# Grundlagen

**$\sigma$-Algebren**
$\mathfrak{A}$ ist $\sigma$-Algebra, gdw.:
$\Omega \in \mathfrak{A}$, $A^c \in \mathfrak{A}$, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

**Mengengrenzwerte**
unendlich viele:
$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$
alle bis auf endlich viele:
$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

**Wahrscheinlichkeitsmaß**
$0 \le P(\omega) \le 1$
$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
$P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$
$P(A^c) = 1 - P(A)$
$A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

**Siebformel**
$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 \cdots < i_k \le n} P(A_{i1} \cap \dots \cap A_{ik})$$
Also:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Bedingte Wahrscheinlichkeiten**
$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
$B_i$ seien eine Partition:
$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$
*Satz v. Bayes:*
$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$

# Diskrete Verteilungen

**Gleichverteilung**
$P(X = x_i) = p_X(x_i) = \frac{1}{n}$ $(i = 1, \dots, n)$ $EX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \right)$

**Binomialverteilung**
$X \sim B(n,p)$
$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$$F_X(x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$EX = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
$g_X(s) = (1 - p + sp)^n$

**neg. Binomialverteilung**
$X \sim NegB(n,p)$
$p_X(k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$
$$F_X(x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$EX = \frac{n}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = n \frac{(1-p)}{p^2}$

**Hypergeometrische Verteilung**
W'keit, bei $m$ Versuchen ohne Zurücklegen von $n$ s/w-Kugeln $k$ der $r$ weißen zu ziehen.
$X \sim \mathrm{Hypergeom}(n, r, m)$
$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$
$EX = \frac{rm}{n}$
$\mathrm{Var}(X) = \frac{rm}{n} (1 - \frac{r}{n}) (\frac{n-m}{n-1})$

**Geometrische Verteilung**
W'keit beim $k$-ten Versuch den 1. Treffer zu bekommen, $p$ Trefferw'keit. $p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$
$EX = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

**Poisson-Verteilung**
$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ Approximation der Binomialvert. mit $\lambda = np$
$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k = 0, \dots)$
$EX = \mathrm{Var}(X) = \lambda$
$g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ $X \sim \mathrm{Po}(\lambda_0), Y \sim \mathrm{Po}(\lambda_1) \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Po}(\lambda_0 + \lambda_1)$

# Stetige Verteilungen

**Gleichverteilung**
$X \sim U(a,b)$
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ auf $(a,b)$
$EX = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

**Exponentialverteilung**
$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \lambda > 0$
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$EX = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
*Gedächtnislosigkeit:* $P(X \ge t | X \ge s) = P(X \ge t - s)$ $(0 < s < t)$

**Normalverteilung**
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$
$EX = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}y$$
$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
$\Phi^{-1}(x) = -\Phi^{-1}(1-x)$
$EX = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\Rightarrow Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
*Standardnormalverteilung:*
$\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$
*Faltungsstabil:*
$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
$X \sim N(0,1)$ :
$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
$\varphi_X'(t) = -t \varphi_X(t)$

**Gammaverteilung**
$X \sim G(\alpha, \lambda)$
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$
wobei $\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t$
$EX = \frac{\alpha}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
$X \sim G(\alpha, \lambda_1), Y \sim G(\alpha, \lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim G(\alpha, \lambda_1 + \lambda_2)$
für $\alpha = 1$ erhält man die Exponentialverteilung.

# Formeln

**Erwartungswert**
(Existenz falls mit $|\cdot|$ noch $< \infty$)
*diskret:* $EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_X(k)$
$Eg(X) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) P_X(k)$
*stetig:* $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$
$E(aX + bY) = aEX + bEY$
Falls $X_i$ unkorreliert:
$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$
*Erwartungsvektor:*
$X = (X_1, \dots, X_n)$ ZV, $EX_i^2 < \infty$ :
$EX := (EX_1, \dots, EX_n)$
*Cauchy-Schwarze Ungleichung:*
$\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) ex.$
$\Rightarrow (EXY)^2 \le EX^2 EY^2$

**Varianz**
$\mathrm{Var}(X) := E((X - EX)^2) = EX^2 - (EX)^2 \ge 0$
Daher auch:
$EX^2 = \mathrm{Var}(X) + (EX)^2$
$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$
Falls $X_i$ nicht unkorreliert:
$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
Falls $X_i$ unkorreliert:
$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$
*Standardabweichung:*
$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

