Grundlagen

σ-Algebren

$\mathfrak{A}$ ist σ-Algebra, gdw.:
$\Omega \in \mathfrak{A}$, $A^c \in \mathfrak{A}$, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

Mengengrenzwerte

unendlich viele:
$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$
alle bis auf endlich viele:
$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

Wahrscheinlichkeitsmaß

$0 \le P(\omega) \le 1$
$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
$P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$
$P(A^c) = 1 - P(A)$
$A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Siebformel

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 \cdots < i_k \le n} P(A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ik})$$
Also:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
B_i seien eine Partition:
$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$
Satz v. Bayes:
$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$

Diskrete Verteilungen

Gleichverteilung

$P(X = x_i) = p_X(x_i) = \frac{1}{n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ $EX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\right)$

Binomialverteilung

$X \sim B(n, p)$
$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$$F_X(x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$EX = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
$g_X(s) = (1 - p + sp)^n$

neg. Binomialverteilung

$X \sim NegB(n, p)$
$p_X(k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$
$$F_X(x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$EX = \frac{n}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = n \frac{(1-p)}{p^2}$

Hypergeometrische Verteilung

W'keit, bei m Versuchen ohne Zurücklegen von n s/w-Kugeln k der r weißen zu ziehen.
$X \sim \mathrm{Hypergeom}(n, r, m)$
$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$
$EX = \frac{rm}{n}$
$\mathrm{Var}(X) = \frac{rm}{n}(1 - \frac{r}{n})(\frac{n-m}{n-1})$

Geometrische Verteilung

W'keit beim k-ten Versuch den 1. Treffer zu bekommen, p Trefferw'keit. $p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$
$EX = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Poisson-Verteilung

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ Approximation der Binomialvert. mit $\lambda = np$
$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k = 0, \ldots)$
$EX = \mathrm{Var}(X) = \lambda$
$g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ $X \sim \mathrm{Po}(\lambda_0), Y \sim \mathrm{Po}(\lambda_1) \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Po}(\lambda_0 + \lambda_1)$

Stetige Verteilungen

Gleichverteilung

$X \sim U(a, b)$
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ auf (a, b)
$EX = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Exponentialverteilung

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \lambda > 0$
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$EX = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Gedächtnislosigkeit: $P(X \ge t | X \ge s) = P(X \ge t - s)$ $(0 < s < t)$

Normalverteilung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
$EX = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y$$
$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
$\Phi^{-1}(x) = -\Phi^{-1}(1-x)$
$EX = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\Rightarrow Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
Standardnormalverteilung:
$\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$
Faltungsstabil:
$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
$X \sim N(0, 1)$:
$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
$\varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t)$

Gammaverteilung

$X \sim G(\alpha, \lambda)$
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$
wobei $\Gamma(\alpha) := \int_{o}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t$
$EX = \frac{\alpha}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
$X \sim G(\alpha, \lambda_1), Y \sim G(\alpha, \lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim G(\alpha, \lambda_1 + \lambda_2)$
für $\alpha = 1$ erhält man die Exponentialverteilung.

Formeln

Erwartungswert

(Existenz falls mit $|\cdot|$ noch $< \infty$)
diskret: $EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_X(k)$
$Eg(X) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) P_X(k)$
stetig: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$
$E(aX + bY) = aEX + bEY$
Falls X_i unkorreliert:
$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$
Erwartungsvektor:
$X = (X_1, \ldots, X_n)$ ZV, $EX_i^2 < \infty$:
$EX := (EX_1, \ldots, EX_n)$
Cauchy-Schwarze Ungleichung:
$\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) ex.$
$\Rightarrow (EXY)^2 \le EX^2 EY^2$

Varianz

$\mathrm{Var}(X) := E((X - EX)^2) = EX^2 - (EX)^2 \ge 0$
Daher auch:
$EX^2 = \mathrm{Var}(X) + (EX)^2$
$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$
Falls X_i nicht unkorreliert:
$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
Falls X_i unkorreliert:
$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$
Standardabweichung:
$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Urnenmodell

