Funktionentheorie I

Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Sommersemester 2009

Die Mitarbeiter von `http://mitschriebwiki.nomeata.de/`

Vorwort

Über dieses Skriptum

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Funktionentheorie I“ von Herrn Prof. Dr. Schnaubelt im Sommersemester 2009 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Schnaubelt hier veröffentlicht, Herr Schnaubelt ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

Wer

Beteiligt am Mitschrieb sind Michael Fütterer und Jonathan Zachhuber.

Wo

Alle Kapitel inklusive LaTeX-Quellen können unter `http://mitschriebwiki.nomeata.de` abgerufen werden. Dort ist ein *Wiki* eingerichtet und von Joachim Breitner um die LaTeX-Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Differenzierbarkeit

1.1 Grundlegendes

1.1.1 Vorbemerkungen zu $\mathbb{C}$

Wir fassen $\mathbb{R}^2$ als Körper $\mathbb{C}$ auf, indem wir $z = (x, y)$, $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ wie folgt verknüpfen:

$$z + w = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix}, \qquad z \cdot w = zw = \begin{pmatrix} xu - yv \\ yu + xv \end{pmatrix}.$$

Wir fassen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, indem wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ identifizieren.

Beachte: $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Mit $\mathrm{i} := (0, 1)$ folgt also

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Schreibe also

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x + \mathrm{i}y,$$

hierbei sei stets $x, y \in \mathbb{R}$.

Sei weiter $w = u + \mathrm{i}v$ $(u, v \in \mathbb{R})$. Dann:

$$zw = (x + \mathrm{i}y)(u + \mathrm{i}v) = xu + \mathrm{i}^2 yv + \mathrm{i}xv + \mathrm{i}yu = (xu - yv) + \mathrm{i}(yu + xv).$$

Setze $\operatorname{Re} z := x$ (Realteil), $\operatorname{Im} z := y$ (Imaginärteil), wenn $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Real- und Imaginärteil sind eindeutig bestimmt. Das Konjugiert-Komplexe ist $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$. Damit ist

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2}(z - \overline{z}), \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Der komplexe Betrag ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|_2,$$

also gilt: $|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \overline{z}$.

Es gelten:

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \tag{1.1}$$

sowie:

$$|z| = 0 \iff z = 0, \quad |wz| = |w|\,|z|, \quad |w + z| \leq |w| + |z| \quad (\forall w, z \in \mathbb{C}).$$

Polarkoordinaten: Für $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ setze

$$e^{i\phi} := \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Es gelten nach Ana 1:

$$e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}, \quad e^{i0} = 1, \quad \left|e^{i\phi}\right| = 1, \quad e^{i(\phi+2k\pi)} = e^{i\phi} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt (für $z \neq 0$):

$$z = r\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = re^{i\phi} \quad (= x + iy),$$

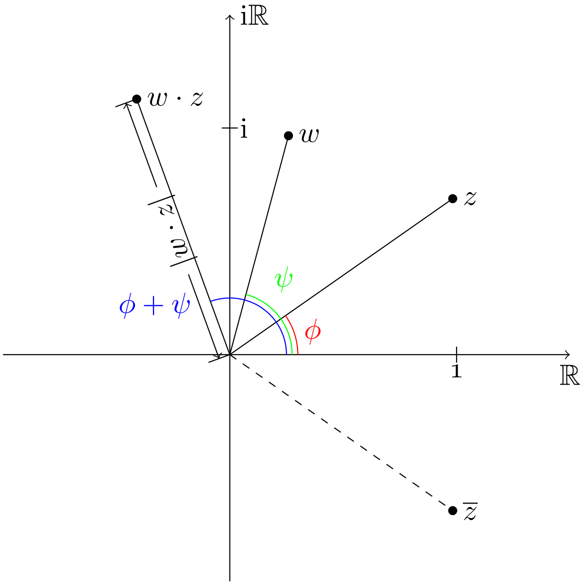
wobei r der Abstand von z zum Nullpunkt, also $|z|$, ist und

$$\phi = \arg z = \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in (-\pi, \pi], \quad \phi = \begin{cases} \operatorname{sign}(y)\arccos\frac{x}{r}, & z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \\ \pi, & z \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Sei weiter $w = se^{i\psi}$ $(s \geq 0)$. Dann

$$wz = se^{i\psi}re^{i\phi} = rse^{i(\phi+\psi)}.$$

Also entspricht die komplexe Multiplikation der Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel (mod 2π). Somit ist $z \mapsto wz$ für jedes feste w eine *Drehstreckung*.



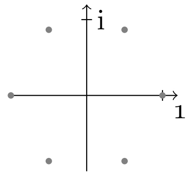
Einheitswurzeln: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Sei $z^n = 1$ für $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $1 = |1| = |z|^n = r^n$, also $r = 1$. Folglich:

$$1 = \left(e^{i\phi}\right)^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $n\phi = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt also:

$$z^n = 1 \iff z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$n = 6:$



Ferner: Für $z_n, z \in \mathbb{C}$ sagen wir, dass $z_n \longrightarrow z$ $(n \to \infty)$, wenn

$$|z - z_n| \longrightarrow 0 \overset{(1.1)}{\iff} \operatorname{Re} z_n \longrightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \longrightarrow \operatorname{Im} z \quad (n \to \infty).$$

Somit haben $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ den gleichen Konvergenzbegriff und außerdem die gleichen offenen und abgeschlossenen Kugeln:

$$\begin{aligned} B(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\}, \\ \overline{B(z_0, r)} &:= \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r\}, \quad (\forall z_0 \in \mathbb{C},\ r > 0). \end{aligned}$$

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Betrachte $z = x + \mathrm{i}y \in M$ als $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Sei $f\colon M \to \mathbb{C}$. Setze

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y), \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x, y).$$

Also:

$$f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Somit ist $f\colon M \to \mathbb{C}$ genau dann stetig (d.h. $z_n \to z$ (in M) $\implies$ $f(z_n) \to f(z)$), wenn $u, v\colon M \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Fazit: Konvergenz, Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit, Stetigkeit, etc. sind in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ gleich.

1.1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Stets sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, das heißt:

$$\forall z \in D\ \exists\, r = r(z) > 0 \text{ mit } B(z, r) \subseteq D \implies \overline{B(z, \tfrac{r}{2})} \subseteq D.$$

Definition 1.1. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt *(komplex) differenzierbar* in $z_0 \in D$, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Dann heißt $f'(z_0)$ die *Ableitung* von f bei z_0. Wenn f bei allen $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist, dann heißt f *holomorph*. Wir schreiben dann $f \in H(D)$. Iterativ definiert man höhere Ableitungen.

Bemerkung 1.2. (a) Offenbar sind die Funktionen $f(x) = 1$, $g(z) = z$ auf $\mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$, $g'(z) = 1$.

(b) Genau wie in Analysis 1 zeigt man: Seien $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ in $z \in D$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ und $\frac{1}{f}$ (wenn $f(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gelten die bekannten Regeln. Ebenso gilt die Kettenregel.

(c) Polynome p sind auf $\mathbb{C}$ und rationale Funktionen $f = \frac{p}{q}$ mit einem Polynom $q \neq 0$ sind auf $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$ holomorph mit den reellen Formeln für p', f'.

Erinnerung an Analysis 1: Gegeben seien $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und ein $c \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

konvergiert absolut für alle z mit

$$|z-c| < \rho := \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty]$$

und divergiert, falls $z \notin \overline{B}(c, \rho)$.

Reduktion auf $c = 0$: Betrachte

$$h(w) := f(c+w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

wobei $w = z - c \in B(0, \rho)$, $z = c + w$.

Satz 1.3 (vgl. Analysis 1, Theorem 4.12)**.** *Sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n, \; z \in B(c, \rho),$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f \in H(B(c, \rho))$ und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} =: g(z) \; (\forall z \in B(c, \rho)),$$

wobei die Potenzreihe g den gleichen Konvergenzradius ρ hat.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Iterativ folgt:

$$\exists f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot \ldots \cdot (n-m+1) a_n (z-c)^{n-m}, \forall z \in B(c, \rho).$$

Beweis. Wie in Analysis 1 zeigt man: g hat Konvergenzradius ρ. Sei oBdA $c = 0$.

Seien $z \in B(0, \rho)$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$ mit $|z| < r < \rho$. Sei $w \in \overline{B}(0, r)$ mit $w \neq z$.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$ absolut konvergiert, existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \leq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Ferner:

$$0 \leq d(w) := \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \right)}_{=: p_n(w)} \right|$$

mit $p_n(w) = w^{n-1} + z w^{n-2} + \cdots + z^{n-1} - n z^{n-1}$. Dabei gelten:

- $p_n(w) \to 0$, $w \to z$ (für jedes feste $n \in \mathbb{N}$)
- $|p_n(w)| \leq r^{n-1} + r r^{n-2} + \cdots + r^{n-1} + n r^{n-1} = 2 n r^{n-1}$ $\quad (**)$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}0 \le d(w) &\le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||p_n(w)| \overset{(**)}{\le} \sum_{n=1}^{N} |a_n||p_n(w)| \;+ \sum_{n=N+1}^{\infty} 2n|a_n|r^{n-1} \\ &\overset{(*)}{\le} N\max\{|a_1||p_1(w)|, \cdots, |a_n||p_n(w)|\} + 2\varepsilon \to 2\varepsilon \;(w \to z)\; (N = N_\varepsilon \text{ fest!})\end{aligned}$$

$\implies \lim_{w\to z} d(w) \le 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{w\to z} d(w) = 0$. ☐

Beispiele mit $\rho = \infty$.

(a) $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$.

(b) $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $\sin'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z)$.

(c) $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$,

$\cos'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} \overset{l=n-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)!} z^{2l+1} = -\sin(z)$.

Seien $f\colon D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $z \in D$. Setze wieder $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $x_0 = \operatorname{Re} z_0$, $y_0 = \operatorname{Im} z_0$, also

$$f(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}.$$

Sei $z \ne z_0$ und f bei z_0 komplex differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{1}{|z-z_0|}|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \longrightarrow 0, \; z \to z_0.$$

Die Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ kann als $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $w \mapsto f'(z_0)w$ aufgefasst werden. Diese ist dann auch $\mathbb{R}$-linear auf $\mathbb{R}^2$, kann also durch eine reelle 2×2-Matrix dargestellt werden. Nach Analysis 2 ist nun f in $z_0 = (x,y)$ reell differenzierbar und somit existieren die partiellen Ableitungen von u und v und es gilt

$$f'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}. \tag{+}$$

Satz 1.4. *Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$. Dann sind äquivalent:*

(*a*) *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*

(*b*) *f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die* Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{CR}$$

Insbesondere ist $f'(z_0)$ schiefsymmetrisch.

Beweis. Die letzte Behauptung folgt aus (+) und $(\mathrm{CR})_2$.

