

9 Konvergenzsätze für Martingale

Im Folgenden sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein W'Raum, $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Filtration und $\mathfrak{F}_\infty := \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_n)$.

Definition 9.1 Sei X_1, \dots, X_n eine Folge von ZV und $-\infty < a < b < \infty$.

$U_n[a, b]$ sei die **Anzahl der aufsteigenden Überschreitungen** des Intervalls $[a, b]$ durch X_1, \dots, X_n also

$$U_n[a, b] = \max\{k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \mid \exists \text{ Indizes } 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k} \leq n \text{ mit } X_{i_{2j-1}} \leq a, b \leq X_{i_{2j}} \text{ für } j = 1, \dots, k\}$$

Bemerkung 9.1 Wegen

$$\{U_n[a, b] \geq k\} = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2k} \leq n} \bigcap_{j=1}^k \{X_{i_{2j-1}} \leq a\} \cap \{X_{i_{2j}} \geq b\} \in \mathfrak{F}_n$$

ist $U_n[a, b]$ eine ZV.

Lemma 9.1 Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Supermartingal. Dann gilt:

$$EU_n[a, b] \leq \frac{1}{b-a} E(X_n - a)^-$$

Beweis

Sei $p := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, $\tau_0 \equiv 1$ und für $k = 1, \dots, p$:

$$\tau_{2k-1} := \min\{j \geq \tau_{2k-2} \mid X_j \leq a\} \wedge n$$

$$\tau_{2k} := \min\{j \geq \tau_{2k-1} \mid X_j \geq b\} \wedge n$$

Die (τ_k) sind Stoppzeiten mit $1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{2p} = n$ und

falls $\tau_{2k-1} < n$, ist $\tau_{2k-1} < \tau_{2k}$.

Sei $k_0 := U_n[a, b]$, d.h. $X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}} \geq b - a$ für $k = 1, \dots, k_0$

$$X_{\tau_{2k_0+2}} - X_{\tau_{2k_0+1}} \neq 0 \implies X_{\tau_{2k_0+1}} \leq a, X_{\tau_{2k_0+2}} = X_n$$

$$\implies X_{\tau_{2k_0+2}} - X_{\tau_{2k_0+1}} \geq X_n - a \geq \min\{X_n - a, 0\} = -(X_n - a)^-$$

$$\implies \sum_{k=1}^p (X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}}) \geq (b-a) \cdot U_n[a, b] - (X_n - a)^-$$

Wir zeigen jetzt: $E(X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}}) \leq 0$.

Sei $c_j := \mathbf{1}_{\{\tau_{2k-1} < j \leq \tau_{2k}\}}$. $(c_j)_{j \geq 2}$ ist vorhersehbar.

$$\{c_j = 1\} = \{\tau_{2k-1} \leq j-1\} \cap \{\tau_{2k} \leq j-1\}^C \in \mathfrak{F}_{j-1}$$

Sei $Y_n = X_1 + \sum_{j=2}^n c_j (X_j - X_{j-1})$, $n \in \mathbb{N}$; $Y_1 := X_1$.

Satz 8.4 $\implies (Y_n)$ ist ein Supermartingal.

$$\begin{aligned}
\implies EY_n &= E[X_1 + \sum_{j=1}^n c_j(X_j - X_{j-1})] \\
&= EX_1 + \underbrace{E[X_{T_{2k}} - X_{T_{2k-1}}]}_{\leq 0} \\
&\leq EY_1 = EX_1
\end{aligned}$$

\implies Beh. ■

Satz 9.1 (Vorwärtskonvergenzsatz von Doob)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Supermartingal mit der Eigenschaft $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{E|X_n|\} < \infty$.

Dann existiert eine \mathfrak{F}_∞ ¹-messbare Zufallsvariable X_∞ mit $E|X_\infty| < \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty$ P -f.s.