Mit Zurückl., mit Reihenflg. (k unterscheidbare Objekte mit Mehrfachbel. auf n Fächer): n^k
Mit Zurückl., ohne Reihenflg. (nicht untersch. O., mit Mehrfachbel.) : $\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Zurückl., mit Reihenflg. (untersch. O., ohne Mehfachbel.): $\frac{n!}{(n-k)!}$
Ohne Zurückl., ohne Reihenflg. (nicht untersch. O., ohne Mehrfachbel.): $\binom{n}{k}$

Tschebyscheff Ungleichung

$P(|X - EX| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}(X)$

Faltungsformel

(X, Y) abs stetige ZV, mit gem Dichte $f_{XY} \Rightarrow Z := X + Y$ ist abs stetige ZV mit Dichte:
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, x - t) dt$
X, Y unabh $\Rightarrow$ Faltungsformel:
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$

Unabhängingkeit von ZV

Def.:
$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod F_{X_i}(x_i)$
gdw. bis auf eine Nullmenge:
$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod f_{X_i}(x_i)$
Sätze:
X, Y unabh. $\Rightarrow EXY = EXEY$
$X_1, \ldots, X_n$ unabh
$\Rightarrow \mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$

Kovarianz

$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$
$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{Cov}(aX + bY, Z)$
$= a\,\mathrm{Cov}(X, Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y, Z)$
$= \mathrm{Cov}(Z, aX + bY)$
X, Y *unkorreliert:* gdw.
$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
X, Y unabh. $\Rightarrow X, Y$ unkorr.
Kovarianzmatrix:
$X = (X_1, \ldots, X_n) \Rightarrow \mathrm{Cov}(X) := (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,\ldots,n}$
Korrelationskoeffizient: Ist $\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y) > 0$ so gilt:
$$\left|\rho(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}\right| \le 1$$

Erzeugende Fkt (diskret)

$g_X : [-1, 1] \to R$
$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) s^k = Es^X$
$g_X(1) = 1, p_X(k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$
$EX = g_X'(1^-)$, $\mathrm{Var}(X) = g_X''(1^-) + g_X'(1^-) - (g_X'(1^-))^2$
X, Y unabh, diskret
$\Rightarrow g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_Y(s)$

Konvergenzbegriff für ZV

P-fast sicher

$X_n \xrightarrow{f.s} X$ wenn:
$P(\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

in Wahrs'keit, stochastisch

$X_n \xrightarrow{P} X$ wenn, $\forall \varepsilon > 0$
$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \big| |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}) = 0$

in Verteilung

$X_n \xrightarrow{d} X$ wenn $\forall x$ mit F_X stetig:
$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

Implikationen

f.s. $\Rightarrow$ in Wahrs'keit
in Wahrs'keit $\Rightarrow$ in Verteilung
in Verteilung gegen eine Konstante $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ in Wahrs'keit

Grenzwertsätze

Kolmogorov

(Starkes Gesetz der großen Zahlen)
X_i unabh. und identisch vert,
$E|X_1| < \infty$: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{f.s.} EX_1$

Zentraler Grenzwertsatz

X_i u.i.v., $E|X_1| < \infty$,
$0 < \mathrm{Var}(X_1) < \infty$: für $n \to \infty$ gilt:
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot EX_1}{\sqrt{n \cdot \mathrm{Var}(X_1)}} \xrightarrow{d} X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$
also
$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nEX_1}{\sqrt{n \cdot \mathrm{Var}(X_1)}} \le x\right) \to \Phi(x)$$

Zweiseitiger Grenzwertsatz

Gleiche Voraussetzungen wie oben:
$$P\left(a \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot EX_1}{\sqrt{n \cdot \mathrm{Var}(X_1)}} \le b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

Charkteristische Funktion

X ZV, $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$\varphi_X(t) := Ee^{itX} = E\cos(tX) + iE\sin(tX)$
X diskret $\Rightarrow \varphi_X(t) = g_X(e^{it})$
X abs stetig
$\Rightarrow \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx$
$\varphi_X(0) = 1$ $|\varphi_X(t)| \le 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$
$a, b \in \mathbb{R}$:
$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$ $\varphi_X(t)$ ist glm stetig auf $\mathbb{R}$
X, Y unabh ZV
$\Rightarrow \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$
$E|X|^n < \infty$, $n \in N \Rightarrow \varphi_X$ n-mal db
und: $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n EX^n$
X, Y ZV mit gleicher char Fkt, so auch gleiche Verteilung.
(X_n) Folge von ZV mit $F_{X_n}(x)$ und $\varphi_{X_n}(t)$ so ist äquivalent:
$X_n \xrightarrow{d} X$
$\varphi_{X_n}(t) \to \varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ und φ stetig in 0

