   
 $\text{ord}_P(f+g) \geq \min(\text{ord}_P(f), \text{ord}_P(g))$

(d) Sei  $D' = D + \text{div}(g)$ . Dann ist  $L(D') \rightarrow L(D)$ ,  $f \mapsto fg$  ein Isomorphismus von  $k$ -Vektorräumen, denn

$$\begin{aligned} D' + \text{div}(f) \geq 0 &\Leftrightarrow D + \text{div}(g) + \text{div}(f) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow D + \text{div}(fg) \geq 0 \end{aligned}$$

□

**Satz + Definition 9 (Riemann)**

(a) Für jeden Divisor  $D \in \text{Div}(C)$  mit  $\text{deg } D \geq -1$  ist  $l(D) \leq \text{deg } D + 1$ .

(b) Es gibt ein  $\gamma \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $D \in \text{Div}(C)$  gilt

$$l(D) \geq \text{deg } D + 1 - \gamma$$

(c) Das kleinste  $\gamma \in \mathbb{N}$ , für das (b) erfüllt ist, heißt **Geschlecht** von  $C$ , Schreibweise:  $g = g(C)$ .

**Bemerkung 4.20.2**

(a) Sind  $C$  und  $C'$  isomorph, so ist  $g(C) = g(C')$ .

(b)  $g(\mathbb{P}^1(k)) = 0$

**Beweis** (a) ✓

(b) Zu zeigen: für jeden Divisor  $D$  vom Grad  $\geq 0$  auf  $\mathbb{P}^1(k)$  ist  $l(D) = \text{deg } D + 1$ .

Schreibe:  $D = D' + D_0$  mit  $D' \geq 0$  und  $\text{deg}(D_0) = 0$ . Nach Beispiel 4.19.3 ist  $D_0$  Hauptdivisor.

$\Rightarrow l(D') = l(D)$ . Also  $\forall D \geq 0$ ,

$$D = \sum_{i=1}^r n_i P_i \text{ mit } n_i \geq 1.$$

$$\Rightarrow L(D) = \{f \in k(X) : \text{ord}_{P_i}(f) \geq -n_i, i = 1, \dots, r \text{ und } f \text{ regulär auf } \mathbb{P}^1(k) \setminus \{P_1, \dots, P_r\}\}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &1, \frac{1}{X - P_1}, \dots, \frac{1}{(X - P_1)^{n_1}}, \\ &\frac{1}{X - P_2}, \dots, \frac{1}{(X - P_2)^{n_2}}, \\ &\vdots \\ &\frac{1}{X - P_r}, \dots, \frac{1}{(X - P_r)^{n_r}} \end{aligned}$$

eine Basis von  $L(D)$ .

□

**Beweis (von Satz 9)** (a) Induktion über  $d = \deg(D)$

$d = 0$ : Ist  $f \in L(D)$ ,  $f \neq 0$ , so ist  $D + \text{div}(f) \geq 0$ . Da  $\deg(D + \text{div}(f)) = 0$ , folgt  $D + \text{div}(f) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D &= -\text{div}(f) = \text{div}\left(\frac{1}{f}\right) \\ \Rightarrow L(D) &= f \cdot k \Rightarrow l(D) \leq 1 \end{aligned}$$

$d \geq 1$ : Sei  $D = \sum_{P \in C} P$  und  $f_1, \dots, f_{d+2} \in L(D)$ .

Zu zeigen: die  $f_i$  sind linear abhängig. Sei dazu  $P \in C$ . Sortiere die  $f_i$  so, dass

$$\begin{aligned} \text{ord}_P(f_i) &= -n_P \text{ für } i = 1, \dots, k \text{ und} \\ \text{ord}_P(f_i) &> -n_P \text{ für } i = k + 1, \dots, d + 2 \text{ (für ein } k \geq 0) \\ \Rightarrow f_i &\in L(D - P) \text{ für } i = k + 1, \dots, d + 2 \end{aligned}$$

Ist  $k = 0$  oder  $k = 1$ , so sind  $f_2, \dots, f_{d+2} \in L(D - P)$  nach Induktionsvoraussetzung linear abhängig. Sei also  $k \geq 2$ .

$$\text{Sei } g_i := u_i(P) \cdot f_1 - u_1(P) \cdot f_i = t^{-n_P} \underbrace{(u_i(P) \cdot u_1 - u_1(P) \cdot u_i)}_{\in m_P}$$

