

Hilfreiche Rechenregeln

Diskrete

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Integrale

$$\int f \cdot g = [f \cdot G] - \int f' \cdot G$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$(1-\alpha)$ -Konfidenzintervalle

Regenwurmaufgabe

Annahme: Länge d. Regenwurm auf $(0, \theta)$ gleichverteilt. Maximallänge von n Würmern liegt vor. Gebe ein $(1-\alpha)$ -KonfInt für θ an. Lösung: $P_\theta(\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq x) = 1 - P_\theta(X_1 < x) \cdot \dots \cdot P_\theta(X_n < x) = 1 - (\frac{x}{\theta})^n = 1 - \alpha \Rightarrow x = \theta \sqrt[n]{1-\alpha}$.

Somit: $\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq \theta \sqrt[n]{1-\alpha} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}$

Konfidenzintervall:

$$\left[\max\{X_1, \dots, X_n\}, \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt[n]{1-\alpha}} \right]$$

Scriptbeispiel 15.2

Schätzung der

Erfolgswahrscheinlichkeit.

$X \sim B(m, \theta)$, $\Theta = [0, 1]$ Dann gilt:

$$L(x) = \frac{1}{m + (\frac{x}{\alpha})^2}$$

$$\left(x + \frac{(\frac{x}{\alpha})^2}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(\frac{x}{\alpha})^2}{4}} \right) \beta_c(\mu) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{c-\mu}{\sigma_0}\right) \text{ Es genügt: } \beta_c(\mu_0) \leq \alpha$$

$$U(x) = \frac{1}{m + (\frac{x}{\alpha})^2}$$

$$\beta_c(\mu_0) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\underbrace{\sqrt{n} \frac{c - \mu_0}{\sigma_0}}_{=z_{1-\alpha}}\right) \leq \alpha \Leftrightarrow c \geq \frac{z_{1-\alpha} \sigma_0}{\sqrt{n}} + \mu_0 =: c^*$$

wobei x Treffer der Stichprobe, $z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$.

Hypothesentest

Test auf Mittelw, Var bekannt

$X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_i \sim P_\mu = N(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0 bekannt, $\mu \in \Theta = R$.

Einseitiger Test

$H_0: \mu \leq \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$

mit $\mu_0 \in R$ geg.

Sinnvoller Test:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \bar{x} \leq c \\ 1 & , \bar{x} > c \end{cases}$$

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. $c \in R$ nun zu bestimmen, sodass Testniveau α eingehalten.

Betrachte $\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_0}$

$$P_\mu \left(\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0} \leq x \right) = \Phi(x)$$

Test auf Mittelw, Var unbekannt (sog. t-Test)

$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$,

$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. σ^2 ist hier nicht bekannt!

Einseitiges Testproblem:

$H_0: \mu \leq \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$ für ein festes $\mu_0 \in R$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ Zufallsstichprobe zu P_{μ, σ^2} . Dann gilt:

$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S(X)} \sim t_{n-1}$, wir mussten also

im Gegensatz zu oben σ durch $S(X)$ ersetzen.

Folgender Test hält α :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \leq t_{n-1}(1-\alpha) \\ 1, & \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} > t_{n-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Zweiseitiger Test:

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$

Der zugehörige Test ist:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| \leq t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ 1, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| > t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

Test auf die Varianz

$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$,

$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. wie gehabt.

Einseitiger Test:

$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Es gilt:

$$P_{\mu, \sigma^2} \left(\frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0^2} \leq x \right) = F_{\chi_{n-1}^2}(x)$$

Folgender Test tut es:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \\ 1, & \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \end{cases}$$

Zweiseitiger Test

$H_0: \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1: \sigma \neq \sigma_0$

Hier gewinnt:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2}) \\ 0, & \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0^2} < \chi_{n-1}^2(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