Parameterschätzung

Defnitionen

Stichprobenmittel: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Stichprobenvarianz:
$S^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

Maximum-Likelihood-Methode

Likelihood-Funktion:
$L_x(\theta) = f_\theta(x_1) \cdot \cdots \cdot f_\theta(x_n)$bzw.
$L_x(\theta) = p_\theta(x_1) \cdot \cdots \cdot p_\theta(x_n)$
Maximum-Likelihood-Schätzer
MLS: bei welchen θ ist L_x maximal.
Oft einfacher: $\ln L_x(\theta)$ maximieren.
$(\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$, $\ln \prod = \sum \ln)$

Momentenmethode

Pro zu schätzenden Parameter ein empirisches Moment mit dem der Verteilung gleichsetzen. Also:
$\mu_k(\theta) = \mathrm{E}_\theta X^k \stackrel{!}{=} \overline{x}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k$

Eigenschaften

Erwartungstreu: $E_\theta T(X) = \theta$
ET hat i.A. nix mit EX zu tun!
Bias: $b_T(\theta) := E_\theta T(X) - \theta$
Mittlerer Quadratischer Fehler:
$\mathrm{MSE}(T) := E_\theta(T(x) - \theta)^2$
unbiasd: $\mathrm{MSE}(T) = \mathrm{Var}_\theta(T)$

Fisher-Info.

$I(\theta) := E_\theta\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log L_X(\theta)\right)^2\right)$

Ungleichung von Cramér-Rao

$\mathrm{Var}_\theta(T(X)) \ge \frac{(1 + \frac{\partial}{\partial\theta} b_T(\theta))^2}{I(\theta)}$

Konfidenzintervalle

Gesucht sind ZV L und U mit $L(x) \le U(x)$ und
$P_\theta(L(x) \le \theta \le U(x)) = 1 - \alpha$

Testtheorie

Überprüfen, ob ein Parameter θ einer Verteilung in Θ_0 oder Θ_1 $(\Theta_0 + \Theta_1 = \Theta)$ ist.
Einseitiger Test:
$H_0 : \theta \le \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$
Zweiseitiger Test:
$H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \ne \theta_0$

Test, Fehler und Güte

Sei $x \in \chi^n$ eine Stichprobe.
$\varphi : \chi^n \to \{1, 0\}$ heißt *Test:*
Mit $\varphi(x) = 1$ lehnen wir H_0 für x ab
Gütefkt: β gibt W'keit an, mit der H_0 wir ablehnen
$\beta(\theta) = P_\theta(\varphi(x) = 1)$
F. 1. Art: Test: „H_1" aber H_0 wahr.
F. 2. Art: Test: „H_0" aber H_1 wahr.
Niveau: $\alpha \hat{=}$ W'keit für Fehler 1. Art $\le \alpha$. Also: $\beta(\theta) \le \alpha$
Man legt α fest. Also muss der Fehler 1. Art der schlimmere sein (z.B. unwirksames Medikament als wirksam bedacht oder Ham als Spam eingeordnet). Danach erst minimiert man den Fehler 2. Art.
Eselsbrücke: **H**ypothese $H_0 \hat{=}$ **H**am.

Likelihood-Quotienten Test

Likelihood-Quotient:
$q(x) := \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_x(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L_x(\theta)}$
Test der Form:
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & q(x) > c_0 \\ \gamma, & q(x) = c_0 \\ 1 & q(x) < c_0 \end{cases}$$

Spezialfall: Neyman-Pearson-T.