$(a) \implies (b)$: Sei $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$, $t \in \mathbb{Q}$ mit $0 < |t| < r$. Dann gelten

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(z_0+t) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}(u(x_0+t, y_0) - u(x_0, y_0)) + \frac{\mathrm{i}}{t}(v(x_0+t, y_0) - v(x_0, y_0)) \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

und

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mathrm{i}t}(f(z_0+\mathrm{i}t) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(-\mathrm{i}\frac{1}{t}(u(x_0, y_0+t) - u(x_0, y_0)) + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}t}(v(x_0, y_0+t) - v(x_0, y_0)) \right) \\ &= -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Vergleichen von Real- und Imaginärteil liefert (CR).

$(b) \implies (a)$: Setze

$$w = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \overset{\text{(CR)}}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} w(z-z_0) &= (\operatorname{Re} w)(x-x_0) - (\operatorname{Im} w)(y-y_0) + \mathrm{i}((\operatorname{Re} w)(y-y_0) + (\operatorname{Im} w)(x-x_0)) \\ &\overset{\text{Def. } w}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) \end{pmatrix} \text{ (in } \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies |f(z) - f(z_0) - w(z-z_0)| \frac{1}{|z-z_0|} \\ &= \left| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right|_2^{-1} \left| \begin{pmatrix} u(x,y) - u(x_0,y_0) - \left(\nabla u(x_0,y_0) \,\middle|\, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right) \\ v(x,y) - v(x_0,y_0) - \left(\nabla v(x_0,y_0) \,\middle|\, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \right|_2 \to 0, \end{aligned}$$

für $(x_0, y_0) = z_0 \to z = (x, y)$, da u, v differenzierbar. □

Beispiel 1.5. (a) $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$, ist nirgends komplex differenzierbar, obwohl $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ reell C^∞ ist. Denn $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$; also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

was $(\mathrm{CR})_1$ widerspricht.

(b) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, $z \in \mathbb{C}$, ist nur in $z = 0$ komplex differenzierbar, denn hier ist $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$ und somit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \overset{!}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \iff x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y \overset{!}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \iff y = 0.$$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \underbrace{\dfrac{x}{x^2+y^2}}_{=u} + \mathrm{i}\underbrace{\dfrac{-y}{x^2+y^2}}_{=v}$ ist holomorph für $z \neq 0$ (Bem. 1.2).

Bemerkung 1.6. Sei f in $z = x + \mathrm{i}y$ komplex differenzierbar. Nach (+) und (CR) gilt:

$$A := f'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Also gilt $\rho := \det A = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)^2 + \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)^2 = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)^2 + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)^2 \geq 0$ und $f'(z) \neq 0 \iff \det A > 0$. Ferner ist $A^T A = (\det A)\mathrm{I}$. Sei $f'(z) \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} A \text{ orthogonal} \tag{$*$}$$

$$\Longrightarrow \quad |Av|_2 = \sqrt{\rho}\,|v|_2 \quad (\forall v \in \mathbb{R}^2). \tag{$**$}$$

Sei $\gamma_j \in C^1((-1,1),\mathbb{R}^2)$ eine Kurve in D mit $\gamma_j(0) = (x,y)$, $\gamma_j'(0) =: v_j \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $(j = 1,2)$. Dann ist $Av_j = f'(x,y)\gamma_j'(0) = (f \circ \gamma_j)'(0)$ ein Tangentenvektor der Bildkurve $f \circ \gamma_j$ bei $f(x,y)$ $(j = 1,2)$. Weiter gilt:

$$\frac{(v_1 \mid v_2)}{|v_1|_2\,|v_2|_2} \overset{(*),(**)}{=} \frac{\frac{1}{\rho}(Av_1 \mid Av_2)}{\frac{1}{\rho}\,|Av_1|_2\,|Av_2|_2},$$

woraus durch Anwenden des Arcuscosinus folgt: $\sphericalangle(v_1, v_2) = \sphericalangle(Av_1, Av_2)$ (Winkel ohne Orientierung).
Also ist der Winkel der Urbildtangenten gleich dem Winkel der Bildtangenten unter f. Falls also $f'(z) \neq 0$, dann ist f bei $z = x + \mathrm{i}y$ *winkeltreu* („konform“). Ferner ist f orientierungstreu, da $\det A > 0$.

Definition 1.7. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Sei $f\colon U \to V$ bijektiv und $f \in H(U)$, $f^{-1} \in H(V)$. Dann heißt f *biholomorph.* (Dann heißen U und V auch „konform äquivalent“.)

Satz 1.8. *(a) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, $f\colon U \to V$ biholomorph. Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und es gilt*

$$(f^{-1})'(f(z)) = (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)} \quad (\forall z \in U,\ \forall w = f(z) \in V).$$

(b) Seien $f \in H(D) \cap C^1(D,\mathbb{R}^2)$, $z_0 \in D$, $f'(z_0) \neq 0$. Dann existieren offene $U, V \subseteq \mathbb{C}$ mit $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$, sodass $f\colon U \to V$ biholomorph ist. Somit ist a) auf f für alle $z \in U$ und $w = f(z) \in V$ anwendbar.

Beweis. (a) Nach Bem. 1.2 und $z = f^{-1}(f(z))$ $(\forall z \in U)$ folgt $1 = (f^{-1})'(f(z))f'(z)$. Durchdividieren ergibt Behauptung a).

(b) Nach Bem. 1.6 ist $f'(z_0)$ als 2×2-Matrix invertierbar. Der Umkehrsatz aus Analysis 2 liefert Behauptung b). ☐

Definition. Eine Funktion $u \in C^2(D,\mathbb{R})$ heißt *harmonisch* auf D, wenn für alle $(x,y) \in D$ gilt:

$$\triangle u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Satz 1.9. *(a) Sei $f \in H(D) \cap C^2(D, \mathbb{R}^2)$. Dann sind $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ harmonisch auf D.*

(b) Sei $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ auf D harmonisch, $B_0 := B((x_0, y_0), r) \subseteq D$ für ein $r > 0$, $(x_0, y_0) \in D$. Dann existiert ein $f \in H(B_0)$ mit $u = \operatorname{Re} f$.

Beweis. (a) Der Satz von Schwarz aus Analysis 2 (Satz 2.21) liefert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \overset{\text{(CR)}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

(b) Setze für $(x, y) \in B_0$

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0)\, \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, s)\, \mathrm{d}s.$$

Beachte: die Strecken von (x_0, y_0) nach (x, y_0) und von (x, y_0) nach (x, y) liegen in B_0. Analysis 1 und 2 liefern: $v \in C^1(B_0)$ und

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s)\, \mathrm{d}s \qquad \text{Beachte hier: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, s)$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

$\implies$ (CR)$_2$. Ferner $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \implies$ (CR) gilt. Mit Satz 1.4 folgt: $f = u + \mathrm{i}v$ ist auf B_0 holomorph. □

Beispiel. Sei $f(z) = z^3 = (x + \mathrm{i}y)^3 = x^3 + 3\mathrm{i}x^2y - 3xy^2 - \mathrm{i}y^3$. Satz 1.9 liefert: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ist harmonisch auf $\mathbb{C}$.

1.2 Elementare Funktionen

1.2.1 Möbiustransformationen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$ (dann ist $c \neq 0$ oder $d \neq 0$). Setze

$$m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für} \quad z \in D_A := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$$

m_A heißt *Möbius-Transformation.* Offensichtlich ist $m_A \in H(D_A)$.

Eigenschaften: Sei A wie oben und $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$ mit $\det \tilde{A} \neq 0$.

(a) Es gilt

$$m_A(z) = z \ (\forall z \in D_A) \iff A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ für ein } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Beweis. „$\Leftarrow$": einsetzen! „$\Rightarrow$": Für alle $z \in D$ gilt:

$$m_A(z) = z \implies cz^2 + (d-a)z - b = 0 \ (\forall z \in D_A)$$

$$\implies c = 0, d = a, b = 0 \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \qquad \square$$

(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $m_{\alpha A} = m_A$.

(c) Es gilt $m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = m_{A\tilde{A}}(z)$ (soweit alles definiert).

Beweis. Für passende z:

$$m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = \frac{a\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} + b}{c\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} + d} = \frac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + (a\tilde{b} + b\tilde{d})}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + (c\tilde{b} + d\tilde{d})} = m_{A\tilde{A}}(z). \qquad \square$$

(d) Es gilt: $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Damit folgt: $D_{A^{-1}} = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$

Man zeigt leicht, dass gilt:

$$m_A(D_A) \subseteq D_{A^{-1}}, \tag{$*$}$$

$$m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) \subseteq D_A. \tag{$**$}$$

Also folgt aus c): $m_A(D_A) = D_{A^{-1}}$ (wende auf $(**)$ m_A an), $m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) = D_A$ (wende auf $(*)$ $m_{A^{-1}}$ an) und $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}$.

Insbesondere sind $m_A \colon D_A \to D_{A^{-1}}$, $m_{A^{-1}} \colon D_{A^{-1}} \to D_A$ biholomorph.

(e) Sei $c = 0$ (also $d \neq 0$). Dann ist $m_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ eine affine Abbildung, also $m_A = T \circ S$ mit $Tw = w + \frac{d}{d}$ (Translation) und $Sw = \frac{a}{d}w$ (Drehstreckung). Sei nun $c \neq 0$. Dann gilt $m_A = A_2 \circ J \circ A_1$, wobei $A_1 w = cw + d$, $A_2 w = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}w$ (affin) und $Jw = \frac{1}{w}$ $(w \neq 0)$ (Inversion).

Beweis. Es gilt $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c}\dfrac{1}{cz+d} = A_2(J(A_1(z)))$. $\square$

Fasse jede Gerade in $\mathbb{C}$ als verallgemeinerten Kreis über ∞ auf. Also ist ein verallgemeinerter Kreis K entweder eine Gerade oder eine echte Kreislinie. Beachte: K wird durch die Angabe dreier verschiedener Punkte in $\mathbb{C}_\infty$ eindeutig bestimmt.

(f) Jede Möbiustransformation bildet einen verallgemeinerten Kreis bijektiv auf einen verallgemeinerten Kreis ab.

Beweis. Nach 1.9(e) ist die Behauptung nur für Translationen T, Drehstreckungen S und die Inversion J zu zeigen. Klar: T, S sind „verallgemeinert kreistreu".

