

# 5 Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy

## 5.1 Charakteristische Funktionen

### Definition

Es sei  $X$  Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann heißt

$$\phi_X(t) := Ee^{itX} = E \cos(tX) + iE \sin(tX)$$

die **charakteristische Funktion** zu  $X$ .

### Bemerkung

Ist  $X$  diskret mit Werten  $x_1, x_2, \dots$ , so gilt:

$$\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} \cdot P(X = x_k)$$

Ist  $X$  absolutstetig mit Dichte  $f$ , so gilt:

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (\text{Fourier-Transformation})$$

### Beispiel 5.1

a)  $X \sim B(n, p)$

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (1-p + pe^{it})^n \end{aligned}$$

b)  $X \sim U(0, 1)$

$\phi_X(0) = 1$  und für  $t \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \int_0^1 e^{itx} \cdot 1 dx = \int_0^1 \cos(tx) dx + i \int_0^1 \sin(tx) dx \\ &= \frac{1}{t} \sin(t) - \frac{i}{t} \cos(t) + \frac{i}{t} = \frac{1}{it} (e^{it} - 1) \end{aligned}$$

c)  $X \sim N(0, 1)$

$$\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{vgl. Stochastik 1}$$

**Satz 5.1** Sind  $X, Y$  unabhängige Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen  $\phi_X$  und  $\phi_Y$ , so gilt für die charakteristische Funktion  $\phi_{X+Y}$  der Faltung:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

**Beweis** vgl. Stochastik 1, Satz 12.2. ■

**Lemma 5.1** Für alle  $m \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(it)^k}{k!} \right| \leq \min \left\{ \frac{|t|^m}{m!}, \frac{2|t|^{m-1}}{(m-1)!} \right\}$$

**Beweis** vgl. Stochastik 1, Satz 13.2. ■

## 5.2 Umkehrsätze

Wir werden sehen, dass eine Verteilung eindeutig durch ihre charakteristische Funktion festgelegt ist. Hat man z.B. gezeigt, dass  $X$  die charakteristische Funktion  $(1 - p + pe^{it})^n$  hat, so ist  $X \sim B(n, p)$ .

Aus der Analysis ist die Integralsinusfunktion bekannt:

$$Si : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(y)}{y} dy \quad \forall x > 0$$

Es gilt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (Si(x)) = \frac{\pi}{2}$

### Satz 5.2

Es sei  $X$  Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion  $\phi_X$ . Dann gilt für alle  $-\infty < a < b < \infty$ :

$$\frac{1}{2}P(X = a) + P(a < X < b) + \frac{1}{2}P(X = b) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t) dt \right)$$

### Beweis

Sei  $I(T) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t) dt$ . Definiere  $\psi : \mathbb{R} \times [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\psi(t, x) := \begin{cases} \frac{e^{-it(a-x)} - e^{-it(b-x)}}{it}, & t \neq 0 \\ b - a, & t = 0 \end{cases}$$

Mit Lemma 5.1 folgt, dass  $\psi$  stetig ist und wegen

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| = \left| \int_a^b e^{ity} dy \right| \leq b - a$$

ist  $|\psi| \leq b - a$ , also ist  $\psi P^X \otimes \lambda_{[-T,T]}$ -integrierbar. Mit Satz 3.1 (Fubini I) folgt:

$$\begin{aligned} I(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \left( \int e^{itx} P^X(dx) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\int_{-T}^T \frac{1}{it} (e^{-it(a-x)} - e^{-it(b-x)}) dt}_{=: \psi_{a,b,T}(x)} P^X(dx) \end{aligned}$$

Inneres Integral:

Da  $t \mapsto \frac{\cos(t(x-a))}{it}$  punktsymmetrisch ist, gilt:

$$\psi_{a,b,T}(x) = 2 \cdot \int_0^T \frac{1}{t} \sin((x-a)t) dt - 2 \cdot \int_0^T \frac{1}{t} \sin((x-b)t) dt$$

Es gilt weiterhin:

$$c \cdot \int_0^T \frac{1}{c \cdot t} \sin(ct) dt = \operatorname{sgn}(c) \cdot Si(T|c|) \quad \text{mit } \operatorname{sgn}(c) = \begin{cases} 1, & c > 0 \\ 0, & c = 0 \\ -1, & c < 0 \end{cases}$$

$$\implies \psi_{a,b,T}(x) = 2 \cdot \operatorname{sgn}(x-a) Si(T|x-a|) - 2 \cdot \operatorname{sgn}(x-b) Si(T|x-b|)$$

$$\implies \psi_{a,b}(x) := \lim_{T \rightarrow \infty} (\psi_{a,b,T}(x)) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ oder } x > b \\ \pi, & x = a \text{ oder } x = b \\ 2\pi, & a < x < b \end{cases}$$

$\implies (\psi_{a,b,T})_{T \geq 0}$  besitzt eine (konstante) integrierbare Majorante. Mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} I(T) &= \frac{1}{2\pi} \int \psi_{a,b}(x) P^X(dx) \\ &= \frac{1}{2} P(X=a) + \frac{1}{2} P(X=b) + P(a < X < b) \end{aligned}$$

■

### Korollar 5.1

Sind  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit derselben charakteristischen Funktion, so haben  $X$  und  $Y$  dieselbe Verteilung.