(“=”, wegen  $f_i = t^{-n_P} \cdot u_i$  für  $u_i \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$  und einen Erzeuger  $t = t_P$  von  $m_P$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_i &\in L(D - P), i = 2, \dots, k \\ \Rightarrow g_2, \dots, g_k, f_{k+1}, \dots, f_{d+2} &\text{ sind linear abhängig} \\ \Rightarrow f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_{d+2} &\text{ sind linear abhängig} \end{aligned}$$

(b) **Behauptung 1:** Für jeden Divisor  $D \in \text{Div}(C)$  und jedes  $P \in C$  gilt

$$l(D + P) \leq l(D) + 1$$

**denn:** Sei  $f_1, \dots, f_n$  eine Basis von  $L(D + P)$ . Wie oben sei  $f_1, \dots, f_k \notin L(D)$ ,  $f_{k+1}, \dots, f_n \in L(D)$ . Definiere  $g_i, i = 2, \dots, k$  wie oben (ist  $k \leq 1$ , so ist  $l(D) \geq n - 1$ ).

$$\begin{aligned} g_2, \dots, g_k &\text{ linear unabhängig} \\ \Rightarrow g_2, \dots, g_k, f_{k+1}, \dots, f_n &\text{ linear abhängig} \\ \Rightarrow l(D) &\geq n - 1 \end{aligned}$$

Für  $D \in \text{Div}(C)$  sei  $s(D) := \deg D + 1 - l(D)$ . Dann ist zu zeigen

$$\exists \gamma \in \mathbb{N} \forall D \in \text{Div}(C) : s(D) \leq \gamma$$

Es gilt

- (i)  $s(D) = s(D')$  für  $D \equiv D'$  (4.20.1 (d))
- (ii)  $s(D') \leq s(D)$ , falls  $D' \leq D$  (Behauptung 1)

Wähle nun  $f \in k(C) - k$  fest. Sei

$$N := f^*(0) = \sum_{\substack{P \in C \\ f(P)=0}} \text{ord}_P(f) \cdot P$$

der Nullstellendivisor von  $f$ .  $\deg(N) = \deg(f) =: n$ .

**Behauptung 2:** Zu jedem Divisor  $D \in \text{Div}(C)$  gibt es einen linear äquivalenten Divisor  $D'$  mit  $D' \leq m \cdot N$  für ein  $m \geq 1$ .

**Behauptung 3:** Es gibt ein  $\gamma \in \mathbb{N}$  mit  $l(m \cdot N) \geq m \cdot n + 1 - \gamma$  für alle  $m \geq 1$ .  
Dann ist für  $D \in \text{Div}(C)$  und  $D'$  wie in Behauptung 2

$$\begin{aligned} s(D) &\stackrel{(i)}{=} s(D') \stackrel{(ii)}{\leq} s(m \cdot N) = m \cdot n + 1 - l(m \cdot N) \\ &\stackrel{\text{Beh. 3}}{\leq} m \cdot n + 1 - (m \cdot n + 1) + \gamma = \gamma \end{aligned} \quad \square$$

**Beweis (von Behauptung 2)** Sei  $D = \sum n_P \cdot P$

**Gesucht:**  $h \in k(C)$  mit

$$n_P + \text{ord}_P h \leq \begin{cases} m \cdot \text{ord}_P(f) & : \text{ord}_P(f) > 0 \\ 0 & : \text{ord}_P(f) \leq 0 \end{cases}$$

Seien  $P_1, \dots, P_r$  die Punkte in  $C$ , für die  $n_i := n_{P_i} > 0$  ist, aber  $\text{ord}_{P_i}(f) \leq 0$ .

Sei  $h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f(P_i)} \in k(C)^\times, i = 1, \dots, r$

$$\Rightarrow \text{ord}_{P_i}(h_i) \geq 1, i = 1, \dots, r$$

$\text{ord}_P(h_i) \geq 0$  für alle  $P \neq P_i$  mit  $\text{ord}_P(f) \leq 0$

$$\Rightarrow h := \prod_{i=1}^r h_i^{n_i} \text{ hat die gewünschte Eigenschaft} \quad \square$$

**Beweis (von Behauptung 3)** Sei  $g_1, \dots, g_n$  eine Basis von  $k(C)$  über  $k(f) = k(\frac{1}{f})$ .

Dabei können die  $g_i$  so gewählt werden, dass sie ganz über  $k[\frac{1}{f}]$  sind.