Zu J: Sei $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann:

$$z \in K := \partial B(z_0, r) \iff r^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = |z|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2.$$

Damit:

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \alpha|z|^2 + c\overline{z} + \overline{c}z + \delta = 0\} \tag{$*$}$$

für feste α, $\delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ mit $|c|^2 > \alpha\delta$, wobei $z_0 = -\frac{c}{\alpha}$, $r^2 = \frac{|c|^2}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}$, falls $\alpha \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ Für $\alpha \neq 0$ beschreibt $(*)$ die echte Kreislinie $\partial B(z_0, r)$. Für $\alpha = 0$ beschreibt $(*)$ die Gerade $\operatorname{Re}(\bar{c}z) = -\frac{\delta}{2}$ (Beachte: $c \neq 0$). Multipliziere $(*)$ mit $\frac{1}{|z|^2}$. Dann erfüllt $w = Jz = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ die Gleichung:

$$0 = \underbrace{\alpha}_{=:\delta'} + \underbrace{c}_{=:-\bar{c}'} w + \underbrace{\bar{c}}_{=:-c'} \overline{w} + \underbrace{\delta}_{=:\alpha'} |w|^2.$$

Weiter gilt: $|c'|^2 - \alpha'\delta' = |c|^2 - \alpha\delta > 0$. Wenn K durch $(*)$ beschrieben wird, dann folgt also $J(K) \subseteq K'$, wobei K' ein verallgemeinerter Kreis ist. Genauso: $J(K') \subseteq K$. Da $J^2 = \mathrm{id}$ folgt $K' = J^2(K') \subseteq J(K) \implies J(K) = K'$. $\square$

Definition 1.10. Setze $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei gelten soll:

$$\forall z \in \mathbb{C} : z\infty = \infty + z = \infty,\ \frac{z}{\infty} = 0,$$
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty,\ \frac{z}{0} = \infty.$$

Verboten: $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Wir schreiben $z_n \to \infty$, wenn $|z_n| \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

Beachte: Dieses ∞ ist ein anderes als $\pm\infty$ in $\mathbb{R}$ aus Analysis 1.

Setze bezüglich dieser „Konvergenz“ m_A „stetig“ fort durch

$$m_A(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c},\ c \neq 0 \\ \infty,\ c = 0 \end{cases}.$$

Beachte:

$$m_A(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}\ (z \neq 0),\ m_A\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

(beachte: $-\frac{ad}{c} + b \neq 0$, da $\det A \neq 0$).

Mit etwas Rechnung folgt: $m_A\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ ist bijektiv mit $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$.

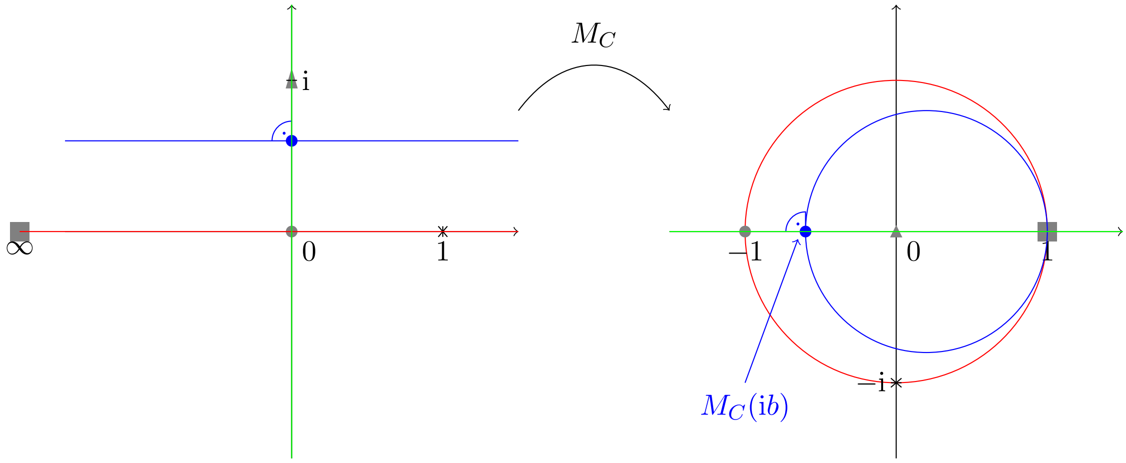
Sei $\mathcal{M} := \{m_A\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty \mid \det A \neq 0\}$. Mit obigen Eigenschaften (und etwas Rechnung bezüglich ∞) folgt:

- $\mathcal{M}$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.
- $\Phi\colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{M}$, $A \mapsto m_A$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}\Phi = \{\alpha \mathrm{I} \mid \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

Beispiel 1.11 (Cayley-Transformation)**.** Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ ($\rightsquigarrow \det C = 2\mathrm{i} \neq 0$) $\rightsquigarrow M_C(z) = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$.

Dabei: $M_C(-\mathrm{i}) = \dfrac{-2}{0} = \infty$, $M_C(\infty) = \dfrac{1 - \frac{\mathrm{i}}{\infty}}{1 + \frac{\mathrm{i}}{\infty}} = 1$. Weiter: $M_C(0) = -1$, $M_C(1) = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.
Durch $\{0, 1, \infty\}$ läuft der verallgemeinerte Kreis $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nach verläuft der Bildkreis $M_C(\mathbb{R}_\infty)$ durch die Bilder $-1, -\mathrm{i}, 1$. Dies ist $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ mit $\mathbb{D} = B(0, 1)$. Also $M_C(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$.

Ferner: Für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt $M_C(\mathrm{i}b) = \dfrac{b - 1}{b + 1}$, insbesondere $M_C(\mathrm{i}) = 0$. $\mathrm{i}\mathbb{R}_\infty$ verläuft durch $0, \mathrm{i}, \infty$. $\mathbb{R}_\infty$ verläuft durch die Bildpunkte $-1, 0, 1 \implies M_C(\mathrm{i}\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. Mit Analysis 1: $M_C(\mathrm{i}\mathbb{R}_+) = [-1, 1)$.



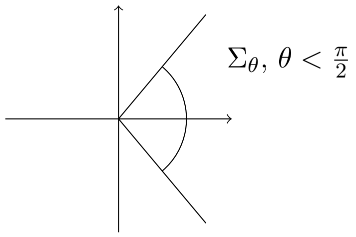
Die Gerade $K\colon \mathrm{i}b + x,\ x \in \mathbb{R},\ (b > 0$ fest) wird auf den verallgemeinerten Kreis K' durch $M_C(\mathrm{i}b) \in (-1,1)$ und $1 = M_C(\infty)$ abgebildet. Nach Bem. 1.6 und da K die imaginäre Achse im Winkel $\frac{\pi}{2}$ schneidet, schneidet $M_C(K)$ die reelle Achse $(= M_C(\mathrm{i}\mathbb{R}_\infty))$ auch senkrecht in $M_C(\mathrm{i}b)$. $\implies$ $M_C(K)$ ist symmetrisch zur x-Achse und liegt in $\mathbb{D}$. $\implies$ $M_C(\mathbb{H}_+) \subseteq \mathbb{D}$, mit $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Sei weiter $w \in \mathbb{D}$. Sei K der Kreis durch w und 1, der symmetrisch zur x-Achse ist. Sei $a \in (-1,1)$ der zweite Schnittpunkt von K mit der x-Achse. $\implies$ Es gibt genau ein $b \in (0,\infty)$ mit $a = \dfrac{b-1}{b+1}$. Also: Ist $w \in M_C(\mathrm{i}b+\mathbb{R}_\infty) \implies M_C(\mathbb{H}_+) = \mathbb{D} \implies M_C\colon \mathbb{H}_+ \to \mathbb{D}$ ist biholomorph.

1.2.2 Potenzen und Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Mit $\sqrt[n]{x}$ wird stets die reelle Wurzel bezeichnet. Für $\theta \in (0,\pi]$ definiere den (offenen) Sektor:

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$$

Speziell: $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (geschlitzte Ebene), $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} = \mathbb{C}_+$ (rechte Halbebene)



$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \in \Sigma_\theta \iff r > 0,\ |\phi| < \theta$
(wobei $|\phi| \leq \pi$)

Betrachte: $P_n(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Dann: $P_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi n}$. Also bildet P_n den Halbstrahl $\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\ r > 0\}$ mit Winkel $\phi \in (-\pi,\pi]$ bijektiv auf den Halbstrahl $\{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi n},\ s > 0\}$ mit n-fachem Winkel (modulo 2π) ab.

Setze $p_n := P_n|_{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$. Dann ist $p_n\colon \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \to \Sigma_\pi$ bijektiv.

Beachte: P_n ist schon auf $\overline{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$ nicht mehr injektiv. Beispiel für $n = 2$:

$$+\mathrm{i}, -\mathrm{i} \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}}} = \overline{\mathbb{C}_+},\ P_2(\mathrm{i}) = -1 = P_2(-\mathrm{i}).$$

Definition 1.12. Der Hauptzweig der n-ten Wurzel ist die Umkehrabbildung $r_n = p_n^{-1}\colon \Sigma_\pi \to \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$. Man schreibt $r_n(w) =: w^{\frac{1}{n}}$ für $w \in \Sigma_\pi$.

Per Definition haben wir $r_n(z^n) = z$ $(\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}})$, $r_n(w)^n = w$ $(\forall w \in \Sigma_\pi)$. Es gilt:

$$r_n(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}) = \sqrt[n]{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{n}} \quad (\forall s > 0,\ |\psi| < \pi) \tag{1.5}$$

(denn: $z = \sqrt[n]{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{n}} \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ und $z^n = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$)

Insbesondere: $r_n(x) = \sqrt[n]{x}$ für $x > 0$.

Weiter: $p_n{}'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ $(\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}})$.

Mit Satz 1.8 sind $r_n \in H(\Sigma_\pi)$ und

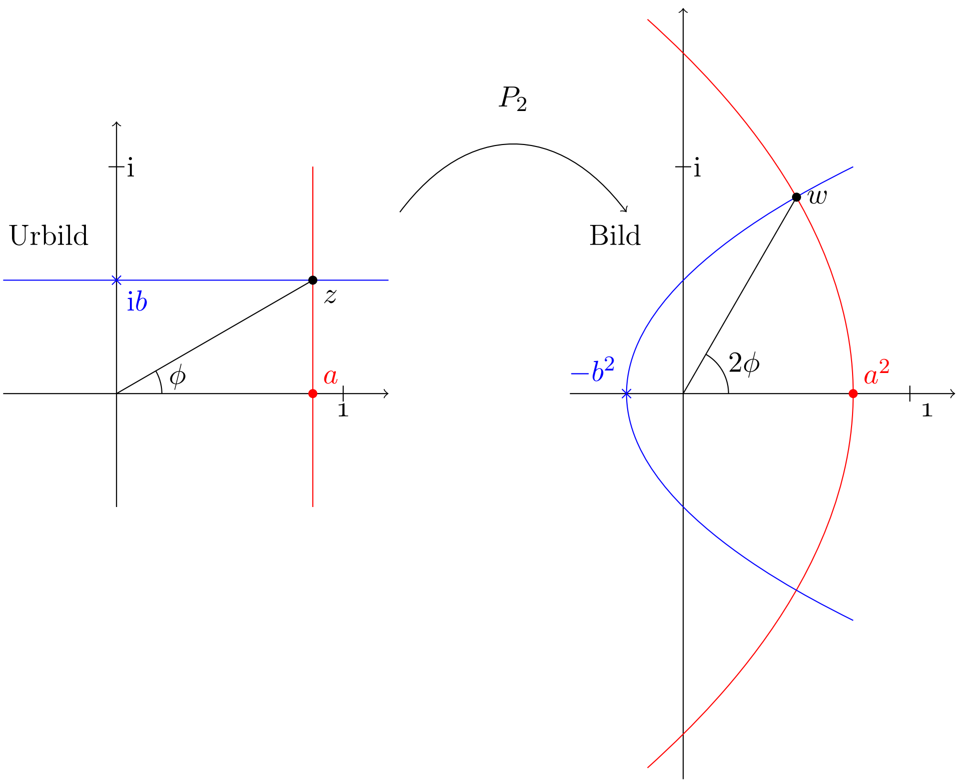
$$\left.\begin{array}{ll} p_n\colon & \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \to \Sigma_\pi \\ r_n\colon & \Sigma_\pi \to \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \end{array}\right\} \text{biholomorph}$$