**Beweis** Sei  $D = A(X) \cup A(Y)$  mit  $A(X) = \{x \in \mathbb{R} | P(X=x) > 0\}$ , analog  $A(Y)$ .  $A(X)$  ist abzählbar, da  $A(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} | P(X=x) \geq \frac{1}{n}\}$  und  $|\{x \in \mathbb{R} | P(X=x) \geq \frac{1}{n}\}| \leq n \implies D$  abzählbar

$$\mathcal{D} := \{(a,b) | -\infty < a \leq b < \infty, a, b \notin D\}$$

ist ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem von  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .  $\xrightarrow{\text{Sa5.2}} P^X$  und  $P^Y$  stimmen auf  $\mathcal{D}$  überein  $\xrightarrow{\text{Eindeutigkeitsatz}}$  Behauptung. ■

**Satz 5.3**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion  $\phi$ . Gilt  $\int |\phi(t)| dt < \infty$ , so hat  $X$  eine stetige Dichte  $f$ , die gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \phi(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Beweis** Wie in Beweis von Satz 5.2 gilt:

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| \leq |b - a| \quad (*)$$

Da  $\phi$   $\lambda$ -integrierbar ist, ist  $|b - a||\phi|$  eine integrierbare Majorante für diesen Ausdruck in Satz 5.2. Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P(X = a) + P(a < X < b) + \frac{1}{2}P(X = b) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt \\ \implies P(a < X < b) &\leq \frac{1}{2\pi} |b - a| \underbrace{\int |\phi(t)| dt}_{< \infty} \\ \implies P(X = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(x - \frac{1}{n} < X < x + \frac{1}{n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ist  $F$  die Verteilungsfunktion von  $X$ , so gilt:

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t) dt \quad \forall a < b$$

Wegen (\*) kann man den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und bekommt:

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} \phi(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \phi(t) dt \\ &=: f(x) \end{aligned}$$

Außerdem folgt  $x \mapsto f(x)$  ist stetig. ■

### 5.3 Verteilungskonvergenz

**Definition**

- a) Gegeben sei der messbare Raum  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  mit Wahrscheinlichkeitsmaßen  $P, P_1, P_2, \dots$  und zugehörigen Verteilungsfunktionen  $F, F_1, F_2, \dots$ .  
 $P_n$  **konvergiert schwach** gegen  $P$  ( $P_n \xrightarrow{w} P$ ), wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \forall x \in \mathbb{R}$  an denen  $F$  stetig ist.
- b) Seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariablen auf (unter Umständen verschiedenen) Wahrscheinlichkeitsräumen  $(\Omega, \mathcal{A}, P), (\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1), \dots$   
 $X_n$  **konvergiert in Verteilung** gegen  $X$  ( $X_n \xrightarrow{d} X$ ), wenn  $P^{X_n} \xrightarrow{w} P^X$ .

**Beispiel 5.2** Konvergenz in Verteilung bzw. schwache Konvergenz ist schwächer als f.s.-Konvergenz.

Sei z.B.  $X \sim N(0, 1)$  und  $X_{2n} = X, X_{2n+1} = -X \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\implies P^{X_n} \equiv P^X = N(0, 1)$  und  $(X_n)$  konvergiert in Verteilung (gegen  $X$ ) jedoch  $X_n \not\xrightarrow{f.s.} X$

Jedoch gilt folgender nützlicher Satz:

**Satz 5.4 (Darstellungssatz von Skorohod)**

Es seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariablen mit  $X_n \xrightarrow{d} X$ . Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und hierauf Zufallsvariablen  $X', X'_1, X'_2, \dots$  mit  $X' \stackrel{d}{=} X, X'_n \stackrel{d}{=} X_n \forall n \in \mathbb{N}$  derart, dass  $X'_n \xrightarrow{f.s.} X'$ .

**Beweis** Es seien  $F, F_1, F_2, \dots$  die Verteilungsfunktionen zu  $X, X_1, X_2, \dots$  und  $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ((0, 1), \mathfrak{B}_{(0,1)}, \lambda_{(0,1)})$ . Weiter sei  $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, F^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq y\}$  die Quantilsfunktion zu  $F$ , analog (Quantilsfunktion)  $F_n^{-1}, n \in \mathbb{N}$ . Setze  $X' := F^{-1}, X'_n := F_n^{-1}$ .

Satz 5.7 (Stoch 1)  $\implies X' \stackrel{d}{=} X, X'_n \stackrel{d}{=} X_n, n \in \mathbb{N}$  ( $P(X' \leq x) = P(F^{-1}(\omega) \leq x) = \underbrace{P(\omega \leq F(x))}_{=\lambda_{(0,1)}} = F(x)$ )

Es bleibt also zu zeigen, dass für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X'_n(\omega) = X'(\omega)$ .

Sei  $\omega \in (0, 1)$ . Da  $X$  nur abzählbar viele Atome hat (vgl. Beweis von Korollar 5.1) existiert zu  $\varepsilon > 0$  ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $X'(\omega) - \varepsilon < x < X'(\omega)$  und  $P(X = x) = 0$ .