$\Rightarrow$  Jede Polstelle von  $g_i$  ist auch Polstelle von  $\frac{1}{f}$ , also Nullstelle von  $f$ .

$\Rightarrow \text{div}(g_i) + \gamma_0 N \geq 0$  für ein geeignet großes  $\gamma_0 \in \mathbb{N}$  ( $i = 1, \dots, n$ )  $\Rightarrow g_i \in L(\gamma_0 N)$

Sei  $m \geq 1$

Beh.:  $\frac{g_i}{f^\nu} \in L((m + \gamma_0)N), i = 1, \dots, n; \nu = 0, \dots, m$

Denn:

$$\text{div}(\frac{g_i}{f^\nu}) + (m + \gamma_0)N = \text{div}(g_i) - \nu \text{div}(f) + mN + \gamma_0 N \geq (m - \nu)N \geq 0, \text{ da } \text{div}(g_i) + \gamma_0 N \geq 0 \text{ (s.o.)}$$

Die  $\frac{g_i}{f^\nu}$  sind  $k$ -linear unabhängig.

$$\Rightarrow l((m + \gamma_0)N) \geq m(n + 1)$$

$$\stackrel{\text{Bew. 1+Ind.}}{\Rightarrow} l(mN) \geq n(m + 1) - \gamma_0 n = mn - \underbrace{n(\gamma_0 - 1)}_{:= \gamma - 1}$$

(Denn: Kommt ein Punkt hinzu, so vergrößert sich die Dimension um 0 oder 1.) □

### Folgerung 4.20.3

Sei  $C$  eine nichtsinguläre, projektive Kurve,  $g = g(C)$ . Dann gibt es ein  $d_0 \in \mathbb{Z}$ , so dass für alle  $D \in \text{Div}(C)$  mit  $\text{deg}(D) \geq d_0$  gilt:

$$l(D) = \text{deg}(D) + 1 - g$$

**Beweis** Nach Satz 8 gibt es ein  $D_0$  mit  $l(D_0) = \deg(D_0) + 1 - g$ .

Sei  $d_0 = \deg(D_0) + g$  und sei  $D \in \text{Div}(C)$  mit  $\deg(D) \geq d_0$

$\Rightarrow l(D - D_0) \geq \deg(D) - \deg(D_0) + 1 - g \geq 1$

Also gibt es ein  $f \in L(D - D_0), f \neq 0$

$\Rightarrow D' := D + \text{div}(f) \geq D_0$

$s(D) = s(D') \geq s(D_0) = g, \quad (s(D) = \deg(D) + 1 - l(D))$

mit Satz 8:  $s(D) \leq g \quad \forall D \Rightarrow s(D) = g$  □

**Proposition 4.20.4**

Sei  $C \subseteq \mathbb{P}^2(k)$  eine nichtsinguläre projektive Kurve vom Grad  $d \geq 1$  (d.h.  $C = V(F)$  für ein homogenes Polynom  $F$  vom Grad  $d$ ). Dann ist

$$g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

Also:  $d = 1, 2 \Rightarrow g = 0; d = 3 \Rightarrow g = 1; d = 4 \Rightarrow g = 3; d = 5 \Rightarrow g = 6 \dots$

Es existieren somit keine nichtsingulären Kurven vom Geschlecht 2,4,5,... in  $\mathbb{P}^2(k)$

**Beispiele 4.20.5**

$V(X_0^d + X_1^d + X_2^d)$  ist nichtsingulär ( $d \geq 1, \text{char}(k) \nmid d$ ) (“Fermat-Kurve“)

**Beweis** Beh. 1: Es gibt eine Gerade  $L \subset \mathbb{P}^2(k)$  mit  $\sharp(C \cap L) = d$ .

Denn: Ausnahme bilden nur die Tangenten. Deren Menge ist aber ein Zariski-abgeschlossener Unterraum der Menge der Geraden.