Abbildungsverhalten der Quadratfunktion

- **Vertikale Gerade** $\operatorname{Re} z = a$ mit einem festen $a > 0$. Also gilt für $z = x + \mathrm{i}y$, dass $w := z^2 = a^2 - y^2 + \mathrm{i} \cdot 2ay$ (mit $a = x$) ($y \in \mathbb{R}$ ist Parameter). Also ist $\operatorname{Im} w = 2ay$, also $y = \frac{\operatorname{Im} w}{2a}$. Damit folgt:

  $$\operatorname{Re} w = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{(\operatorname{Im} w)^2}{4a^2} \leq a^2.$$

  Also ist $\operatorname{Im} w = \pm 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{Re} w}$ eine nach links offene Parabel mit Scheitel $(a^2, 0)$.
- **Horizontale Gerade** $\operatorname{Im} z = b$ mit einem festen $b > 0$. Also gilt für $z = x + \mathrm{i}y$, dass $w := z^2 = x^2 - b^2 + \mathrm{i} \cdot 2bx$ (mit $y = b$) ($x \in \mathbb{R}$ ist Parameter). Wie oben erhält man $\operatorname{Im} w = 2bx$, also $x = \frac{\operatorname{Im} w}{2b}$ und $\operatorname{Re} w = x^2 - b^2$. Also ist $\operatorname{Im} w = \pm 2b\sqrt{b^2 + \operatorname{Re} w}$ eine nach rechts offene Parabel mit Scheitel $(-b^2, 0)$.



Weitere Zweige der Wurzel

Sei $\beta \in (-\pi, \pi]$. Setze

$$E_\beta = \{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta, \beta + 2\pi)\} = \mathbb{C} \setminus \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \mid r \geq 0\}.$$

Sei nun $n = 2$, dann ist

$$W_{\alpha,2} = \{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \mid s > 0, \phi \in (\alpha, \alpha + \pi)\}$$

eine gedrehte Halbebene.
Da $\frac{\beta}{2} < \phi < \frac{\beta}{2} + \pi \iff \beta < 2\phi < \beta + 2\pi$, ist $p_2^o := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2},2}}$ eine Bijektion

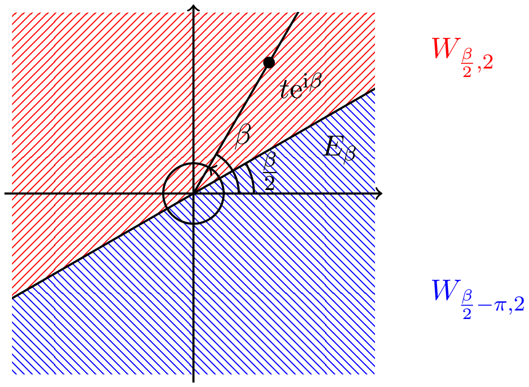
$$p_2^o \colon W_{\frac{\beta}{2},2} \to E_\beta.$$

Da $E_\beta = \{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta - 2\pi, \beta)\}$, ist ebenso $p_2^u := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}}$ eine Bijektion

$$p_2^u \colon W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2} \to E_\beta.$$

Also erhalten wir für jedes $\beta \in (-\pi, \pi]$ genau zwei Zweige der Wurzel

$$r_2^o = (p_2^o)^{-1} \colon E_\beta \to W_{\frac{\beta}{2},2},$$
$$r_2^u = (p_2^u)^{-1} \colon E_\beta \to W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}.$$



Eigenschaften: Sei $t > 0$, $\psi \in (\beta, \beta + 2\pi)$, $z = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Es gilt

- $r_2^o\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}} =: w^o$
  Denn: $(w^o)^2 = \left(\sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\right)^2 = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = z$ und $\frac{\psi}{2} \in (\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} + \pi)$, also $w^o \in W_{\frac{\beta}{2},2}$.
- $r_2^u\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} =: w^u$
  Denn: $(w^u)^2 = \left(\sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\right)^2 = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}} = z$ und $\frac{\psi}{2} - \pi \in (\frac{\beta}{2} - \pi, \frac{\beta}{2})$, also $w^u \in W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}$.

Beispiel. Sei $\beta = \frac{\pi}{4}$. Gefordert ist also im Urbild der Wurzel, dass $\psi \in (\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4})$, sowie $t > 0$.
Sei $\psi = \pi$, $t = 1$, also $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. Dann $r_2^o(-1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$, $r_2^u(-1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{i}$.
Sei $\psi = 2\pi$, $z = t = t\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} > 0$. Dann $r_2^o(t) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\sqrt{t}$, $r_2^u(t) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = \sqrt{t}$.

Entsprechend erhält man für jedes $\beta \in (-\pi, \pi]$ genau n Zweige der n-ten Wurzel (mit jeweils passenden α!).

1.2.3 Exponentialfunktion und Logarithmus

Aus Analysis 1 haben wir: Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gelten:

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \neq 0 \tag{1.6}$$

$$\mathrm{e}^z = \exp(z) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}!) \tag{1.7}$$

$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi\mathrm{i}) \quad (\exp \text{ ist } 2\pi\mathrm{i}\text{-periodisch}) \tag{1.8}$$

$$\mathrm{e}^z = 1 \iff z = 2\pi\mathrm{i}k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \tag{1.9}$$

Mit (1.7) folgt:

- **Horizontale Gerade** $y = \operatorname{Im} z = b$ ($b \in \mathbb{R}$ fest). Die Exponentialfunktion liefert dann einen Ursprungsstrahl $\mathrm{e}^x(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Hierbei ist exp bijektiv, da das reelle exp bijektiv ist.
- **Vertikale Gerade** $x = \operatorname{Re} z = a$ ($a \in \mathbb{R}$ fest). Die Exponentialfunktion bildet diese Gerade ab auf den Kreis $\partial B(0, \mathrm{e}^a)$ (lasse in (1.7) $y \in \mathbb{R}$ laufen). Dies ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Definiere den vertikalen Streifen $S_\mathrm{r}(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (a_1, a_2)\}$ (mit $a_1 < a_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) und den horizontalen Streifen $S_\mathrm{i}(b_1, b_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (b_1, b_2)\}$ (wobei $2\pi k - \pi \leq b_1 < b_2 < 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\exp\colon S_\mathrm{r}(a_1, a_2) \to B(0, \mathrm{e}^{a_2}) \setminus B(0, \mathrm{e}^{a_1})$$

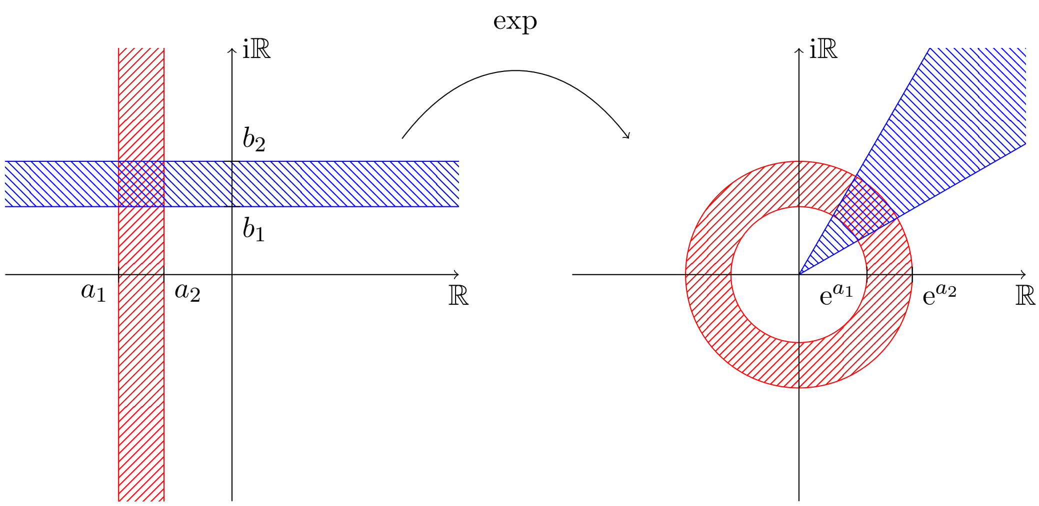
surjektiv, aber nicht injektiv, und

$$\exp\colon S_\mathrm{i}(b_1, b_2) \to \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg z \in (\theta_1, \theta_2)\}$$

bijektiv (wobei $\theta_j = \arg(\cos b_j + \mathrm{i}\sin b_j)$ für $j = 1, 2$).
Sei speziell $S_\mathrm{i} = S_\mathrm{i}(-\pi, \pi)$. Wegen $\cos b_j + \mathrm{i}\sin b_j = 1$, $\theta_1 = -\pi$, $\theta_2 = \pi$, ist dann

$$\exp|_{S_\mathrm{i}}\colon S_\mathrm{i} \to \Sigma_\pi$$

bijektiv.



Definition 1.13. Der *Hauptzweig des Logarithmus* ist

$$\log := (\exp|_{S_\mathrm{i}})^{-1} : \Sigma_\pi \to S_\mathrm{i}.$$

Bemerkung. ln bezeichnet stets den reellen Logarithmus. $\exp|_{S_\mathrm{i}+\mathrm{i}\alpha}$ liefert andere Zweige des Logarithmus auf passenden E_α.

Per Definition gelten

$$\begin{aligned} \log(\exp(z)) &= z \quad (\forall z \in S_\mathrm{i}), \\ \exp(\log(z)) &= z \quad (\forall z \in \Sigma_\pi). \end{aligned}$$

Da für alle z gilt $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$, liefert Satz 1.8, dass

$$\exp\colon S_\mathrm{i} \to \Sigma_\pi, \quad \log\colon \Sigma_\pi \to S_\mathrm{i}$$

biholomorph sind, und es existiert die Ableitung

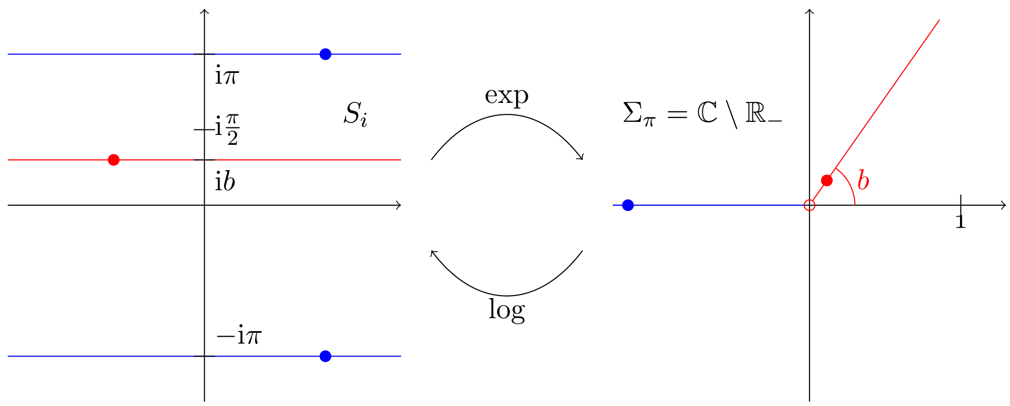
$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w}$$

für alle $w = \mathrm{e}^z \in \Sigma_\pi$, wobei $z \in S_\mathrm{i}$.
Für $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ mit $r > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$\log\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right) = \ln(r) + \mathrm{i}\phi, \tag{1.10}$$

denn $\exp(\ln(r) + \mathrm{i}\phi) \overset{(1.7)}{=} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ und $\ln(r) + \mathrm{i}\phi \in S_\mathrm{i}$.