Beweis

Sei $N := \{\omega \in \Omega \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} \{X_n(\omega)\} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n(\omega)\}\}$ und

$U_\infty[a, b] := \lim_{n \rightarrow \infty} \{U_n[a, b]\}$ (existiert, da $U_n[a, b]$ wachsend)

$\implies N = \cup_{a, b \in \mathbb{Q}, a < b} \{\omega \in \Omega \mid U_\infty[a, b](\omega) = \infty\}$

Lemma 9.1 $\implies (b - a)EU_n[a, b] \leq E(X_n - a)^- \leq |a| + E|X_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Mit der Voraussetzung und monotoner Konvergenz: $EU_\infty[a, b] < \infty$.

$\implies P(U_\infty[a, b] = \infty) = 0 \implies P(N) = 0$, da N abzählbare Vereinigung von P -Nullmengen. Außerdem: $N \in \mathfrak{F}_\infty$.

Sei $\tilde{X}_\infty(\omega) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \{X_n(\omega)\} & \omega \in N^C \text{ (evtl. } \tilde{X}_\infty(\omega) = \infty) \\ 0 & \omega \in N \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\implies E|\tilde{X}_\infty| &= E\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \{|X_n|\}\right] \\
&\stackrel{\text{Lem. von Fatou}}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{E|X_n|\} \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{E|X_n|\} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Sei $\tilde{N} := \{\omega \in \Omega \mid \tilde{X}_\infty \in \{-\infty, \infty\}\} \implies P(\tilde{N}) = 0$

folgt $X_\infty := \tilde{X}_\infty \cdot \mathbf{1}_{\tilde{N}^C}$ erfüllt die Bedingung. ■

Bemerkung

(i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{E|X_n|\} < \infty$ heißt **L^1 -beschränkt**.

(ii) Bei Supermartingalen folgt die L^1 -Beschränktheit aus $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{EX_n^-\} < \infty$, also z.B. falls $X_n \geq 0$.

¹ $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_n)$

Beispiel 9.1 (Verzweigungsprozesse)

Es sei $\{Y_{nk} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von unabhängigen und identisch verteilten \mathbb{N}_0 -wertigen Zufallsvariablen.

$$P_j := P(Y_{nk} = j) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$$

Sei (Z_n) definiert durch

$$Z_1 := 1, \quad Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} Y_{nk} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \mu := \sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$$

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(\{Y_{mk} \mid k \in \mathbb{N}, m \leq n-1\})$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] &= E\left[\sum_{k=1}^{Z_n} Y_{nk} \mid \mathfrak{F}_n\right] \\ &= E\left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^l Y_{nk}\right) \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \mid \mathfrak{F}_n\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{E\left[\sum_{k=1}^l Y_{nk} \mid \mathfrak{F}_n\right]}_{=E[\sum_{k=1}^l Y_{nk}]} \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot \mu \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} = \mu \cdot Z_n \end{aligned}$$

Sei $X_n := \frac{Z_n}{\mu^n} \implies (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Martingal.

Insbesondere gilt:

$$EZ_n = \mu^n \cdot EX_n = \mu^n EX_1 = \mu^{n-1} EZ_1 = \mu^{n-1} \quad (*)$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist L^1 -beschränkt, da $E|X_n| = EX_n = \frac{1}{\mu} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 9.1 $\implies \exists X_\infty$ mit $X_n \rightarrow X_\infty$ P -f.s. .

Falls $\mu < 1$: $\xrightarrow{(*)} P(Z_n \geq \epsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \implies X_\infty \equiv 0$

Falls $\mu = 1$: X_n ganzzahlig \implies Folge irgendwann konstant. Wenn $P_1 \neq 1 \implies X_\infty \equiv 0$

Falls $\mu > 1$: X_∞ ist nicht degeneriert. $P(X_\infty = 0)$ ist Lösung von $g(z) = z$, wobei g erzeugende Funktion von Y ist.

