Kapitel 9

Unabhängige Zufallsvariablen

Die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen wird auf die Unabhängigkeit von Ereignissen zurückgeführt. Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 9.1

a) *Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ heißen* ***unabhängig****, falls:*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i), \text{ d.h.}$$

$$P(\underbrace{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}) = \prod_{i=1}^{n} P(\underbrace{X_i \leq x_i}_{A_i}) \qquad \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

b) *Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine (unendliche) Folge von Zufallsvariablen. $X_1, X_2, \ldots$ heißen unabhängig, falls jede endliche Teilfolge $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ aus unabhängigen Zufallsvariablen besteht.*

Satz 9.1 *Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sind genau dann unabhängig, wenn $\forall\, B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}$ gilt:*

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i) \text{ bzw. } P_X(B_1 \times \cdots \times B_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(B_i)$$

d.h. die gemeinsame Verteilung ist das Produkt der einzelnen Randverteilungen.

Beweis

"$\Leftarrow$" setze $B_i = (-\infty, x_i], \quad i = 1, \ldots, n$

"$\Rightarrow$" Folgt aus Satz 4.4 und Übung $(\{(-\infty, x_i] \times \cdots \times (-\infty, x_n]\,, x_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\})$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

Beispiel 9.1 Wir betrachten die mehrstufigen Zufallsexperimente aus §8.1. Es sei $\Omega, \mathcal{A}$ wie in §8.1 und

$$P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n) \text{ für } A_i \in \mathcal{A}_i \quad i = 1, \ldots, n$$

das sogenannte Produktmaß.
Durch die Festlegung auf den Rechteckmengen ist es auf ganz $\mathcal{A}$ eindeutig bestimmt (Satz 4.4). Weiter sei $X_i(\omega) = X_i\big((\omega_1, \ldots, \omega_n)\big) = \omega_i$ die i-te Projektion, $i = 1, \ldots, n$. Dann sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, da

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(A_1 \times \cdots \times A_n) &= \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A) \end{aligned}$$

Satz 9.2 *Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Zufallsvektor.*

a) Ist X diskret mit $P(X \in C) = 1$, $C \in \mathbb{R}^n$ abzählbar, dann sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, genau dann wenn:

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) \quad \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

b) Ist X absolut stetig, so sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, genau dann wenn

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \quad \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \backslash B$$

wobei B "eine kleinere Menge" ist (vom Lebesgue-Maß 0). D.h. die gemeinsame Dichte ist das Produkt der Randdichten.

Beispiel 9.2 Sei $X = (X_1, X_2)$ ein absolutstetiger Zufallsvektor mit Dichte

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x_1^2 - 2\varrho x_1 x_2 + x_2^2}{1-\varrho^2}\right) \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ für } \varrho \in [0, 1)$$

Dies ist ein Spezialfall von Beispiel 8.4 mit $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = \varrho$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$
Randdichte $f_{X_1}(x_1)$ von X_1:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x_1^2\,(1-\varrho^2)}{1-\varrho^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_2 - \varrho x_1)^2}{1-\varrho^2}\right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du}_{=\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) \quad \big(\text{also } X_1 \sim N(0,1)\big) \end{aligned}$$

$$\text{Analog:} \quad f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) \quad (\text{also } X_2 \sim N(0,1))$$

das heißt die Randverteilungen sind für alle ϱ Standardverteilungen. X_1, X_2 sind unabhängig $\Leftrightarrow$ $\varrho = 0$. Für $\varrho \neq 0$: $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$

Bemerkung 9.1 Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $n_1 + \cdots + n_k = n \quad n_i \in \mathbb{N}\ \varphi_i \in \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ messbar, $i = 1, \ldots, k$, dann sind auch die Zufallsvariablen $\varphi_1(X_1, \ldots, X_{n_1}), \varphi_2(X_{n_1+1}, \ldots, X_{n_1+n_2}), \ldots, \varphi_k(X_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}, \ldots, X_n)$ unabhängig.