Beispiel. $\log(r) = \ln(r), \quad \log(i) = \log\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}.$



wobei: $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{e}^x$, $\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{e}^x$, $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ für $x \in \mathbb{R}$, $b \in (-\pi, \pi)$ und es gilt:

$$\log r\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \ln(r) + \mathrm{i}b \tag{1.11}$$

wobei $r > 0$ und $b \in (-\pi, \pi)$, also $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} \in \Sigma_\pi$.

Vorsicht: Logarithmusgesetz gilt in $\mathbb{C}$ nur eingeschränkt. Beispiel: Seien $\phi, \psi \in (-\pi, \pi)$, $\phi + \psi > \pi \implies \phi + \psi - 2\pi \in (-\pi, \pi)$. Damit:

$$\log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}) = \log \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\psi-2\pi)} \overset{(1.11)}{=} \mathrm{i}(\phi + \psi - 2\pi) \neq \mathrm{i}\phi + \mathrm{i}\psi \overset{(1.11)}{=} \log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) + \log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}).$$

Definition 1.14. Seien $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \in \Sigma_\pi$, $r > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi)$, $w = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Setze

$$z^w := \exp(w \log z) \overset{(1.11)}{=} \exp((x + \mathrm{i}y)(\ln(r) + \mathrm{i}\phi)) = \underbrace{\mathrm{e}^{x \ln r}}_{=|z|^x} \mathrm{e}^{-y\phi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\phi + y\ln(r))}.$$

Beispiel. $\mathrm{i}^\mathrm{i} \rightsquigarrow r = 1$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = 1 \implies \mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

Bemerkung 1.15. Seien z, w wie in Definition 1.14, $n \in \mathbb{N}$, $w_k = x_k + \mathrm{i}y_k$ $(k = 1, 2)$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Dann:

(a) $z^n \overset{1.14}{=} \exp(n \log z) \overset{(1.6)}{=} \exp(\log z) \cdots \exp(\log z) \overset{1.14}{=} \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-fach}} \overset{\substack{\text{alte}\\\text{Def.}}}{=} z^n$.

- $z^0 = \exp(0 \log z) = 1$.
- $z^{-1} \overset{1.14}{=} \exp(-\log z) \overset{(1.6)}{=} \dfrac{1}{\exp(\log z)} = \dfrac{1}{z}$.

$\implies$ Def. 1.14 passt zu ganzen Exponenten.

(b) $z^{w_1+w_2} \overset{1.14}{=} \exp((w_1 + w_2) \log z) \overset{(1.6)}{=} \exp(w_1 \log z) \cdot \exp(w_2 \log z) \overset{1.14}{=} z^{w_1} z^{w_2}$

$\implies z = z^{\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}} = \underbrace{z^{\frac{1}{n}} \cdots z^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-fach}} = (z^{\frac{1}{n}})^n$.

$\implies$ Für $w = \frac{1}{n}$ stimmen Definition 1.14 und 1.12 überein.

(c) $\dfrac{\partial}{\partial z} z^w = \dfrac{\partial}{\partial z} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \dfrac{w}{z} \overset{(b)}{=} w z^{w-1}$,

$\dfrac{\partial}{\partial w} z^w = \dfrac{\partial}{\partial w} \exp(w \log z) = \log(z) z^w$.

(d) $|z^w| \overset{1.14}{=} |z|^{\operatorname{Re} w} \mathrm{e}^{-\operatorname{Im}(w)\arg(z)} \leq |z|^{\operatorname{Re} w} \mathrm{e}^{\pi |\operatorname{Im} w|}$.

1.2.4 Sinus und Kosinus

Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ Aus den Reihendarstellungen folgen (Analysis 1):

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z) \tag{1.12}$$

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z), \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \tag{1.13}$$

$$\text{mit (1.12)}: \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \tag{1.14}$$

$$\overset{(1.7)}{\implies} \quad \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)$$

$$= \cos(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\sin(x)\sinh(y) \tag{1.15}$$

$$\text{wobei } \cosh(y) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y + e^{-y}), \ \sinh(y) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})$$

$$\text{Genauso:} \quad \sin z = \sin(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y) \tag{1.16}$$

$\rightsquigarrow$ sin, cos sind in imaginärer Richtung unbeschränkt.

Aus (1.14) folgt ferner (Analysis 1):

$$\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \tag{1.17}$$

Weiter gilt mir (1.14) und (1.6): $\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}_{=\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}_{=-\mathrm{i}}\right) = -\sin(z)$.

Genauso: $\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z$.

$\implies \cos(z+2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z+2\pi) = \sin(z)$.

Nullstellen: $\sin(z) = 0 \overset{(1.14)}{\iff} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \overset{(1.7)}{\iff} \mathrm{e}^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = \mathrm{e}^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} \text{Imaginärteil: } \sin x = 0 \text{ (da } \mathrm{e}^y \neq -\mathrm{e}^{-y}) \\ \text{Realteil: } \cos x = 0 \text{ oder } \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{-y} \text{ } (\iff y = 0) \end{array}\right\} \iff z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Damit: $\cos(z) = 0 \iff z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Zusammengefasst: sin, cos *haben auf* $\mathbb{C}$ *nur die reellen Nullstellen und Perioden.* (1.18)

Wenn der reelle sin *bzw.* cos *auf* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *injektiv ist,*
dann ist der komplexe sin *bzw.* cos *auf* $S_r(a,b)$ *injektiv.* (1.19)

Beweis. (für cos): Nach Vorraussetzung muss cos auf (a,b) strikt monoton sein.
$\implies (a,b) \subseteq (k\pi, (k+1)\pi)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Seien also $z, w \in S_r(a,b)$ (wobei $z \neq w$) $\implies z+w, z-w \neq 2j\pi$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$
$\overset{(1.11)}{\implies} \cos z - \cos w \neq 0$. □

$\implies$ cos ist auf $S_r(0,\pi)$ injektiv, sin ist auf $S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ injektiv.

Bild von cos **auf** $S_r(0,\pi) =: S_r$**:** Horizontale Gerade: $z = x + \mathrm{i}b$ mit $x \in \mathbb{R}$ und festem $b \in \mathbb{R}$.
Mit (1.15):

$$\cos(t) = \cosh(b)\cos(x) + \mathrm{i}\sinh(b)\sin(x)$$

$\implies$ Bild der Geraden ist eine Ellipse $E(b)$ mit Scheiteln $(\pm\cosh(b), 0)$ und $(0, \pm\sinh(b))$.

Für $x \in (0,\pi)$ erhalten wir für $b > 0$ den oberen Bogen von $E(b)$, den unteren Bogen für $b < 0$.
Da $x \neq 0, \pi$ sind diese Bogen ohne die Endpunkte:

$$(\pm\underbrace{\cosh(b)}_{\geq 1}, 0) \implies \cos(S_r) \subseteq D := \mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,\infty)).$$

Klar: $\cos((0,\pi)) = (-1,1)$. Sei $w \in D \setminus (-1,1)$, also $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, da hier $w = u + \mathrm{i}v$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Suche $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$w \in E(b) \iff f(b) := \frac{u^2}{\cosh^2(b)} + \frac{v^2}{\sinh^2(b)} \overset{!}{=} 1.$$

So ein b existiert, da f stetig ist (ZWS): $f(b) \to 0$ für $b \to \pm\infty$, $f(b) \to \pm\infty$ für $b \to 0$, da $v \neq 0$.
$\implies$ $\cos\colon S_r \to D$ bijektiv $\implies$ haben Hauptzweig des Arcuscosinus:

$$\arccos\colon D \to S_r, \quad \arccos = (\cos|_{S_r})^{-1}.$$

Da $\cos'(z) = -\sin(z) \neq 0 \ \forall z \in S_r$ sind

$$\cos\colon S_r \to D, \quad \arccos\colon D \to S_r$$

biholomorph. Mit Verschiebung: $\sin\colon S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to D$ ist biholomorph mit Inversem arcsin.

2 Der Integralsatz von Cauchy

2.1 Das komplexe Kurvenintegral

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig (d.h. für alle $t \in [a,b]$ existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und diese sind bis auf endlich viele $t_k \in [a,b]$ $(k = 1, \dots, m)$ gleich.

$\rightsquigarrow$ f hat endlich viele (oder keine) Sprungstellen.

$\implies$ $\operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ sind beschränkt und messbar.

$\implies \exists \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int f\,\mathrm{d}t := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Setze $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

Eigenschaften: Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen (vgl. Analysis 3):

(a) $\operatorname{Re} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\operatorname{Im} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\overline{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ (folgt direkt aus der Definition)

(b) $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \le (b-a)\|f\|_\infty$ (zum Beweis: setze $h = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} f$)

(c) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Beweis. Für $\alpha = \gamma + \mathrm{i}\delta$, $g = 0$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (\gamma u(t) - \delta v(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b (\delta u(t) + \gamma v(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \gamma \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t - \delta \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\delta \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\gamma \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (\gamma + \mathrm{i}\delta) \int_a^b (u(t) + \mathrm{i}v(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

(d) Seien $f, f_n\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, $f_n \to f$ gleichmäßig $(n \to \infty)$. Dann gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \le (b-a)\|f - f_n\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* in $t_0 \in [a,b]$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} =: f'(t_0)$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ bei t_0 differenzierbar sind. Dann gilt $f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0)$. Wenn f bei allen $t \in [a,b]$ differenzierbar ist und die Ableitung $f'\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig ist, so schreiben wir $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v'(t)\,\mathrm{d}t = u(t)|_a^b + \mathrm{i}v(t)|_a^b = f(b) - f(a). \tag{2.1}$$

Genauso zeigt man: Falls $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig ist, so existiert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s = g(t) \tag{2.2}$$

für jedes $t \in [a,b]$.
Seien $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$ und $\phi \in C^1([\alpha,\beta])$ mit $\phi([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$. Dann gilt die Substitutionsregel

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\phi(s))\phi'(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.3}$$

(Beweis wie im reellen Fall).