Stichwortverzeichnis

- L^1 -beschränkt, 86
- L^p -Ungleichung, 72
- μ -Dichte, 19
- μ -Integral, 7, 10, 11
- μ -Nullmenge, 18
- μ -fast überall, 18
- μ -integrierbar
 - p -fach, 22
- μ -stetig, 19
- σ -Algebra
 - der τ -Vergangenheit, 74
 - Produkt-, 25
- d -dimensionale Normalverteilung, 58
- p -fach μ -integrierbar, 22

- abzählendes Maß, 6
- adaptiert, 71
- algebraische Induktion, 18

- bedingte Dichte, 67
- bedingter Erwartungswert, 61, 62, 66
- beschränkt
 - L^1 -, 86
 - L^p -, 73
- Bildmaß, 16
- Borel-Cantelli Lemma, 37

- charakteristische Funktion, 41
- charakteristische Funktion (Zufallsvektor), 57
- Continuous Mapping Theorem, 46
- Darstellungssatz von Skorohod, 45
- Dirac-Maß, 5

- Eindeutigkeitssatz für Maße, 6
- Einpunktmaß, 5
- Eintrittszeit, 74
- Elementarfunktion, 7

- Erlang-Verteilung, 34
- Erwartungswert
 - bedingt, 61, 66
 - Version des bedingten, 62
- Erwartungswert (Zufallsvektor), 57

- Faktorisierungssatz, 65
- Faltung, 34
- fast überall, 18
- Filtration, 71

- Gamma-Verteilung, 34
- gemeinsame Verteilung, 31
- gestoppter Prozess, 75
- Gumbelverteilung, 55

- Höldersche Ungleichung, 22

- Jensensche Ungleichung, 21

- Kern, 66
- Konvergenz
 - in Verteilung, 45
 - schwache, 45
- konvex, 21
- Koppelung, 66
- Kovarianzmatrix, 57

- Lebesgue-Maß, 6
- Lebesgue-Stieltjes-Maß, 6
- Lemma
 - Borel-Cantelli, 37
 - von Fatou, 15
- Lindeberg-Bedingung, 49

- Maß
 - Produkt-, 27
- Martingal, 71
- Sub-, 71

- Super-, 71
- Maß, 5
 - σ -endlich, 5
 - endlich, 5
 - Lebesgue-Stieltjes, 6
- Maß mit Dichte, 19
- maßdefinierende Funktion, 6
- Maßraum, 5
- Maßtransport, 16
- Minkowskische Ungleichung, 22
- Normalverteilung
 - d -dimensionale, 58
- Nullmenge, 18
- Optional Stopping Theorem, 77
- Ordnungsstatistik, 35
- OST, 77
- Produkt- σ -Algebra, 25
- Produktmaß, 27
- Projektion, 25
- Prozess
 - gestoppter, 75
- quasi-integrierbar, 11
- Randdichte, 34
- Satz
 - Faktorisierungs-, 65
 - Integration bezüglich des Bildmaßes, 17
 - Transformations-, 17, 33
 - Transformationssatz, 32
 - von der majorisierten Konvergenz, 15
 - von Doob, 72
 - von Helly, 47
 - von Lebesgue, 15
 - von Radon-Nikodym, 20
- schwache Konvergenz, 45
- Snell-Einhüllende, 80
- Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen, 48
- stochastisch unabhängig, 31
- stochastischer Prozess, 71
- Stoppzeit, 74
- straff, 47
- Submartingal, 71
- Submartingal-Ungleichung, 72
- Supermartingal, 71
- Theorem
 - Optional Stopping-, 77
- Transformationssatz, 17
- Übergangskern, 66
- unabhängig
 - stochastisch, 31
- Ungleichung
 - L^p -, 72
 - Höldersche, 22
 - Jensensche, 21
 - Minkowskische, 22
 - Submartingal-, 72
- Verteilung
 - Erlang-, 34
 - Gamma-, 34
 - gemeinsame, 31
 - Gumbel, 55
- Verteilungskonvergenz, 57
- Wahrscheinlichkeitsmaß
 - straffes, 47
- Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy, 49
- Zufallsgröße, 7
- Zufallsvariable, 7
- Zylindermengen, 25