**Urnenmodell**
Mit Zurückl., mit Reihenflg. (k unterscheidbare Objekte mit Mehrfachbel. auf n Fächer): $n^k$
Mit Zurückl., ohne Reihenflg. (nicht untersch. O., mit Mehrfachbel.) : $\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Zurückl., mit Reihenflg. (untersch. O., ohne Mehfachbel.): $\frac{n!}{(n-k)!}$
Ohne Zurückl., ohne Reihenflg. (nicht untersch. O., ohne Mehrfachbel.): $\binom{n}{k}$

**Tschebyscheff Ungleichung**
$P(|X - EX| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}(X)$

**Faltungsformel**
$(X, Y)$ abs stetige ZV, mit gem Dichte $f_{XY} \Rightarrow Z := X + Y$ ist abs stetige ZV mit Dichte:
$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, x - t) dt$
$X, Y$ unabh $\Rightarrow$ Faltungsformel:
$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$

**Unabhängingkeit von ZV**
*Def.:*
$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod F_{X_i}(x_i)$
gdw. bis auf eine Nullmenge:
$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod f_{X_i}(x_i)$
*Sätze:*
$X, Y$ unabh. $\Rightarrow EXY = EXEY$
$X_1, \dots, X_n$ unabh
$\Rightarrow \mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$

**Kovarianz**
$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$
$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{Cov}(aX + bY, Z)$
$= a \,\mathrm{Cov}(X,Z) + b \,\mathrm{Cov}(Y,Z)$
$= \mathrm{Cov}(Z, aX + bY)$
$X, Y$ *unkorreliert:* gdw.
$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
$X, Y$ unabh. $\Rightarrow X, Y$ unkorr.
*Kovarianzmatrix:*
$X = (X_1, \dots, X_n) \Rightarrow \mathrm{Cov}(X) := (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,\dots,n}$
*Korrelationskoeffizient:* Ist $\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y) > 0$ so gilt:
$$\left| \rho(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \right| \le 1$$

**Erzeugende Fkt (diskret)**
$g_X : [-1, 1] \to R$
$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) s^k = Es^X$
$g_X(1) = 1, p_X(k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$
$EX = g_X'(1^-)$, $\mathrm{Var}(X) = g_X''(1^-) + g_X'(1^-) - (g_X'(1^-))^2$
$X, Y$ unabh, diskret
$\Rightarrow g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_Y(s)$

# Konvergenzbegriff für ZV

**P-fast sicher**
$X_n \xrightarrow{f.s} X$ wenn:
$P(\{\omega \in \Omega | \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

**in Wahrs'keit, stochastisch**
$X_n \xrightarrow{P} X$ wenn, $\forall \varepsilon > 0$
$\lim_{n \to \infty} P(\{\omega \in \Omega \Big| |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}) = 0$

**in Verteilung**
$X_n \xrightarrow{d} X$ wenn $\forall x$ mit $F_X$ stetig:
$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

**Implikationen**
f.s. $\Rightarrow$ in Wahrs'keit
in Wahrs'keit $\Rightarrow$ in Verteilung
in Verteilung gegen eine Konstante $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ in Wahrs'keit

# Grenzwertsätze

**Kolmogorov**
(Starkes Gesetz der großen Zahlen)
$X_i$ unabh. und identisch vert,
$E|X_1| < \infty$: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{f.s.} EX_1$

**Zentraler Grenzwertsatz**
$X_i$ u.i.v., $E|X_1| < \infty$,
$0 < \mathrm{Var}(X_1) < \infty$: für $n \to \infty$ gilt:
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot EX_1}{\sqrt{n \cdot \mathrm{Var}(X_1)}} \xrightarrow{d} X \sim \mathcal{N}(0,1)$$
also
$$P\left( \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nEX_1}{\sqrt{n \cdot \mathrm{Var}(X_1)}} \le x \right) \to \Phi(x)$$

**Zweiseitiger Grenzwertsatz**
Gleiche Voraussetzungen wie oben:
$$P\left( a \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot EX_1}{\sqrt{n \cdot \mathrm{Var}(X_1)}} \le b \right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

# Charkteristische Funktion

$X$ ZV, $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$\varphi_X(t) := Ee^{itX} = E\cos(tX) + iE\sin(tX)$
$X$ diskret $\Rightarrow \varphi_X(t) = g_X(e^{it})$
$X$ abs stetig
$\Rightarrow \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx$
$\varphi_X(0) = 1$ $|\varphi_X(t)| \le 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$
$a, b \in \mathbb{R}$:
$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$ $\varphi_X(t)$ ist glm stetig auf $\mathbb{R}$
$X, Y$ unabh ZV
$\Rightarrow \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$
$E|X|^n < \infty$, $n \in N \Rightarrow \varphi_X$ $n$-mal db
und: $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n EX^n$
$X, Y$ ZV mit gleicher char Fkt, so auch gleiche Verteilung.
$(X_n)$ Folge von ZV mit $F_{X_n}(x)$ und $\varphi_{X_n}(t)$ so ist äquivalent:
$X_n \xrightarrow{d} X$
$\varphi_{X_n}(t) \to \varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ und $\varphi$ stetig in 0