Es gilt (Lemma 5.6, Stoch 1):  $\forall y \in (0, 1), x \in \mathbb{R} :$

$$y \leq F(x) \iff F^{-1}(y) \leq x$$

Hier:  $\omega \leq F(x) \iff F^{-1}(\omega) = X'(\omega) \leq x$ . Wegen  $X'(\omega) > x$  folgt  $F(x) < \omega$ . Da  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  nach Voraussetzung,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\forall n \geq n_0 : F_n(x) < \omega$ . Also  $X'_n > x$ .

Mit  $\varepsilon \downarrow 0$  folgt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X'_n(\omega) \geq X'(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Ist  $\omega' > \omega$  und  $\varepsilon > 0$ , so  $\exists$  ein  $x$  mit  $X'(\omega') < x < X'(\omega') + \varepsilon$  und  $P(X = x) = 0$ . Da  $F$  rechtsseitig stetig, folgt  $F(F^{-1}(y)) \geq y \forall y \in (0, 1)$ , also mit der Monotonie von  $F : \omega < \omega' \leq F(X'(\omega')) \leq F(x)$ .

Wegen  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $\omega \leq F_n(x)$  (d.h.  $X'_n(\omega) \leq x$ )  $\forall n \geq n_0$  gilt mit  $\varepsilon \downarrow 0$  ergibt das

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X'_n(\omega) \leq X'(\omega') \quad \forall \omega' > \omega.$$

**Satz 5.5** *Es sei  $C_b(\mathbb{R})$  die Menge aller stetigen und beschränkten Funktionen,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:*

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff Eh(X_n) \rightarrow Eh(X) \quad \forall h \in C_b(\mathbb{R})$$

**Beweis**

“ $\Rightarrow$ ”: Nach Satz 5.4 existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und Zufallsvariablen  $X' \stackrel{d}{=} X$ ,  $X'_n \stackrel{d}{=} X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  mit  $X'_n \xrightarrow{f.s.} X'$ . Es folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Eh(X_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Eh(X'_n)) \stackrel{h \text{ stetig}, X'_n \xrightarrow{f.s.} X'}{=} Eh(X') = Eh(X).$$

“ $\Leftarrow$ ”: Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  sei  $h_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$h_{a,b}(x) := \begin{cases} 1 & , x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & , x \geq b \end{cases}$$

$h_{a,b}$  ist stetig und beschränkt. Seien  $F, F_n$  die Verteilungsfunktionen zu  $X, X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\forall y > x$ :

$$F_n(x) = E[\mathbf{1}_{(-\infty, x)}(X_n)] \leq E[h_{x,y}(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[h_{x,y}(X)],$$

$$E[h_{x,y}(X)] \leq E[\mathbf{1}_{(-\infty, y)}(X)] = F(y).$$

Also folgt da  $F$  rechtsseitig stetig ist mit  $y \downarrow x$ :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (F_n(x)) \leq F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Analog erhält man für  $y < x$ :

$$F_n(x) \geq E[h_{y,x}(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[h_{y,x}(X)] \geq F(y)$$

Mit  $y \uparrow x$ :  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (F_n(x)) \geq F(x-)$   $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Ist  $F$  in  $x$  stetig, so gilt  $F(x-) = F(x)$  und somit  $F_n(X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$ . ■

**Satz 5.6 (“Continuous Mapping Theorem”)**

*Es seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariablen mit  $X_n \xrightarrow{d} X$ . Weiter sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Borel-messbare Funktion mit  $P(X \in \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ nicht stetig in } x\}) = 0$ .*

*Dann gilt auch  $f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$  für  $n \rightarrow \infty$ .*

**Beweis** Übung. ■

**Satz 5.7 (Satz von Helly<sup>1</sup>)**

Zu jeder Folge  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Verteilungsfunktionen existieren eine Teilfolge  $(F_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und eine schwach monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion  $G : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , sodass  $\lim_{k \rightarrow \infty} (F_{n_k}(x)) = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , an denen  $G$  stetig ist.

**Beweis (Skizze)**

Für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1] \xrightarrow{\text{Bolzano-Weierstra\ss}} \exists$  Häufungspunkt. Sei  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q}$ . Wähle Teilfolgen  $(F_{n_{k,j}})_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $F_{n_{k,j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} G_0(r_k)$ , wobei  $(n_{k+1,j})_{j \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(n_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$  ist. (Definition der Funktion  $f_0$  auf  $\mathbb{Q}$ )  
Für die Diagonalfolge  $(n_{j,j})_{j \in \mathbb{N}}$  gilt dann:  $F_{n_{j,j}} \rightarrow G_0$  auf  $\mathbb{Q}$ . Sei  $G_0$  auf ganz  $\mathbb{R}$  durch  $G(x) := \inf\{G_0(r) \mid r \in \mathbb{Q}, r > x\}$  fortgesetzt.  
Rest:  $\epsilon - \delta$ -Argumente. ■

**Bemerkung**  $G$  aus Satz 5.7 muß keine Verteilungsfunktion sein.

Beispiel:  $F_n := \mathbf{1}_{[n, \infty)} \implies G \equiv 0$

**Definition** Eine Familie  $\mathcal{P}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  heißt **straff**, wenn  $\forall \epsilon > 0 \exists$  kompaktes Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  mit:

$$P([a, b]) \geq 1 - \epsilon \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

**Bemerkung**

- (i) Ist  $\mathcal{P}$  straff, so auch jedes  $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ .
- (ii) Sind alle  $\mathcal{P}_i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  straff, so auch  $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ .
- (iii) Ist  $|\mathcal{P}| = 1$ , so ist  $\mathcal{P}$  straff.