Beispiel 2.1. Es gilt $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\frac{1}{z}\mathrm{e}^{zt}\right)'\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\mathrm{e}^{zt}\Big|_a^b = \frac{1}{z}\left(\mathrm{e}^{zb} - \mathrm{e}^{za}\right)$ für jedes $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Definition 2.2. Sei $\gamma \in C([a,b],\mathbb{C})$. Dann heißt $\Gamma = \gamma([a,b])$ *stetige Kurve* oder *Weg* von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ mit Parametrisierung γ. Die Kurve heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ und *einfach*, wenn γ auf $[a,b)$ injektiv ist. Die Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ heißt *stückweise* C^1, wenn $\gamma \in C([a,b],\mathbb{C})$ und es Zahlen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ gibt, sodass die Einschränkung γ_k von γ auf $[t_{k-1},t_k]$ stetig differenzierbar für jedes $k = 1,\ldots,m$ ist. Wir setzen dann $\gamma'(t) = \gamma_k'(t)$ für $t \in [t_{k-1},t_k)$ und $k \in \{1,\ldots,m\}$, $\gamma'(b) = \gamma_m'(b)$. Wenn zusätzlich jedes γ_k eine affine Funktion ist, so heißt Γ *Streckenzug.*

Im Folgenden bezeichnet Γ stets eine Kurve, die stückweise C^1 ist, und γ ist eine Parametrisierung (soweit nichts anderes gesagt wird).

Beispiel 2.3. (a) Die einfach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie $\Gamma = \partial B(c,r)$ hat z.B. die Parametrisierungen $\gamma = c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0,2\pi]$ und $\gamma_1 = c + r\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0,\pi]$. Sie ist einfach und geschlossen.

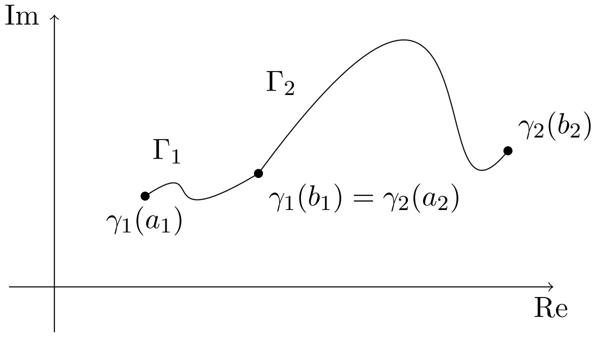
(b) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Die m-fach durchlaufene Kreislinie $\Gamma = \partial B(c,r)$ hat die Parametrisierung $\gamma = c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0,2\pi m]$. Sie ist geschlossen, aber nicht einfach.

(c) Die Strecke $\overrightarrow{wz}$ von w nach $z \neq w$ hat die Parametrisierung $\gamma(t) = w + t(z-w)$ mit $t \in [0,1]$. Sie ist einfach, aber nicht geschlossen.

(d) Seien Γ_1, Γ_2 stückweise C^1-Kurven mit Parametrisierungen $\gamma_j \in C([a_j,b_j],\mathbb{C})$ $(j = 1,2)$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Dann hat der Summenweg $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ die Parametrisierung

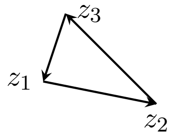
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

Er ist auch stückweise C^1 und verläuft von $\gamma_1(a_1)$ nach $\gamma_2(b_2)$.

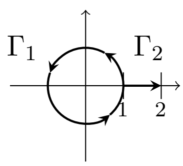


Beispiel:

- Dreiecksweg $\overrightarrow{z_1z_2} + \overrightarrow{z_2z_3} + \overrightarrow{z_3z_1}$:



- Kreis mit Griff $\partial B(c, r) \cup [1, 2]$:



(e) Der Rückwärtsweg $-\Gamma$ wird durch $\hat{\gamma}(t) = \gamma(b - t + a)$ mit $t \in [a, b]$ parametrisiert. Dabei sind $\hat{\gamma}(a) = \gamma(b)$ und $\hat{\gamma}(b) = \gamma(a)$. Er ist auch stückweise C^1 und verläuft von $\gamma(b)$ nach $\gamma(a)$.

Definition 2.4. Seien Γ eine stückweise C^1-Kurve mit Parametrisierung $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ und $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$. Dann heißt

$$\int_\Gamma f \,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \,\mathrm{d}t$$

komplexes Kurvenintegral.

Bemerkung 2.5. Aus den Eigenschaften des komplexen Integrals folgt sofort für $f, g \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma (\alpha f + \beta g)(z) \,\mathrm{d}z = \alpha \int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z + \beta \int_\Gamma g(z) \,\mathrm{d}z.$

(b) $\displaystyle\left|\int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z\right| \leq l(\gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$, wobei $\displaystyle l(\gamma) = \int_a^b \gamma'(t)) \,\mathrm{d}t$ die Kurvenlänge von Γ ist (vgl. Analysis 2/3).

(c) Sei $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ wie in Bsp. 2.3(d). Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z) \,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z) \,\mathrm{d}z.$$

Speziell folgt mit den Bezeichnungen aus Def. 2.2

$$\int_\Gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t) \,\mathrm{d}t.$$

(d) Für den Rückwärtsweg $-\Gamma$ aus Bsp. 2.3(e) gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\hat\gamma(t))\hat\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^b f(\gamma(b-t+a))\gamma'(b-t+a)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{(Substituiere } s=b-t+a\text{)} \\ &= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(e) Das Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltenden Transformationen ϕ von Γ. Das heißt: Wenn $\phi \in C([a,b])$ strikt wachsend und auf jedem der Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ aus Definition 2.2 stetig differenzierbar ist, dann ist $\tilde\gamma := \gamma \circ \phi^{-1}$ auf $[\alpha,\beta] := \phi([a,b])$ stückweise C^1, $\tilde\gamma([a,b]) = \gamma([a,b]) = \Gamma$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z &= \int_\alpha^\beta f(\tilde\gamma(s))\tilde\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^m \int_{\phi(t_{k-1})}^{\phi(t_k)} f(\gamma(\phi^{-1}(s)))\gamma'(\phi^{-1}(s))\,\mathrm{d}(\phi^{-1}(s)) \\ &\underset{t=\phi^{-1}(s)}{\overset{(2.2)}{=}} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(f) Seien $\gamma = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $f = u + \mathrm{i}v$, $\alpha, \beta, u, v \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (u(\gamma(t)) + \mathrm{i}v(\gamma(t)))(\alpha'(t) + \mathrm{i}\beta'(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b u(\gamma(t))\beta'(t) + v(\gamma(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{i}\int_\Gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(x,y).\end{aligned}$$

Beispiel 2.6. (a) Sei $\Gamma = \partial B(c,r)$ m-fach durchlaufen, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ gilt mit $\gamma(t) = c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi m]$:

$$\int_\Gamma (z-c)^k\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi m} (c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - c)^k (c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}r^{k+1} \int_0^{2\pi m} \mathrm{e}^{(k+1)\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t.$$

Mit Beispiel 2.1 erhalten wir:

$$\int_\Gamma (z-c)^k\,\mathrm{d}z = \frac{r^{k+1}}{k+1}(\mathrm{e}^{2\pi m(k+1)\mathrm{i}} - 1) = 0.$$

Nun sei $k = -1$. Dann gilt:

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \int_0^{2\pi m} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi m} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}m.$$

(b) Seien $\Gamma = \overrightarrow{0w}$ und $w \in \Sigma_\pi$. Mit $\gamma(t) = tw$, $t \in [0,1]$, gilt:

$$\int_\Gamma z^{\frac12}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \sqrt{t}w^{\frac12} w\,\mathrm{d}t = w^{\frac32} \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} w^{\frac32}.$$

Satz 2.7. *Seien Γ stückweise C^1, $f_n \in C(\Gamma, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.*

(*a*) *Wenn $f_n \to f$ gleichmäßig für $n \to \infty$, dann folgt*

$$\left| \int_\Gamma f_n(z) \, \mathrm{d}z - \int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq l(\gamma) \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

für $n \to \infty$.

(*b*) *Sei $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann ist die Abbildung*

$$z \mapsto \int_\Gamma h(z, w) \, \mathrm{d}w$$

von D nach $\mathbb{C}$ stetig.

(*c*) *Wenn $\sum_{n \geq 1} f_n(z)$ gleichmäßig in $z \in \Gamma$ konvergiert, dann gilt:*

$$\int_\Gamma \sum_{n=1}^\infty f_n(z) \, \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^\infty \int_\Gamma f_n(z) \, \mathrm{d}z.$$

(*d*) *Sei $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$, sodass für jedes $w \in \Gamma$ die Abbildung $z \mapsto h(z, w)$ von D nach $\mathbb{C}$ differenzierbar ist und $\frac{\partial}{\partial z} h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann existiert*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_\Gamma h(z, w) \, \mathrm{d}w = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial z} h(z, w) \, \mathrm{d}w.$$

Beweis. (a) $\left| \int_\Gamma f_n(z) \, \mathrm{d}z - \int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| = \left| \int_a^b (f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t)))\gamma'(t) \, \mathrm{d}t \right|$

$$\leq \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \leq \|f - f_n\|_\infty \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t = \|f - f_n\|_\infty l(\gamma) \to 0$$

für $n \to \infty$.

(b) Seien $z_n, z_0 \in D$ mit $z_n \to z_0$. Sei $r > 0$, so dass $B = \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $z_n \in B$. Da $(z, w) \mapsto h(z, w)$ auf der kompakten Menge $B \times \Gamma$ gleichmäßig stetig ist, konvergiert $f_n(w) = h(z_n, w)$ gleichmäßig in $w \in \Gamma$ gegen $f(w) := h(z_0, w)$ für $n \to \infty$. Mit (a) folgt die Behauptung.

(c) Folgt aus (a) mit $\sum_{k=1}^\infty f_k$ statt f_n.

(d) Seien $z_0 \in D$, $r > 0$, $z_n \in B := \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ mit $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Sei $w \in \Gamma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0} \right| &\overset{(2.1)}{=} \left| \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(z_0 + t(z_n - z_0), w) \, \mathrm{d}t \right| \\
&\overset{\text{KR}}{=} \left| \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \cdot (z_n - z_0) \, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|z_n - z_0|} \int_0^1 \left| \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \right| \cdot |z_n - z_0| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \left| \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \right| \mathrm{d}t \leq \max_{z \in B, w \in \Gamma} \left| \frac{\partial h}{\partial z}(z, w) \right| =: c_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Weiter ist für eine Parametrisierung $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ von Γ:

$$\frac{1}{z_n - z_0}\left(\int_\Gamma h(z_n, w)\,\mathrm{d}w - \int_\Gamma h(z_0, w)\,\mathrm{d}w\right) = \int_\Gamma \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0}\,\mathrm{d}w$$

$$= \int_0^1 \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Es gilt für $t \in [0,1]$:

$$\left|\frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \cdot \gamma'(t)\right| \leq c_1 \cdot \|\gamma'\|_\infty \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

und die Funktion $c_1\|\gamma'\|\mathbb{1}_{[0,1]}$ ist auf $[0,1]$ integrierbar. Außerdem gilt:

$$\frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \to \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t))$$

für $n \to \infty$.