# Parameterschätzung

**Defnitionen**
*Stichprobenmittel:* $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
*Stichprobenvarianz:*
$S^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

**Maximum-Likelihood-Methode**
*Likelihood-Funktion:*
$L_x(\theta) = f_\theta(x_1) \cdot \dots \cdot f_\theta(x_n)$bzw.
$L_x(\theta) = p_\theta(x_1) \cdot \dots \cdot p_\theta(x_n)$
*Maximum-Likelihood-Schätzer*
*MLS:* bei welchen $\theta$ ist $L_x$ maximal.
Oft einfacher: $\ln L_x(\theta)$ maximieren.
$(\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$, $\ln \prod = \sum \ln)$

**Momentenmethode**
Pro zu schätzenden Parameter ein empirisches Moment mit dem der Verteilung gleichsetzen. Also:
$\mu_k(\theta) = \mathrm{E}_\theta X^k \stackrel{!}{=} \overline{x}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k$

**Eigenschaften**
*Erwartungstreu:* $E_\theta T(X) = \theta$
$ET$ hat i.A. nix mit $EX$ zu tun!
*Bias:* $b_T(\theta) := E_\theta T(X) - \theta$
*Mittlerer Quadratischer Fehler:*
$\mathrm{MSE}(T) := E_\theta (T(x) - \theta)^2$
unbiasd: $\mathrm{MSE}(T) = \mathrm{Var}_\theta(T)$

**Fisher-Info.**
$I(\theta) := E_\theta \left( \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L_X(\theta) \right)^2 \right)$

**Ungleichung von Cramér-Rao**
$\mathrm{Var}_\theta(T(X)) \ge \frac{(1 + \frac{\partial}{\partial \theta} b_T(\theta))^2}{I(\theta)}$

# Konfidenzintervalle

Gesucht sind ZV $L$ und $U$ mit $L(x) \le U(x)$ und
$P_\theta(L(x) \le \theta \le U(x)) = 1 - \alpha$

# Testtheorie

Überprüfen, ob ein Parameter $\theta$ einer Verteilung in $\Theta_0$ oder $\Theta_1$ $(\Theta_0 + \Theta_1 = \Theta)$ ist.
*Einseitiger Test:*
$H_0 : \theta \le \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$
*Zweiseitiger Test:*
$H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \ne \theta_0$

**Test, Fehler und Güte**
Sei $x \in \chi^n$ eine Stichprobe.
$\varphi : \chi^n \to \{1, 0\}$ heißt *Test:*
Mit $\varphi(x) = 1$ lehnen wir $H_0$ für $x$ ab
*Gütefkt:* $\beta$ gibt W'keit an, mit der $H_0$ wir ablehnen
$\beta(\theta) = P_\theta(\varphi(x) = 1)$
*F. 1. Art:* Test: „$H_1$“ aber $H_0$ wahr.
*F. 2. Art:* Test: „$H_0$“ aber $H_1$ wahr.
*Niveau:* $\alpha \hat{=}$ W'keit für Fehler 1. Art $\le \alpha$. Also: $\beta(\theta) \le \alpha$
Man legt $\alpha$ fest. Also muss der Fehler 1. Art der schlimmere sein (z.B. unwirksames Medikament als wirksam bedacht oder Ham als Spam eingeordnet). Danach erst minimiert man den Fehler 2. Art.
Eselsbrücke: **H**ypothese $H_0 \hat{=}$ **H**am.