**Satz 5.8** Ist  $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  eine straffe Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ , so existieren eine Teilfolge  $(P_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  derart, dass  $P_{n_k} \xrightarrow{w} P$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**Beweis** Sei  $F_n$  die Verteilungsfunktion zu  $P_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$\xrightarrow{\text{Satz 5.7}} \exists$  Folge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $F_{n_k}(x) \rightarrow G(x)$  für  $k \rightarrow \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $G$  stetig in  $x$ ;  $G$  ist wachsend und rechtsseitig stetig.

Bleibt zu zeigen:  $G$  ist Verteilungsfunktion, also  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (G(x)) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} (G(x)) = 1$ . Ist dann  $P$  das Wahrscheinlichkeitsmaß zu  $G$ , so folgt  $P_{n_k} \xrightarrow{w} P$ .

Sei also  $\epsilon > 0$ . Da  $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  straff ist  $\implies \exists a, b \in \mathbb{R}$  mit  $P_n([a, b]) \geq 1 - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\implies F_n(a) \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$G$  hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.  $\implies \exists c < a$ , in dem  $G$  stetig.  $\implies G(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} (F_{n_k}(c)) \leq \epsilon \implies G(x) \leq \epsilon \quad \forall x \leq c$ .

Also:  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad \forall x \leq c$  gilt  $0 \leq G(x) \leq \epsilon \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} (G(x)) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} (G(x)) = 1$ . ■

**Satz 5.9 (Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen)**

Es seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariablen,  $\phi, \phi_1, \phi_2, \dots$  die zugehörigen charakteristischen Funktionen. Dann gilt:

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff \phi_n(t) \rightarrow \phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

**Beweis**

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $t \in \mathbb{R}$ .  $x \mapsto \cos(tx)$ ,  $x \mapsto \sin(tx)$  sind stetig und beschränkt.

Satz 5.5  $\phi_n(t) = E \cos(tX_n) + iE \sin(tX_n) \rightarrow E \cos(tX) + iE \sin(tX) = \phi(t)$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Wir zeigen zunächst:  $\{P^{X_n}, n \in \mathbb{N}\}$  ist straff.  $\mathbb{C}$ -wertige Version von Fubini II liefert  $\forall \delta > 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - \varphi_n(t)) dt &= \int \left( \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - e^{itx}) dt \right) P^{X_n}(dx) \\ &= 2 \int \underbrace{\left( 1 - \frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right)}_{\geq 0} P^{X_n}(dx) \\ &\geq 2 \int_{|x| \geq \frac{2}{\delta}} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{|\delta x|} \right)}_{\geq \frac{1}{2}} P^{X_n}(dx) \\ &\geq P^{X_n}\left(\left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right]^c\right) \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $\varphi$  in 0 stetig und  $\varphi(0) = 1$ ,  $\exists \delta > 0$ :

$$|1 - \varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall |t| \leq \delta$$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - \varphi(t)) dt \right| \leq \frac{1}{\delta} 2\delta \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$ . Da  $|\varphi_n| \leq 1$  folgt mit majorisierter Konvergenz:

$$\int_{-\delta}^{\delta} (1 - \varphi_n(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - \varphi(t)) dt$$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - \varphi_n(t)) dt \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ .  $\Rightarrow P^{X_n}\left(\left[-\frac{2}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right]\right) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ .

Außerdem:  $\forall n \in \{1, \dots, n_0 - 1\} \exists a_n > 0$  mit  $P^{X_n}([-a_n, a_n]) \geq 1 - \varepsilon$  da  $P^{X_n}([-m, m]) \rightarrow 1$  für  $m \rightarrow \infty$ .

Insgesamt: Sei  $a := \max\{a_1, \dots, a_{n_0-1}, \frac{2}{\delta}\}$   $\Rightarrow P^{X_n}([-a, a]) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{P^{X_n}, n \in \mathbb{N}\}$  ist straff.

**Annahme:**  $X_n \xrightarrow{d} X$  gilt nicht.

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$  mit  $P(X = x) = 0$  und  $P(X_n \leq x) \not\rightarrow P(X \leq x), n \rightarrow \infty$ .

d.h.  $\exists \varepsilon > 0$  und eine Teilfolge  $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $|P(X_{n_k} \leq x) - P(X \leq x)| \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$  (\*).