Majorisierte Konvergenz liefert die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n - z}\left(\int_\Gamma h(z_n, w)\,\mathrm{d}w - \int_\Gamma h(z_0, w)\,\mathrm{d}w\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_\Gamma h(\cdot, w)\,\mathrm{d}w\right)(z_0)$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_\Gamma h(\cdot, w)\,\mathrm{d}w\right)(z_0) &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z - z_0}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\int_\Gamma \frac{\partial h}{\partial z}(\cdot, w)\,\mathrm{d}w\right)(z_0).\end{aligned}$$ □

Erinnerung: Sei X ein Vektorraum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, wenn aus $M \subseteq O_1 \cup O_2$, $M \cap O_1 \neq \varnothing$, $M \cap O_2 \neq \varnothing$ für alle offenen Teilmenge $O_1, O_2 \subseteq X$ stets folgt, dass

$$M \cap O_1 \cap O_2 \neq \varnothing.$$

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

Bemerkung. Aus Analysis 2 wissen wir: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend. Alle zusammenhängenden Intervalle in $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend. Also sind stetige Kurven in X zusammenhängend. (Dabei definieren wir stetige Kurven und Streckenzüge im normierten Vektorraum genau wie in $\mathbb{C}$, vgl. Def. 2.2.)

Satz 2.8. *Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subseteq X$. Dann gelten:*

(*a*) *Für alle $x, y \in M$ gebe es eine stetige Kurve in M von x nach y. Dann ist M zusammenhängend.*

(*b*) *Wenn $M = D$ offen und zusammenhängend ist, dann gibt es für alle $x, y \in D$ einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y.*

Beweis. (a) Seien $O_1, O_2 \subseteq X$ offen mit $M \subseteq O_1 \cup O_2$, $M \cap O_1 \neq \varnothing$, $M \cap 0_2 \neq \varnothing$. ANNAHME: $M \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Wähle ein $x \in M \cap O_1$, $y \in M \cap O_2$. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Kurve $\Gamma \subseteq M$ von x nach y. Damit gilt $\Gamma \subseteq M \subseteq O_1 \cup O_2$, $x \in \Gamma \cap O_1$, also ist $\Gamma \cap O_1 \neq \varnothing$. Ebenso ist $\Gamma \cap O_2 \neq \varnothing$. Ferner ist $\Gamma \cap O_1 \cap O_2 \subseteq M \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing \implies \Gamma$ ist unzusammenhängend: WIDERSPRUCH zur obigen Bemerkung. Also ist M zusammenhängend.

(b) Sei D offen und zusammenhängend und $x \in D$ beliebig. Setze

$$D(x) := O_1 := \{y \in D \mid \exists \text{ Streckenzug } \Gamma(y) \subseteq D \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

Dann ist $x \in O_1 \subseteq D$.

- Sei $y \in O_1$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $B(y,r) \subseteq D$ (da D offen). Sei $z \in B(y,r)$. Dann ist $\overrightarrow{yz} \subseteq B(y,r) \subseteq D$. Somit ist $\Gamma(y) + \overrightarrow{yz} \subseteq D$ ein Streckenzug von x nach z $\implies z \in O_1 \implies B(y,r) \subseteq O_1 \implies O_1$ ist offen in D.
- Seien $y_n \in O_1$ mit $y_n \to y \in D$ $(n \to \infty)$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $B(y,r) \subseteq D$. Wähle (großes) N mit $y_N \in B(y,r) \subseteq O_1$. Dann ist $\Gamma(y_N) + \overrightarrow{y_N y} \subseteq D$ ein Streckenzug von x nach $y \implies y \in O_1 \implies O_1$ ist in D abeschlossen. Also ist $D \setminus O_1 =: O_2$ in D offen, also auch in X offen (da D offen).

ANNAHME: $O_2 \neq \varnothing \iff O_1 \neq D$. Dann: $D = O_1 \,\dot\cup\, O_2$, $D \cap O_1 \neq \varnothing$, $D \cap O_2 = O_2 \neq \varnothing$, $D \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing \implies D$ ist unzusammenhängend WIDERSPRUCH zur Voraussetzung. $\implies O_2 = \varnothing \implies O_1 = D(x) = D$. □

Bemerkung 2.9. Sei X ein normierter Vektorraum, $D \subseteq X$ offen, $x, y \in D$. Die Menge $D(x)$ aus dem Beweis von Satz 2.8(b) ist in D offen und abgeschlossen (gleicher Beweis, auch wenn D nicht zusammenhängend). Satz 2.8(a) angewendet auf $D(x)$ liefert, dass $D(x)$ zusammenhängend ist. Ferner gilt entweder

(a) $D(x) = D(y) \iff$ es existiert ein Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y

oder

(b) $D(x) \cap D(y) = \varnothing \iff$ es existiert kein Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y.

Dann heißen $D(x)$ mit $x \in D$ *Zusammenhangskomponenten* von D. Diese sind also entweder gleich oder disjunkt.

Beweis.
- $\exists\, w \in D(x) \cap D(y) \implies$ es gibt einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y über w. Dies liefert „$\Rightarrow$" in a), „$\Leftarrow$" in b)
- Es gebe einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y. Dann gibt es für alle $z \in D(x)$ eine Streckenzug in D von y nach z über $x \implies z \in D(y)$. Dies liefert schon „$\Rightarrow$" in b). Somit: $D(x) \subseteq D(y)$. Genauso zeigt man $D(y) \subseteq D(x)$. Dies liefert „$\Leftarrow$" in a). □

Satz 2.10. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$ mit $f' = 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Wähle $z_0 \in D$ fest.

(a) Sei $z \in D$ mit $\overrightarrow{z_0 z} \subseteq D$ und $z \neq z_0$. Dann:

$$0 = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f'(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^1 f'(\underbrace{z_0 + t(z - z_0)}_{=\gamma(t)})(z - z_0)\,\mathrm{d}t = (f(z) - f(z_0))(z - z_0),$$

also ist $f(z) = f(z_0)$.

(b) Sei nun $w \in D$ beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von z_0 nach w. Aus endlicher Anwendung von (a) folgt $f(w) = f(z_0)$. $\square$

Bemerkung. Dieser Satz ist falsch für unzusammenhängendes D.

Definition 2.11. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Eine Funktion $F \in H(D)$ mit $F' = f$ heißt *Stammfunktion* von f auf D.

Beispiel. Polynome, exp, sin, cos haben Stammfunktionen auf $\mathbb{C}$. $f(z) = \frac{1}{z}$ hat die Stammfunktion log auf Σ_π.

Bemerkung 2.12. Sei F eine Stammfunktion von f auf einem Gebiet D. Dann sind alle anderen Stammfunktionen von f auf D von der Form $F + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$, denn: Sei $F_1 \in H(D)$ eine weitere Stammfunktion. Dann: $(F - F_1)' = f - f = 0$. Also ist $F - F_1$ konstant nach Satz 2.8. $\implies$ es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $F_1 = F + c$.

Satz 2.13 (vgl. Satz 3.12 Analysis 2)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f besitzt eine Stammfunktion F.*

(b) *Für alle Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$, die beide von einem beliebigen $z \in D$ zu einem beliebigen $w \in D$ laufen, gilt*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(c) *Für alle geschlossenen Kurven $\Gamma \subseteq D$ gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

In diesem Fall folgt für jede Kurve $\Gamma \subseteq D$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$, dass

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ c): Sei $\Gamma \subseteq D$ eine Kurve von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Dann:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma_k(t))\gamma_k'(t)\,\mathrm{d}t \overset{(2.1)}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \big(F(\gamma_k(t_k)) - F(\gamma_k(t_{k+1}))\big) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Also gilt die letzte Behauptung im Falle der Existenz einer Stammfunktion. Wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$, folgt hiermit c) aus a).

c) $\Rightarrow$ b): Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$ wie in b). Dann ist $\Gamma := \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$ eine geschlossene Kurve von $\gamma_1(a)$ nach $\gamma_1(a)$ (über $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$) und es gilt

$$0 \overset{\text{c)}}{=} \int_{\Gamma} f\,\mathrm{d}z \overset{\text{Bem. 2.5}}{=} \int_{\Gamma_1} f\,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_2} f\,\mathrm{d}z.$$

Daraus folgt b).

b) $\Rightarrow$ a): Sei $z_0 \in D$ fest, $z \in D$ beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug $\Gamma(z) \subseteq D$ von z_0 nach z. Setze

$$F(z) = \int_{\Gamma(z)} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Wähle $r > 0$ mit $B(z,r) \subseteq D$. Sei $0 < |h| < r$. Dann sind $-\Gamma(z) + \Gamma(z+h)$ und $\overrightarrow{z(z+h)}$ Kurven in D von z nach $z+h$. Damit:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(F(z+h) - F(z)\big) &\overset{\text{Bem. 2.5}}{=} \frac{1}{h} \int_{-\Gamma(z)+\Gamma(z+h)} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &\overset{\text{b)}}{=} \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z(z+h)}} f(w)\,\mathrm{d}w \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z) \quad (h \to 0) \quad \text{(nach Satz 2.7)}. \quad \square\end{aligned}$$

Beispiel 2.14. (a) Sei Γ ein Weg von z_1 nach z_2. Dann gilt

$$\int_\Gamma \cos z\,\mathrm{d}z = \sin z_2 - \sin z_1.$$

(b) Sei $\varepsilon \in (0,\pi)$ und Γ_ε eine Kurve in Σ_π von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi+\varepsilon)}$ nach $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}$. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)} - \log \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi+\varepsilon)} = \mathrm{i}(\pi-\varepsilon) - \mathrm{i}(-\pi+\varepsilon) = 2\mathrm{i}(\pi-\varepsilon).$$

Ferner gilt

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \neq 0,$$

obwohl $\mathbb{D}$ eine geschlossene Kurve ist. Also besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 2.15. Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dann heißt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z}$$

Windungszahl (oder *Index*) von Γ bei z.