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & L_x(\theta_1) > c^* L_x(\theta_0) \\ \gamma & L_x(\theta_1) = c^* L_x(\theta_0) \\ 0 & L_x(\theta_1) < c^* L_x(\theta_0) \end{cases}$$

Hilfreiche Rechenregeln

Diskrete

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Integrale

$\int f \cdot g = [f \cdot G] - \int f' \cdot G$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle

Regenwurmaufgabe

Annahme: Länge d. Regenwurm auf $(0,\theta)$ gleichverteilt. Maximallänge von n Würmern liegt vor. Gebe ein $(1-\alpha)$-KonfInt für d θ an. *Lösung:* $P_\theta(\max\{X_1,\dots,X_n\} \geq x) = 1 - P_\theta(X_1 < x) \cdot \dots \cdot P_\theta(X_n < x) = 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^n = 1 - \alpha \Rightarrow x = \theta \sqrt[n]{\alpha}$.
Somit: $\max\{X_1,\dots,X_n\} \geq \theta \sqrt[n]{\alpha} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\max\{X_1,\dots,X_n\}}{\sqrt[n]{\alpha}}$
Konfidenzintervall:
$\left[\max\{X_1,\dots,X_n\}, \frac{\max\{X_1,\dots,X_n\}}{\sqrt[n]{\alpha}}\right]$

Scriptbeispiel 15.2

Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit, $X \sim B(m,\theta), \Theta = [0,1]$ Dann gilt:
$L(x) = \frac{1}{m+(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}\cdot$
$\left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}}\right)$
$U(x) = \frac{1}{m+(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}\cdot$
$\left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}}\right)$
wobei x Treffer der Stichprobe, $z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$.

Hypothesentest

Test auf Mittelw, Var bekannt

$X = (X_1, ..., X_n), X_i \sim P_\mu = N(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0$ bekannt, $\mu \in \Theta = R$.
Einseitiger Test

$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0$

mit $\mu_0 \in R$ geg.
Sinnvoller Test:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \overline{x} \leq c \\ 1 & , \quad \overline{x} > c \end{cases}$$

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. $c \in R$ nun zu bestimmen, sodass Testnivea α eingehalten.
Betrachte $\sqrt{n}\ \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma_0}$

$$P_\mu\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0} \leq x\right) = \Phi(x)$$

$\beta_c(\mu) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{c-\mu}{\sigma_0}\right)$ Es genügt: $\beta_c(\mu_0) \leq \alpha$

$$\beta_c(\mu_0) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi\underbrace{\left(\sqrt{n}\frac{c-\mu_0}{\sigma_0}\right)}_{=z_{1-\alpha}} \leq \alpha$$

$\Leftrightarrow c \geq \frac{z_{1-\alpha}\,\sigma_0}{\sqrt{n}} + \mu_0 =: c^*$

Test auf Mittelw, Var unbekannt (sog.t-Test)

$P_{\mu,\sigma^2} = N(\mu,\sigma^2)$,
$\theta = (\mu,\sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. σ^2 ist hier nicht bekannt!
Einseitiges Testproblem:
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ für ein festes $\mu_0 \in R$
$X = (X_1, \dots, X_n)$ Zufallsstichprobe zu P_{μ,σ^2}. Dann gilt:
$\sqrt{n}\ \frac{\overline{X}-\mu}{S(X)} \sim t_{n-1}$, wir mussten also im Gegensatz zu oben σ durch $S(X)$ ersetzen.
Folgender Test hält α:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \sqrt{n}\ \frac{\overline{x}-\mu_0}{S(x)} \leq t_{n-1}(1-\alpha) \\ 1, \ \sqrt{n}\ \frac{\overline{x}-\mu_0}{S(x)} > t_{n-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Zweiseitiger Test:

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$
Der zugehörige Test ist:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \sqrt{n}\,\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{S(x)}\right| \leq t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \\ 1, \ \sqrt{n}\,\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{S(x)}\right| > t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

Test auf die Varianz

$P_{\mu,\sigma^2} = N(\mu,\sigma^2)$,
$\theta = (\mu,\sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. wie gehabt.

Einseitiger Test:
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

Es gilt:

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0^2} \leq x\right) = F_{\chi^2_{n-1}}(x)$$

Folgender Test tut es:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} \leq \chi^2_{n-1}(1-\alpha) \\ 1, \ \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} > \chi^2_{n-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Zweiseitiger Test
$H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$
Hier gewinnt:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0} > \chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) \\ 0, \ \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0} < \chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \\ 1, \text{ sonst} \end{cases}$$