Beispiel 9.3 Es gibt 2 Spieler. Spieler 1 denkt sich zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ aus. Eine faire Münze entscheidet, ob a oder b aufgedeckt wird. Spieler 2 muss raten, ob die verdeckte Zahl größer oder kleiner als die aufgedeckte Zahl ist.
Intuition: Wahrscheinlichkeit richtig zu raten $= \frac{1}{2}$
Es geht besser: Spieler 2 generiert eine Zahl c zufällig $C \sim N(0,1)$
Entscheidung: c und die aufgedeckte Zahl werden verglichen.
Mathematisches Modell:
$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ mit $\Omega_1 = \{a, b\}, \mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega), P_1(\{a\}) = P_1(\{b\}) = \frac{1}{2}$
Sei $M : \Omega_1 \to \{a, b\}$, $M(a) = a$, $M(b) = b$ die Zufallsvariablen, die das Ergebnis des Münzwurfes beschreibt.
$(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ mit $\Omega_2 = \mathbb{R}, \mathcal{A}_2 = \mathfrak{B}, P_2(B) = \int_B \varphi_{0,1}(x)\,dx$
$C : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, $C(\omega) = \omega$.
Wichtig: M und C sind unabhängig. Sei o.B.d.A. $a < b$. Wir betrachten den Produktraum mit dem Produktmaß
$P = P_1 \otimes P_2$. Es sei G das Ereignis, dass Spieler 2 richtig rät.

$$P(G|M = a) = \frac{P(G, M = a)}{P(M = a)} = \frac{P(C > a, M = a)}{P(M = a)} \overset{C,M \text{ unabh.}}{=} \frac{P(C > a)P(M = a)}{P(M = a)}$$

$$\text{Analog: } P(G|M = b) = P(C \leq b)$$

$$P(G) = P(G|M = a)\frac{1}{2} + P(G|M = b)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(P(c > a) + P(c \leq b)) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \Phi(a) + \Phi(b)) = \frac{1}{2}(1 + \underbrace{\Phi(b) - \Phi(a)}_{>0}) > \frac{1}{2}$$

Satz 9.3 *Sei $X = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein absolutstetiger Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte f_X. Dann ist auch die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ absolutstetig und ihre Dichte ist gegeben durch:*

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y, x - y)\,dy \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Falls die Zufallsvariable X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt insbesondere die sog. ***Faltungsformel***

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y) \cdot f_{X_2}(x - y)\,dy \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 9.2
Sind X und Y unabhängig, so schreibt man

$$P_{X+Y} = P_X * P_Y$$

und nennt $P_X * P_Y$ **Faltung**

Beweis
Zwischen Verteilungsfunktion und Dichte gibt es eine eindeutige Zuordnung. Also genügt es zu zeigen:

$$P(X_1 + X_2 \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y, x-y)\, dydx$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y, x-y)\, dydx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f_X(y, x-y)\, dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_X(y, u)\, dudx \\
&= \int_{\{(u,y)\in\mathbb{R}^2 | u+y\leq z\}} f_X(y, u)\, dudy \\
&= P_X(\{(u, y) \in \mathbb{R}^2 | u + y \leq z\}) = P(X_1 + X_2 \leq z)
\end{aligned}$$

Die Faltungsformel ergibt sich mit Satz 9.1.b).

Beispiel 9.4 Ist $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ und X_1, X_2 unabhängig so gilt:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

d.h. die Normalverteilung ist **faltungsstabil**.

Satz 9.4 *Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten, so existiert auch der Erwartungswert von $X \cdot Y$ und es gilt:*

$$EX \cdot Y = EX \cdot EY$$

Beweis
Wir betrachten für den Beweis nur den Fall, dass (X,Y) diskret ist. (Zähldichte)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_k y_j| P(X = x_k, Y = y_j) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_k y_j| P(X = x_k) P(Y = y_j) \\
&= \underbrace{(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(X = x_k))}_{<\infty \text{ nach Vor.}} \underbrace{(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(Y = y_j))}_{<\infty \text{ nach Vor.}} < \infty
\end{aligned}$$

Also existiert EXY. Gleiche Rechnung ohne Betragsstriche ergibt $EXY = EX \cdot EY$. Im Allgemeinen folgt die Existenz von EXY nicht aus der Existenz von EX und EY.