$\{P^{X_{n_k}}, k \in \mathbb{N}\}$  ist ebenfalls straff  $\stackrel{S.5.8}{\Rightarrow} \exists$  Teilfolge  $(X_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  und ein W'maß  $P_0$  mit  $P^{X_{n_{k_j}}} \xrightarrow{w} P_0$ .

Sei  $\varphi_0$  charakteristische Funktion zu  $P_0$ . Also folgt mit der Hinrichtung:  $\varphi_{n_{k_j}}(t) \rightarrow \varphi_0(t) = \varphi(t) \stackrel{Kor. 5.1}{\Rightarrow} P_0 = P^X$ , also  $X_{n_{k_j}} \xrightarrow{d} X$  und damit  $P(X_{n_{k_j}} \leq x) \rightarrow P(X \leq x)$ .  
Wid zu (\*). ■

Wir benötigen noch folgendes technisches Hilfslemma:

**Lemma 5.2**

Für alle  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  gilt:

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n w_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - w_k|$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n w_k \right| &\leq \left| \prod_{k=1}^n z_k - w_1 \prod_{k=2}^n z_k \right| + \left| w_1 \prod_{k=2}^n z_k - w_1 w_2 \prod_{k=3}^n z_k \right| + \dots + \left| w_1 \dots w_{n-1} z_n - \prod_{k=1}^n w_k \right| \\ &= |z_1 - w_1| \underbrace{\left| \prod_{k=2}^n z_k \right|}_{\leq 1} + |z_2 - w_2| \underbrace{|w_1| \left| \prod_{k=3}^n z_k \right|}_{\leq 1} + \dots + |z_n - w_n| \underbrace{\left| \prod_{k=1}^{n-1} w_k \right|}_{\leq 1} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Hauptsatz des Abschnitts:

**Satz 5.10 (Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy)**

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  seien  $X_{nk}, k = 1, \dots, r_n$  unabhängige Zufallsvariablen (nicht notwendig identisch verteilt) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$  mit  $\text{Var}(X_{nk}) = \sigma_{nk}^2 < \infty$  und  $EX_{nk} = \mu_{nk} < \infty$ . Es sei  $s_n^2 := \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{nk}^2 > 0$ . Ist dann für alle  $\varepsilon > 0$  die **Lindeberg-Bedingung**

$$(L) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{r_n} \int_{|X_{nk} - \mu_{nk}| > \varepsilon s_n} (X_{nk} - \mu_{nk})^2 dP_n = 0$$

erfüllt, so gilt mit  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{r_n} (X_{nk} - \mu_{nk}) \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim N(0, 1)$$

**Bemerkung 5.1** 1. Die Lindeberg-Bedingung schließt einen dominierenden Einfluss eines einzelnen Summanden  $X_{nk}$  auf die  $X_{n1} + \dots + X_{nr_n}$  aus. Insbesondere gilt:

$$\max\{\sigma_{nk}^2 \mid 1 \leq k \leq r_n\} = o(s_n^2) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

2. Der ZGWS hat eine lange „Verbesserungsgeschichte“ hinter sich. Gelegentlich ist die Lyapunov-Bedingung einfacher zu verwenden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{r_n} E(|X_{nk} - \mu_{nk}|^{2+\delta}) = 0 \text{ für ein } \delta > 0$$

3. Der Satz liefert eine Begründung für die „Allgegenwart“ der Normalverteilung.

Ein wichtiger Spezialfall ist

**Satz 5.11 (ZGWS St. I)**

Es seien  $Y_1, Y_2, \dots$  u.i.v. ZV mit  $EY_1 = \mu < \infty$  und  $0 < \text{Var}(Y_1) = \sigma^2 < \infty$ . Dann gilt:

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

**Beweis** Sei  $X_{nk} := Y_k, r_n = n, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n) = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Es gilt:  $s_n^2 = n\sigma^2$  und

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{r_n} \int_{|X_{nk} - \mu_{nk}| > \varepsilon s_n} (X_{nk} - \mu_{nk})^2 dP_n = \frac{1}{\sigma^2} \int_{|Y_1 - \mu_1| > \varepsilon \sqrt{n}\sigma} (Y_1 - \mu_1)^2 dP =: I_n$$

Da  $z_n := \mathbf{1}_{(\varepsilon\sqrt{n}\sigma, \infty)}(|Y_1 - \mu_1|)(Y_1 - \mu_1)^2 \leq (Y_1 - \mu_1)^2$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  folgt mit majorisierter Konvergenz, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ . Also ist die Lindeberg-Bedingung erfüllt und die Behauptung folgt mit Satz 5.10.  $\blacksquare$

**Beweis** Beweis von Satz 5.10

O.B.d.A:  $\mu_{nk} = 0$  und  $s_n = 1$ . Anderfalls ersetze  $X_{nk}$  durch  $\frac{X_{nk} - \mu_{nk}}{s_n}$ .