**Likelihood-Quotienten Test**
*Likelihood-Quotient:*
$q(x) := \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_x(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L_x(\theta)}$
Test der Form:
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & q(x) > c_0 \\ \gamma, & q(x) = c_0 \\ 1 & q(x) < c_0 \end{cases}$$

**Spezialfall: Neyman-Pearson-T.**
$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & L_x(\theta_1) > c^* L_x(\theta_0) \\ \gamma & L_x(\theta_1) = c^* L_x(\theta_0) \\ 0 & L_x(\theta_1) < c^* L_x(\theta_0) \end{cases}$$

## Hilfreiche Rechenregeln

**Diskrete**
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

**Integrale**
$\int f \cdot g = [f \cdot G] - \int f' \cdot G$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1$

## $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle

**Regenwurmaufgabe**
*Annahme:* Länge d. Regenwurm auf $(0, \theta)$ gleichverteilt. Maximallänge von $n$ Würmern liegt vor. Gebe ein $(1-\alpha)$-KonfInt für d $\theta$ an. *Lösung:* $P_\theta(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \geq x) = 1 - P_\theta(X_1 < x) \cdot \dots \cdot P_\theta(X_n < x) = 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^n = 1 - \alpha \Rightarrow x = \theta \sqrt[n]{\alpha}$.
Somit: $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \geq \theta \sqrt[n]{\alpha} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{\sqrt[n]{\alpha}}$
Konfidenzintervall:
$\left[\max\{X_1, \ldots, X_n\}, \frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{\sqrt[n]{\alpha}}\right]$

**Scriptbeispiel 15.2**
Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit,
$X \sim B(m, \theta), \Theta = [0,1]$ Dann gilt:
$L(x) = \frac{1}{m + (z_{\frac{\alpha}{2}})^2} \cdot$

$$\left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}}\right)$$

$U(x) = \frac{1}{m + (z_{\frac{\alpha}{2}})^2} \cdot$

$$\left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}}\right)$$

wobei $x$ Treffer der Stichprobe,
$z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$.

## Hypothesentest

**Test auf Mittelw, Var bekannt**
$X = (X_1, ..., X_n), X_i \sim P_\mu = N(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0$ bekannt, $\mu \in \Theta = R$.
*Einseitiger Test*

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

mit $\mu_0 \in R$ geg.
Sinnvoller Test:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \overline{x} \leq c \\ 1 & , \quad \overline{x} > c \end{cases}$$

$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. $c \in R$ nun zu bestimmen, sodass Testnivea $\alpha$ eingehalten.
Betrachte $\sqrt{n} \, \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_0}$

$$P_\mu \left(\sqrt{n} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0} \leq x\right) = \Phi(x)$$

$\beta_c(\mu) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{c-\mu}{\sigma_0}\right)$ Es genügt:
$\beta_c(\mu_0) \leq \alpha$

$$\beta_c(\mu_0) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi \underbrace{\left(\sqrt{n} \frac{c - \mu_0}{\sigma_0}\right)}_{= z_{1-\alpha}} \leq \alpha$$

$\Leftrightarrow c \geq \frac{z_{1-\alpha} \, \sigma_0}{\sqrt{n}} + \mu_0 =: c^*$

**Test auf Mittelw, Var unbekannt (sog.t-Test)**
$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$,
$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. $\sigma^2$ ist hier nicht bekannt!
*Einseitiges Testproblem:*
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ für ein festes $\mu_0 \in R$
$X = (X_1, \ldots, X_n)$ Zufallsstichprobe zu $P_{\mu, \sigma^2}$. Dann gilt:
$\sqrt{n} \, \frac{\overline{X} - \mu}{S(X)} \sim t_{n-1}$, wir mussten also im Gegensatz zu oben $\sigma$ durch $S(X)$ ersetzen.
Folgender Test hält $\alpha$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \sqrt{n} \, \frac{\overline{x} - \mu_0}{S(x)} \leq t_{n-1}(1 - \alpha) \\ 1, \ \sqrt{n} \, \frac{\overline{x} - \mu_0}{S(x)} > t_{n-1}(1 - \alpha) \end{cases}$$

*Zweiseitiger Test:*

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Der zugehörige Test ist:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \sqrt{n} \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{S(x)} \right| \leq t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ 1, \ \sqrt{n} \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{S(x)} \right| > t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

**Test auf die Varianz**
$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$,
$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. wie gehabt.

*Einseitiger Test:*
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

Es gilt:

$$P_{\mu, \sigma^2}\left(\frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0^2} \leq x\right) = F_{\chi^2_{n-1}}(x)$$

Folgender Test tut es:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} \leq \chi^2_{n-1}(1 - \alpha) \\ 1, \ \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} > \chi^2_{n-1}(1 - \alpha) \end{cases}$$

*Zweiseitiger Test*
$H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$
Hier gewinnt:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0} > \chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) \\ 0, \ \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0} < \chi^2_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ 1, \text{ sonst} \end{cases}$$



Dieses Blatt ist ein http://mitschriebwiki.nomeata.de/-Projekt.
Letze Änderung: 28. September 2017 –time–