Sei  $L = V(F_1)$  wie in Beh. 1,  $L \cap C = \{P_1, \dots, P_d\}$

☞  $P_i \in D(X_0), \quad i = 1, \dots, d$

Beh.: Für  $D = \sum_{i=1}^d P_i, \quad m \geq 1$  und  $g \in L(mD)$  gibt es ein homogenes Polynom  $H \in k[X_0, X_1, X_2]$  mit  $g = \frac{H}{F_1^m}$

Denn: Sei

$$f_1 = \frac{F_1}{X_0} \in k(C)$$

Dann ist  $\text{div}(f_1^m g) = mD - mD' + \text{div}(g)$  mit einem effektiven Divisor  $D'$  mit Träger in  $V(X_0)$

$\Rightarrow f_1^m g$  ist ein Polynom in  $\frac{X_1}{X_0}$  und  $\frac{X_2}{X_0}$  vom Grad  $m$ .

Die Homogenisierung  $H$  von  $f_1^m g$  erfüllt  $g = \frac{H}{F_1^m}$

Also:

$$\begin{aligned} L(mD) &= k[X_0, X_1, X_2]_m / F \cdot k[X_0, X_1, X_2]_{m-d} \\ \Rightarrow l(mD) &= \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - \frac{1}{2}(m-d+1)(m-d+2) \\ &= \frac{1}{2}[d(m-d+2) + d(m+1)] \\ &= md - \frac{1}{2}(d^2 - 3d) \\ &= md + 1 - \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \end{aligned}$$

□

## §21 Der Satz von Riemann-Roch

Sei  $C$  eine nichtsinguläre projektive Kurve über  $k$ ,  $k$  algebraisch abgeschlossen.

### Erinnerung / Definition + Bemerkung 4.21.1

$\Omega_C := \Omega_{k(C)/k}$  sei der  $k(C)$ -Vektorraum der  $k$ -Differenziale von  $k(C)$ . Die Elemente von  $\Omega_{k(C)/k}$  heißen *rationale Differentiale* oder *meromorphe Differentiale* auf  $C$ . Es gilt:  $\dim_{k(C)} \Omega_C = 1$

### Beweis

- Ist  $C = \mathbb{P}^1(k)$ , so ist  $k(C) = k(X)$  und  $\Omega_C = k(C) \cdot dX$ .
- Im Allgemeinen ist  $k(C) = k(x, y)$  für geeignete  $x, y$ .  
 $x$  und  $y$  sind algebraisch abgänglich, das heißt es gibt  $F \in k[X, Y]$  mit  $F(x, y) = 0 \Rightarrow dF(x, y) = 0$ . Es gibt also lineare Gleichungen zwischen  $dx$  und  $dy$ .  $\square$

### Definition + Bemerkung 4.21.2

Sei  $\omega \in \Omega_C, \omega \neq 0$

- Für  $P \in C$  sei  $t_P$  ein Erzeuger von  $m_P$  und  $\omega = f dt_P$  (für ein  $f \in k(C)$ ). Dann ist  $\text{ord}_P \omega := \text{ord}_P(f)$  unabhängig von der Wahl des Erzeugers  $t_P$ .
- $\text{div}(\omega) := \sum_{P \in C} \text{ord}_P(\omega) \cdot P$  ist Divisor auf  $C$ .
- $K \in \text{Div } C$  heißt *kanonisch*, wenn es ein  $\omega \in \Omega_C$  gibt mit  $K = \text{div}(\omega)$ .
- Je zwei kanonische Divisoren sind linear äquivalent.

**Beweis** (a) Übung!

- Sei  $P \in C, t_P$  Erzeuger von  $m_P$

$$U = C - \{\tilde{P} \in C : t_P \notin \mathcal{O}_{\tilde{P}}\}$$

ist offen in  $C$ . Für  $Q \in U$  ist  $t_Q := t_P - t_P(Q) \in m_Q$  und  $d(t_Q) = d(t_P)$ . Die Teilmenge

$$U' = \{Q \in U : t_Q \notin m_a^2\}$$

ist offen (!). Für  $Q \in U'$  ist  $\text{ord}_Q(\omega) = \text{ord}_P(f)$ .  
 $\Rightarrow \text{ord}_Q(\omega) \neq 0$  für nur endlich viele  $Q \in U'$ .  $\square$

### Beispiele

$C = \mathbb{P}^1(k), \omega = dz$

In  $a \in C$  ist  $z - a$  ein Erzeuger von  $m_a$

$\Rightarrow \text{ord}_a \omega = 0$ , da  $\omega = dz = 1 \cdot d(z - a)$

In  $\infty$  ist  $\frac{1}{z}$  Erzeuger von  $m_\infty$ .

$$dz = -z^2 d\left(\frac{1}{z}\right), \text{ord}_\infty(z^2) = -2 \Rightarrow \text{div}(\omega) = -2 \cdot \infty$$

### Satz 10 (Riemann-Roch)

Sei  $C$  eine nichtsinguläre projektive Kurve über  $k$ ,  $K$  ein kanonischer Divisor auf  $C$ . Dann gilt für jeden Divisor  $D \in \text{Div}(C)$ :

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

**Beweis** für den Fall  $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ .

**Behauptung:** Für jeden Divisor  $D$  mit  $l(D) > 0$  und jedes  $P \in C$  gilt:

Ist  $l(K - D - P) \neq l(K - D)$ , so ist  $l(D + P) = l(D)$ .