**Idee:** Verwende S.5.9: Sei  $\varphi_{nk}$  die charakteristische Funktion von  $X_{nk}$  und  $\varphi_{s_n}$  die von  $\sum_{k=1}^{r_n} X_{nk} : \varphi_{s_n}(t) = \prod_{k=1}^{r_n} \varphi_{nk}(t) \rightarrow \varphi_z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Zu zeigen:

$$\prod_{k=1}^{r_n} \varphi_{nk}(t) \rightarrow \varphi_z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Mit Lemma 5.1 ( $m = 3$ ):

$$\begin{aligned} \left| e^{itx} - \left(1 + itx - \frac{1}{2}t^2x^2\right) \right| &\leq \min\left\{\frac{|tx|^3}{3!}, |tx|^2\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\leq \min\{|tx|^3, |tx|^2\} \end{aligned}$$

Integral über  $x$  liefert (beachte:  $EX = 0$ )

$$\left| \varphi_{n_k}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2\right) \right| \leq E \min\{|tX_{n_k}|^2, |tX_{n_k}|^3\} =: M_{n_k}$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} M_{n_k} &\leq \int_{|X_{n_k}| \leq \varepsilon} |tX_{n_k}|^3 dP_n + \int_{|X_{n_k}| > \varepsilon} |tX_{n_k}|^2 dP_n \\ &\leq |t|^3 \varepsilon \sigma_{n_k}^2 + t^2 \int_{|X_{n_k}| > \varepsilon} X_{n_k}^2 dP_n \\ \implies \sum_{k=1}^{r_n} M_{n_k} &\leq |t|^3 \varepsilon + t^2 \sum_{k=1}^{r_n} \int_{|X_{n_k}| > \varepsilon} X_{n_k}^2 dP_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon |t|^3 + 0 \quad \text{folgt mit (L)} \end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \downarrow 0$  folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \left| \phi_{n_k}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2\right) \right| = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Behauptung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{k=1}^{r_n} \phi_{n_k}(t) - \prod_{k=1}^{r_n} \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2\right) \right| = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2)$

Beweis:  $\forall \varepsilon > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{n_k}^2 &\leq \int_{|X_{n_k}| > \varepsilon} X_{n_k}^2 dP_n + \varepsilon^2 \\ \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{\sigma_{n_k}^2 | 1 \leq k \leq r_n\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{r_n} \int_{|X_{n_k}| > \varepsilon} X_{n_k}^2 dP_n \right) \\ &\stackrel{(L)}{=} \varepsilon^2 + 0 \end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \downarrow 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\sigma_{n_k}^2 | 1 \leq k \leq r_n\} = 0 \quad (3)$$

$$\implies \forall t \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq n_0 : \left|1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2\right| \leq 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, r_n\}$$

$$\implies \text{Für } n \geq n_0 \text{ läßt sich das } \prod \text{ in (2) nach Lemma 5.2 durch die Summe in (1) abschätzen, d.h. (1) } \implies \text{(2)}$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \underbrace{\prod_{k=1}^{r_n} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2\right)}_{=e^{-\frac{1}{2}t^2}} - \prod_{k=1}^{r_n} \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2\right) \right| = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Behauptung folgt mit Lemma 5.2 falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \left| \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2\right) - 1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2 \right| = 0 \quad (4)$$

Für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| \leq \frac{1}{2}$  gilt  $|e^x - 1 - x| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{\infty} |x|^j \leq x^2$

$$\implies \sum_{k=1}^{r_n} \left| \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2\right) - 1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_{n_k}^2}_{=x} \right| \leq \frac{1}{4}t^4 \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n_k}^4$$

Wegen  $\sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n_k}^4 \leq \max\{\sigma_{n_k}^2 | 1 \leq k \leq r_n\} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n_k}^2}_{=1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty, (3)} 0$

Also (3)  $\implies$  (4) ■

**Beispiel 5.3 (Rekorde)**

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen darauf mit absolutstetiger Verteilungsfunktion  $F$ . Setze:

$$R_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } X_n > X_i, i = 1, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$R_n = 1 \iff n$ -ter Versuch ist ein Rekord.  $F$  stetig  $\implies P(X_i = X_j) = 0 \forall i \neq j$

$$\begin{aligned} \implies A &:= \{\omega \in \Omega \mid \exists i \neq j, X_i(\omega) = X_j(\omega)\} \\ &= \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}, i \neq j} \{X_i = X_j\} \\ \implies P(A) &= 0 \end{aligned}$$

Sei  $S_n$  die Menge der Permutationen der Zahlen  $1, \dots, n$ . Sei  $\Psi_n : \Omega \rightarrow S_n$  gegeben durch

$$\Psi_n = \pi \iff X_{\pi(1)} < X_{\pi(2)} < \dots < X_{\pi(n)}$$

$\Psi_n$  ist messbar, da  $\Psi^{-1}(\{\pi\}) = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{\{X_{\pi(i)} < X_{\pi(i+1)}\}}_{\in \mathcal{A}}$ . Beispiel 3.5  $\implies (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) \stackrel{d}{=} (X_1, \dots, X_n) \forall \pi \in S_n$ .

$(X_1, \dots, X_n) \forall \pi \in S_n$ .