Satz 9.5 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) *Es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment, so existiert auch EXY und es gilt:*

$$(EXY)^2 \leq EX^2 EY^2$$

Beweis

Es gilt: $|X \cdot Y(\omega)| = |X(\omega)||Y(\omega)| \overset{da (X-Y)^2>0}{\leq} X^2(\omega) + Y^2(\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega$
Aus der Voraussetzung und Satz 7.2.b) folgt die Existenz von EXY. Außerdem folgt mit Satz 7.2 die Existenz von $E(X + aY)^2 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$
Es gilt: $0 \leq E(X + aY)^2 = EX^2 + a^2EY^2 + 2aEXY \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

1.Fall: $EY^2 = 0 \Rightarrow EXY = 0$, da die rechte Seite eine Gerade in a ist.
$\Rightarrow$ Ungleichung gilt.

2.Fall: $EY^2 \neq 0$: Rechte Seite wird minimal bei $a^* = -\frac{EXY}{EY^2}$
Minimal-Stelle einsetzen ergibt: $\frac{1}{EY^2}(EX^2EY^2 - (EXY)^2) \geq 0$
$\Rightarrow$ Ungleichung gilt.

Definition 9.2 *Es seien X,Y Zufallsvariablen mit $EX^2 < \infty$, $EY^2 < \infty$.*

a) Dann heißt $\operatorname{Cov}(X, Y) := E[(X - EX)(Y - EY)]$ *die **Kovarianz** von X und Y. Ist* $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$*, so nennt man X und Y **unkorreliert**.*

b) Ist $\operatorname{Var}(X) \cdot \operatorname{Var}(Y) > 0$*, so heißt*

$$\varrho(X, Y) := \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) \operatorname{Var}(Y)}}$$

*der **Korrelationskoeffizient** von X und Y.*

Satz 9.6 *Seien X,Y Zufallsvariablen mit $EX^2 < \infty$, $EY^2 < \infty$. Dann gilt:*

a) $\operatorname{Cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY$

b) Sind X und Y unabhängig, so auch unkorreliert.

c) Ist $\varrho(X, Y)$ erfüllt, so gilt: $-1 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$

Beweis

a) Es gilt: $\operatorname{Cov}(X, Y) = E[XY - XEY - YEX + EX \cdot EY] = EXY - EXEY$

b) folgt aus a) und Satz 9.4

c) Mit Satz 9.5 folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) \operatorname{Var}(Y) \varrho^2(X, Y) = (E[(X-EX)(Y-EY)])^2 &\leq E(X-EX)^2 E(Y-EY)^2 \\ &= \operatorname{Var}(X) \operatorname{Var}(Y)\end{aligned}$$

Bemerkung 9.3

a) Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die lineare Abhängigkeit der zwei Zufallsvariablen. Betrachte den Extremfall $Y = aX + b$ mit $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(aX + b - aEX - b)] = a \operatorname{Var}(X)$. und

$$\varrho(X, Y) = \frac{a \operatorname{Var}(X)}{\sqrt{a^2 \operatorname{Var}^2(X)}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

b) Es gibt Zufallsvariablen, die unkorreliert, aber nicht stochastisch unabhängig sind.
Es sei z.B. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

ω	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
ω_1	$\frac{1}{3}$	0	-1	0
ω_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0
ω_3	$\frac{1}{3}$	0	1	0

Es gilt: $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0 - 0 = 0$ unkorreliert, aber $P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{3}$
$P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{3} = P(X = 0, Y = 1)$ sind <u>nicht</u> unabhängig.

c) Es gilt: $\operatorname{Cov}(X, X) = \operatorname{Var}(X)$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(Y, X)$

Satz 9.7
Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment, so gilt:

$$\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_1) + 2 \sum_{1 \le i,j \le n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

Sind die Zufallsvariablen unabhängig (oder unkorreliert), so gilt:

$$\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)$$

Beweis
Mit Satz 7.2 gilt:

$$\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)\right)^2 = E \sum_{1 \le i,j \le n} (X_i - EX_i)(X_j - EX_j)$$

$$= \sum_{1 \le i,j \le n}^{n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

Der zweite Teil aus Satz 9.6 b)

Definition 9.3
Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Zufallsvektor mit $EX_i^2 < \infty$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$

*a) $EX = (EX_1, \ldots, EX_n)$ heißt **Erwartungswertvektor von X**.*

b) Die $n \times n$-Matrix $\operatorname{Cov} X = (\operatorname{Cov}(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le n}$
*heißt **Kovarianzmatrix von X**.*