**Proposition 4.21.3**

Sei  $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2(k)$  nischinguläre projektive Kurve vom Grad  $d \geq 3$  und  $L \subset \mathbb{P}^2(k)$  eine Gerade mit  $L \cap C = \{P_1, \dots, P_d\}$ . Dann ist

$$K = \sum_{i=1}^d (d-3)P_i$$

ein kanonischer Divisor.

**Probe:**

$$\begin{aligned} \deg K + 2 &= d(d-3) + 2 = d^2 - 3d + 2 = 2g \\ g &= \frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \frac{1}{2}(d^2 - 3d + 2) \end{aligned}$$

**Beweis**  $\text{CE } L = V(X_0)$ . Sei  $X = \frac{X_1}{X_0}, Y = \frac{X_2}{X_0}$  (als Elemente von  $k(C)$ )

**Behauptung:**

$$\operatorname{div}(dx) = \sum_{i=1}^d (d-3)P_i + \operatorname{div}(f_y)$$

wobei  $f_y$  die Klasse in  $k(C)$  von  $\frac{1}{X_0^{d-1}} \cdot \frac{\partial F}{\partial X_2}$  ist. Dann ist

$$\operatorname{div}(f_y) = \sum_{P \in U_0} \operatorname{ord}_P \frac{\partial F}{\partial X_2} \cdot P - \sum_{i=1}^d (d-1) \cdot P_i$$

Zu zeigen ist also:

$$\operatorname{div} dx = \sum_{P \in U_0} \operatorname{ord}_P \frac{\partial F}{\partial X_2} P - 2 \cdot \sum_{i=1}^d P_i \quad \square$$

**Folgerung 4.21.4**

$$D = 0 : 1 - l(K) = 1 - g$$

(a)  $l(K) = g$

(b)  $\deg(K) = 2g - 2, g - 1 = \deg K + 1 - g; D = K$

(c) für  $\deg D \geq 2g - 1$  ist  $l(D) = \deg D + 1 - g$

# Vokabeln

- (Krull-)Dimension, 35
- affine Kegel, 19
- affine Varietät, 4
- affiner Koordinatenring, 5
- birational, 16
- Definitionsbereich, 15
- Dehomogenisierung, 20
- Divisor, 46
- Divisorengruppe, 46
- Divisorenklassengruppe, 47
- dominant, 15, 28
- effektiv, 46
- Funktionskörper, 14, 28
- Garbe, 12
- Geschlecht, 50
- Grad, 46, 48
- graduierter Ring, 18
- Hauptdivisor, 46
- homogen, 18
- homogene Koordinatenring, 20
- Homogenisierung, 20
- Höhe, 35
- irreduzibel, 6
- irreduzible Komponente, 6
- Isomorphismus, 32
- kanonisch, 54
- linear äquivalent, 47
- lokale Dimension, 36
- lokaler Ring, 34
- meromorphe Differentiale, 54
- Morphismus, 9, 11, 25
- nichtsingulärer Punkt, 38
- Ordnung, 46
- Pol(stellen)menge, 15
- projektive Varietät, 18
- Prägarbe, 12
- Prävarietät, 31, 32
- quasiprojektive Varietät, 21
- rationale Abbildung, 16, 28
- rationale Differentiale, 54
- rationale Funktion, 15, 27
- regulär, 39
- reguläre Funktion, 11, 22
- regulärer Punkt, 38
- Riemann-Roch-Raum, 49
- separiert, 32
- singuläre Ort, 40
- Tangentialbündel, 39
- Tangentialraum, 37
- tautologisches Bündel, 29
- Varietät, 33
- Verschwindungsideal, 5, 19
- Verzweigungsordnung, 48
- Zariski-Tangentialraum, 37
- Zariski-Topologie, 6, 19