Ist  $B := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < \dots < x_n\}$  so gilt:

$$\begin{aligned} P(\Psi_n = \pi) &= P((X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) \in B) \\ &= P((X_1, \dots, X_n) \in B) \\ &= P(\Psi_n = \mathbf{id}) \quad \text{unabhängig von } \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies P(\Psi_n = \pi) &= \frac{1}{n!} \quad \forall \pi \in S_n \text{ und} \\ P(R_n = 1) &= P(\Psi_n \in \{\pi \in S_n \mid \pi(n) = n\}) = \frac{1}{n} \\ \implies R_n &\sim B(1, \frac{1}{n}) \text{ sind also nicht identisch verteilt} \end{aligned}$$

Wegen  $\{R_{n+1} = 1\} \cap \{\Psi_n = \pi\} = \{\Psi_{n+1} = \tilde{\pi}\}$  mit

$$\tilde{\pi}(i) = \begin{cases} \pi(i) & , i \leq n \\ n+1 & , i = n+1 \end{cases}$$

folgt:

$$P(\Psi_n = \pi, R_{n+1} = 1) = \frac{1}{(n+1)!} = \underbrace{P(\Psi_n = \pi)}_{=\frac{1}{n!}} \underbrace{P(R_{n+1} = 1)}_{=\frac{1}{n+1}} \quad \forall \pi \in S_n$$

- $\implies \Psi_n$  und  $R_{n+1}$  sind unabhängig
- $\implies$  Da  $(R_1, \dots, R_n) = G(\Psi_n)$  sind  $R_{n+1}$  und  $(R_1, \dots, R_n)$  unabhängig
- $\implies P(R_{i_1} = j_1, \dots, R_{i_n} = j_n) = P(R_{i_1} = j_1, \dots, R_{i_{n-1}} = j_{n-1}) \cdot P(R_{i_n} = j_n) = \dots P(R_{i_1} = j_1) \cdot \dots \cdot P(R_{i_n} = j_n)$  für  $i_1 < i_2 < \dots < i_n, j_1, \dots, j_n \in \{0, 1\}$ .
- $\implies$  die Zufallsvariablen  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind unabhängig

Wie viele Rekorde gibt es unter den ersten  $n$  Versuchen?

$$S_n := \sum_{i=1}^n R_i$$

Es gilt:

$$ES_n = \sum_{k=1}^n ER_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(R_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Insbesondere:

$$\frac{ES_n}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad \frac{\text{Var}(S_n)}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz (ZGWS) bekommen wir genauere Aussagen: Sei

$$X_{nk} = R_k, r_n = n \implies s_n = (\text{Var}(S_n))^{\frac{1}{2}}$$

Überprüfen der Lyapunov-Bedingung ( $\delta = 1$ ):

$$E|R_k - \underbrace{ER_k}_{=\frac{1}{k}}|^3 = \underbrace{P(R_k = 1)}_{=\frac{1}{k}} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^3 + \underbrace{P(R_k = 0)}_{=\frac{k-1}{k}} \left(\frac{1}{k}\right)^3 \leq \frac{2}{k}$$

$$\implies 0 \leq \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n E|R_k - ER_k|^3 \leq \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Der Zentrale Grenzwertsatz (Satz 5.10) liefert

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

bzw.

$$\frac{S_n - \log(n)}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

Also für große  $n$ :  $P(\log(n) - 1,96\sqrt{\log(n)} \leq S_n \leq \log(n) + 1,96\sqrt{\log(n)}) \approx P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,9$ .

**Beispiel 5.4** (G. Polya, 1930: Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe zur Kundenwerbung, oder: "Coupon Collector's Problem")

Urne mit  $n$  verschiedenen Kugeln, Ziehen mit Zurücklegen

$S_n$  = Anzahl der Züge, bis  $r_n = [\phi \cdot n]$ ,  $0 < \phi < 1$  verschiedene Kugeln gezogen werden. Es sei  $X_{nk}$  = Anzahl der bis zum Erhalt einer neuen Kugel nötigen Züge, wenn bereits  $k - 1$  verschiedene Kugeln gezogen (und zurückgelegt) wurden.  $X_{n1} := 1$ .

$X_{nk} \sim \text{Geo}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$ , d.h.  $P(X_{nk} = j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \cdot \frac{n-k+1}{n}$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Falls  $Y \sim \text{Geo}(p)$ ,  $p \in (0, 1]$  mit  $Y \equiv 1$  bei  $p = 1$ , gilt:

$$EY = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}, \quad EY^4 \leq \frac{24}{p^4}$$

Für  $S_n = X_{n1} + \dots + X_{nr_n}$  erhalten wir  $\mu_n := ES_n = \sum_{k=1}^{r_n} \frac{n}{n-k+1}$  und  $s_n^2 =$

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{r_n} \frac{\binom{k-1}{n-k+1}}{\binom{n-k+1}{n}} = n \sum_{k=1}^{r_n} \frac{k-1}{(n-k+1)^2}.$$

Wir prüfen die Lyapunov-Bedingung mit  $\delta = 2$ : Für  $Y \sim \text{Geo}(p)$  gilt:

$$E\left(Y - \frac{1}{p}\right)^4 \leq E(\max\{Y, \frac{1}{p}\})^4 \leq EY^4 + \frac{1}{p^4} \leq \frac{25}{p^4}.$$

