

# Kapitel 11

## Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X_1, X_2, \dots \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen. "Konvergenz" der Folge  $\{X_n\}$  kann man auf verschiedene Weise definieren.

### Definition 11.1

a)  $X_n$  konvergiert ***P-fast sicher (P-f.s.)*** gegen  $X$

Schreibweise:  $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ , wenn gilt:

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

b)  $X_n$  konvergiert ***in Wahrscheinlichkeit (stochastisch)*** gegen  $X$

Schreibweise:  $X_n \xrightarrow{P} X$ , wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

c)  $X_n$  konvergiert ***in Verteilung*** gegen  $X$

Schreibweise:  $X_n \xrightarrow{d} X$ , wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{an denen } F_X(x) \text{ stetig ist}$$

### Beispiel 11.1

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten (u.i.v.) Zufallsvariablen mit  $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$  ( $\Rightarrow EX_n = 0$ )

Mit der Ungleichung von Tschebyscheff (Satz 7.4) folgt:

$$P\left(\left|\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n X_i - 0\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Also:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 0$$

**Satz 11.1**

Fast sichere Konvergenz impliziert die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

**Beweis**

Sei  $X_n \xrightarrow{fs} X$  und  $N := \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \not\rightarrow X(\omega)\}$  also  $P(N) = 0$   
 Sei  $\varepsilon > 0$  und für  $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{\omega \in \Omega \mid \sup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Es gilt  $A_n \downarrow$  und  $\omega \in A_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

Also:

$$A_n \downarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m =: N_\varepsilon \subset \{\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset N$$

Da  $P$  stetig von oben folgt:

$$0 \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(N_\varepsilon) \leq P(N) = 0$$

**Bemerkung 11.1**

Die Umkehrung von Satz 11.1 gilt nicht.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, \text{Unif}(0, 1))$

(Hier fehlen Skizzen, die  $X_1, X_2, \dots$  beschreiben.)

Offenbar  $P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ existiert}\}) = 0$

aber  $P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - 0| \geq \varepsilon\}) = P(X_n = 1) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

Das heißt :  $X_n \xrightarrow{P} 0$  aber  $X_n \not\xrightarrow{fs} 0$

**Satz 11.2**

Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert Konvergenz in Verteilung.

**Beweis**

Vorüberlegung:  $P(A) = P(AB) + P(AB^c) \leq P(AB) + P(B^c)$

$$\Rightarrow P(AB) \geq P(A) - P(B^c) \quad (*)$$

Sei  $X_n \xrightarrow{P} X$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\{\omega \mid X_n(\omega) \leq x\} \supset \{\omega \mid X(\omega) \leq x - \varepsilon, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

$$\text{da } X_n = X + X_n - X \leq X + |X_n - X| \leq x - \varepsilon + \varepsilon = x$$

Also:

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \geq P(\underbrace{X \leq x - \varepsilon}_A, \underbrace{|X_n - X| < \varepsilon}_B) \\ &\Rightarrow F_{X_n}(x) \geq \underbrace{P(X \leq x - \varepsilon)}_{F_X(x - \varepsilon)} - P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= P(X_n \leq x, |X_n - X| < \varepsilon) + P(X_n \leq x, |X_n - X| \geq \varepsilon) \\ &\leq \underbrace{P(X \leq x + \varepsilon)}_{=F_X(x+\varepsilon)} + P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$F_X(x - \varepsilon) - P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt:

$$F_X(x - \varepsilon) - 0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + 0$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $x$  ist Stetigkeitsstelle von  $F_X$ ) folgt die Behauptung.

### Bemerkung 11.2

Die Umkehrung von Satz 11.2 gilt nicht:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$$

$X(\omega) = 1, \quad X(\omega_2) = -1$ . Also:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} = F_{-X}(x)$$

Sei  $X_n := (-1)^n X \Rightarrow F_{X_n} = F_X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

Aber  $(X_n)$  konvergiert nicht in Wahrscheinlichkeit.

$$X_{2n} = X \xrightarrow{P} X, \quad X_{2n+1} = -X \xrightarrow{P} -X \quad \text{und} \quad P(X = -X) = 0$$

Insgesamt:

$$\boxed{X_n \xrightarrow{fs} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X}$$

### Lemma 11.3

Konvergenz in Verteilung gegen eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  impliziert Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, das heißt:

$$X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$$

**Beweis**

Übung