Insbesondere ist damit

$$\sum_{k=1}^{r_n} E|X_{nk} - \mu_{nk}|^4 \leq 25 \cdot \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{(1 - \frac{k-1}{n})^4} \leq 25 \cdot [\phi \cdot n] \cdot \frac{1}{(1 - \phi)^4} = O(n).$$

Wegen  $s_n^2 \geq n \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{r_n} (k-1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}(r_n - 1) \cdot r_n \geq \frac{1}{2n}(\phi n - 1)\phi n = \Theta(n)$  folgt damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s_n^{2+2}} \sum_{k=1}^{r_n} E|X_{nk} - \mu_{nk}|^{2+2} \right) = 0.$$

Also folgt mit dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

Weiter gilt:  $\frac{1}{n}ES_n = \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k-1}{n}} = \int_0^{\frac{r_n}{n}} \frac{1}{1-x} dx + O(\frac{1}{n}) = \int_0^{\frac{r_n}{n}} \frac{1}{1-x} dx + O(\frac{1}{n}) = \int_0^{\phi} \frac{1}{1-x} dx + O(\frac{1}{n}) = -\log(1 - \phi) + O(\frac{1}{n})$ .

Analog:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} \text{Var}(S_n^2)) = \int_0^{\phi} \frac{x}{(1-x)^2} dx = \frac{\phi}{1-\phi} + \log(1 - \phi)$ .

Mit  $a(\phi) = -\log(1 - \phi)$ ,  $b(\phi) := \sqrt{\frac{\phi}{1-\phi} + \log(1 - \phi)}$  folgt:

$$\frac{S_n - a(\phi)n}{b(\phi)\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

### Beispiel (Numerisches Beispiel)

Wie groß muss ihr Bekanntenkreis sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 an 180 Tagen im Jahr Geburtstag gefeiert werden kann?

$$\text{Also: } n = 365, \phi = \frac{180}{365}, S_n \leq k \iff \underbrace{\frac{S_n - a(\phi)n}{b(\phi)\sqrt{n}}}_{\approx Z} \leq \frac{k - a(\phi)n}{(b(\phi)\sqrt{n})}$$

$$\Phi\left(\underbrace{\frac{k - a(\phi)n}{b(\phi)\sqrt{n}}}_{=1,645}\right) \geq 0,95 \iff k \geq a(\phi)n + 1,645 \cdot b(\phi)\sqrt{n} \implies k \geq 266.$$

Für  $\phi = 1$  kann man den Zentralen Grenzwertsatz nicht mehr anwenden:

$$r_n = n, \text{Var}(S_n) = n \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{(n-k+1)^2} = n \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{k^2} = n^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} + o(n^2).$$

$\text{Var}(X_{n,n}) = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n^2 + o(n^2) \implies$  bei großem  $n$  steckt etwa  $\frac{6}{\pi^2} \approx 0,61$  der Variabilität der Summe im letzten Summanden.

Wir können jetzt eine andere Skalierung finden, allerdings ist die Grenzverteilung dann keine Normalverteilung mehr!

Sei  $A_{m,i}$  das Ereignis, dass die Kugel  $i$  in den ersten  $m$  Ziehungen nicht auftaucht

$$\implies \{S_n > m\} = \bigcup_{i=1}^m A_{m,i}.$$

( $S_n$  ist die Anzahl der Züge, bis alle  $n$  verschiedenen Kugeln mindestens einmal gezogen worden sind)

Mit der Siebformel:

$$P(S_n > m) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P\left(\bigcap_{l=1}^k A_{m,i_l}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^m$$

Sei  $c \in \mathbb{R}$  fest,  $m_n = \lceil n \log(n) + cn \rceil$ . Für  $x > -1$  gilt  $\log(1+x) \leq x$ . Damit:  $\log\left(\binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m_n}\right) \leq k \log(n) - \log(k!) + \log\left(1 - \frac{k}{n}\right) (n \log(n) + cn - 1) \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} k \log(n) - \log(k!) - \frac{k}{n} (n \log(n) + cn - 1) \leq -ck + \frac{k}{n} - \log(k!)$

$$\implies \left| (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m_n} \right| \leq \frac{1}{k!} \exp\left(\frac{k}{n} - ck\right) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ähnlich: } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m_n} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} e^{-ck} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( P\left(\frac{S_n - n \log(n)}{n} > c\right) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P(S_n > m_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m_n} \right) \\ &\stackrel{\text{maj. Konv.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m_n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} (e^{-c})^k \\ &= 1 - e^{-e^{-c}} \end{aligned}$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  mit der Verteilungsfunktion  $F(x) = e^{-e^{-x}} \forall x \in \mathbb{R}$  heißt **Gumbel-Verteilung**.

Also gilt:

$$\frac{S_n - n \log(n)}{n} \xrightarrow{d} Z \sim \text{Gumbel}.$$

### Beispiel (Variation des numerischen Beispiels von oben)

Der Bekanntenkreis soll jetzt so groß sein, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 täglich gefeiert werden kann.

$$\implies k \geq 365 \cdot \log(365) \cdot 365 \cdot 2,97 \approx 3237,51 \quad (?)$$