Bemerkung. Da $\Gamma \subseteq B(0,r)$ für ein $r > 0$ ist, gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Satz 2.16. *Seien $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z \in D := \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dann gelten:*

(a) $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

(b) *$z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von D.*

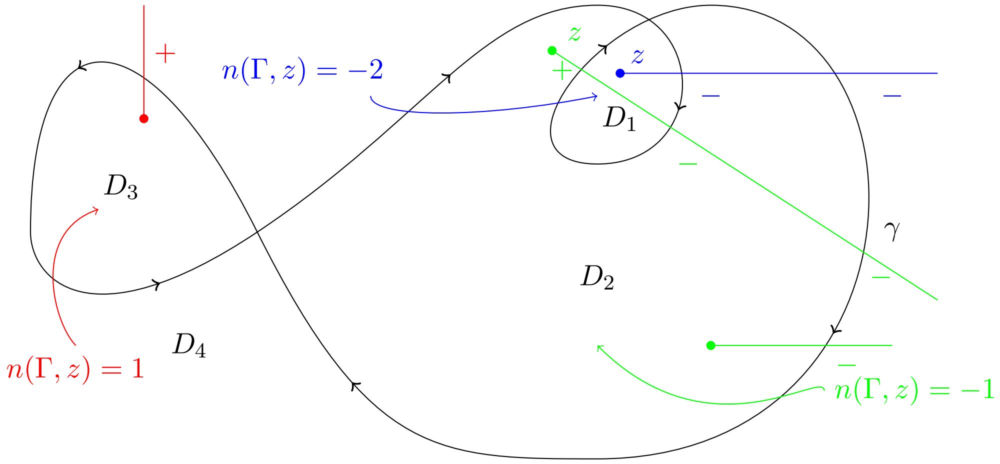
(c) *Es gilt $n(\Gamma, z) = 0$ für alle z in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von D.*

(d) $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$

(e) *Seien Γ_1, Γ_2 geschlossene Kurven mit $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, dann gilt*

$$n(\Gamma, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z).$$

Bild:



D_k sind Zusammenhangskomponenten von $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Beweis. d), e) folgen aus Bem. 2.5.

b) folgt aus a), *denn*: $z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist stetig auf D nach Satz 2.7. Nach Ana II ist dann $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend für jede Zusammenhangskomponente $D(z)$ von $D \ni z$ (vgl. Bem. 2.9).

Da $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{Z}$ (nach a)), enthält $n(\Gamma, D(z))$ genau einen Punkt.

c) $|n(\Gamma, z)| \leq \dfrac{l(\Gamma)}{2\pi} \max\limits_{w \in \Gamma} \dfrac{1}{|w - z|} \to 0$, $|z| \to \infty$. Mit b) folgt daraus c).

a) Seien t_k $(k = 0, \ldots, m)$ wie in Def. 2.2, $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Setze

$$\varphi(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, \mathrm{d}s \quad \text{für} \quad a = t_0 \leq t \leq t_m = b.$$

Beachte:

$$n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z} \overset{(1.10)}{\Longleftrightarrow} 1 = \exp(2\pi \mathrm{i} \cdot n(\Gamma, z)) \overset{\text{Def.}}{=} \exp \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = \varphi(b).$$

Es gelten: $\varphi(a) = 1$, $\varphi \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{C})$ und $\varphi' = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z}$. $\quad (*)$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \overset{(*)}{=} \frac{\varphi\gamma' - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} = 0$$

für $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 0, \ldots, m$.

$$\overset{\int \mathrm{d}t}{\Longrightarrow} \frac{\varphi(t_k)}{\gamma(t_k) - z} = \frac{\varphi(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1}) - z} \qquad (**)$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \varphi(b) = \varphi(t_{m-1}) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} &\underset{k=m-1}{\overset{(**)}{=}} \varphi(t_{m-2}) \frac{\gamma(t_{m-1}) - z}{\gamma(t_{m-2}) - z} \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \\ &= \cdots = \underbrace{\varphi(a)}_{=1} \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = 1,\end{aligned}$$

da $\gamma(a) = \gamma(b)$, da Γ geschlossen. $\square$

Beispiel 2.17. Sei $\Gamma = \partial B(c,r)$ m-fach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Dann:

(a) $n(\Gamma, z) = 0$ für $z \notin \overline{B}(c,r)$ (Satz 2.16(c)).

(b) $n(\Gamma, z) \overset{2.16(c)}{=} n(\Gamma, c) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_0^{2\pi m} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\underbrace{c + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}_{=\gamma(t)} - c}\,\mathrm{d}t = m$, für alle $z \in B(c,r)$.

Bemerkung 2.18. Sei Γ ein geschlossener Weg und L ein Halbstrahl der Form $w = z + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ($\forall t \geq 0$), für feste $c \in \mathbb{C}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, der Γ endlich oft in $\gamma(\tau_1), \ldots, \gamma(\tau_n)$ schneidet.

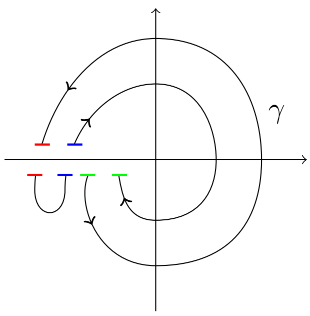
Zähle Berührpunkte τ_j nicht (Γ bleibt auf gleicher Seite von L), zähle die anderen τ_j mit „+1“ falls Γ den Strahl mit wachsendem Argument schneidet und mit „−1“ falls mit fallendem Argument. Dabei sei $z \notin \Gamma$. Dann ist $n(\Gamma, z)$ die Summe der so mit ± 1 gewichteten echten Schnittpunkte (wobei „fallen“ und „wachsen“ bzgl. L gemeint ist).

Beweis. Nach Verschieben, Drehen und Umparametrisieren (falls nötig) von Γ können wir annehmen, dass $z = 0 \notin \Gamma$, $L = \mathbb{R}_-$, $\tau_j \neq a, b$ ($\forall j = 1, \ldots, n$) gilt. Weiter sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{C})$. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass alle $(\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon) \subseteq (a,b)$ disjunkt sind, $j = 1, \ldots, n$. Sei

$$I_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{n} (\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon), \quad \Gamma_\varepsilon = \gamma([a,b] \setminus I_\varepsilon),$$

also die disjunkte Vereinigung aller Teilkurven von Γ, die alle in Σ_π liegen.

Bild:



Damit:

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{[a,b]\setminus I_\varepsilon} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{[a,b]\setminus I_\varepsilon} (\log\gamma(t))'\,\mathrm{d}t$$

(beachte $\gamma(t) \in \Sigma_\pi$ für $t \in [a,b] \setminus I_\varepsilon$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Big(\log\gamma(b) - \log\gamma(\tau_n + \varepsilon) + \log\gamma(\tau_n - \varepsilon) \\ &\qquad - \log\gamma(\tau_{n-1} + \varepsilon) + \cdots + \log\gamma(\tau_1 - \varepsilon) - \log\underbrace{\gamma(a)}_{=\gamma(b)}\Big) \\ &\overset{(1.11)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{j=1}^{n} \Big[\underbrace{\ln|\gamma(\tau_j - \varepsilon)| - \ln|\gamma(\tau_j + \varepsilon)|}_{\to 0,\ \varepsilon\to 0.} + \mathrm{i}\big(\arg\gamma(\tau_j - \varepsilon) - \arg\gamma(\tau_j + \varepsilon)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Dabei gilt für den Imaginärteil:

$$\operatorname{Im} n(\Gamma, 0) \to \begin{cases} \pm\pi - (\pm\pi) = 0 & \text{— Berührpunkt,} \\ +\pi - (-\pi) = 2\pi & \text{— arg wächst,} \\ -\pi - \pi = -2\pi & \text{— arg fällt.} \end{cases} \qquad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

$$\Longrightarrow\ n(\Gamma, 0) = \frac{2\pi \mathrm{i}}{2\pi \mathrm{i}} \left|\#\text{Schnittstellen mit wachsendem Arg.} - \#\text{Schnittstellen mit fallendem Arg.}\right|$$

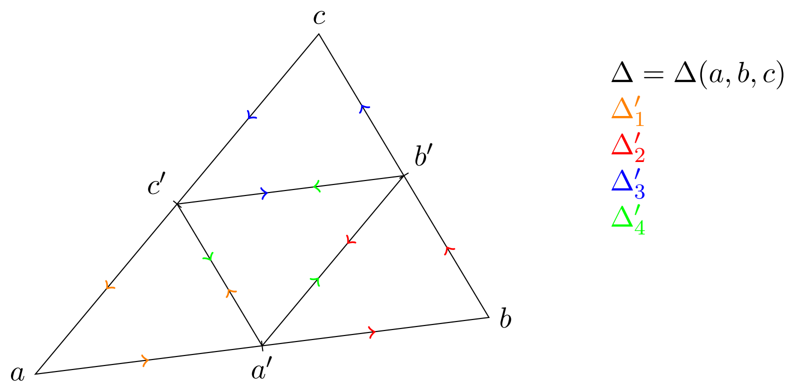
(Falls γ stückweise C^1: füge $(t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon)$ (siehe Def. 2.2) zu I_ε hinzu). □

2.2 Integralsatz und -formel von Cauchy für sternförmige Gebiete

Satz 2.19 (Lemma von Goursat)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w_0 \in \mathbb{C}$, $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$. Sei $\Delta \subseteq D$ eine abgeschlossene Dreiecksfläche. Dann:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

Beweis. (1) *Sei $w_0 \notin \Delta$.* Dann gibt es ein offenes $U \subseteq D$ mit $\Delta \subseteq U$, $f \in H(U)$.



Seitenhalbierung liefert Δ_1' mit Kante $\overrightarrow{a'c'}$ und Ecke a, Δ_2' mit Kante $\overrightarrow{b'a'}$ und Ecke b, Δ_3' mit Kante $\overrightarrow{c'b'}$ und Ecke c, sowie das innere $\Delta_4' = \Delta(a', b', c')$, dessen Rand wir entgegengesetzt mit $\overrightarrow{a'b'} + \overrightarrow{b'c'} + \overrightarrow{c'a'}$ parametrisieren können. Damit:

$$J = \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \underbrace{\int_{\partial\Delta_k'} f \, \mathrm{d}\tau}_{=:J_k'}$$

Die Integrale über innere Kanten treten doppelt mit verschiedenen Vorzeichen auf, kürzen sich also.

Sei J_1 dasjenige der $J_1', \dots, J_4'$ mit größtem Betrag und sei Δ_1 das zugehörige Dreieck. Damit:

$$|J_1| \geq \frac{1}{4} |J|, \quad l(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2} l(\partial\Delta).$$

Iteriere dies. Erhalte Dreiecke Δ_n und

$$J_n = \int\limits_{\partial\Delta_n} f \,\mathrm{d}z \quad \text{mit} \quad l(\partial\Delta_n) = 2^{-n} l(\partial\Delta), \quad |J_n| \geq 4^{-n} |J|. \tag{$*$}$$

Wenn $z, w \in \Delta_n$, dann

$$|z - w| \leq l(\partial\Delta_n) = 2^{-n} l(\partial\Delta). \tag{$**$}$$

Da $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$ $(\forall n)$ ist die Folge der Mittelpunkte z_n der Δ_n eine Cauchyfolge (wegen $(**)$).

$$\Longrightarrow \exists\, z_0 := \lim_{n\to\infty} z_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n.$$

Wenn $\hat{z_0} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$, dann:

$$|z_0 - \hat{z_0}| \overset{(**)}{\leq} 2^{-n} l(\partial\Delta) \quad (\forall n)$$

Für $n \to \infty$ folgt $z_0 = \hat{z_0}$, also $\{z_0\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n \subseteq \Delta \subseteq U$.

Setze $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$. Da f bei z_0 differenzierbar ist (wegen $f \in H(U)$), folgt $g(z) \to 0$ für $z \to z_0$ $(z \in \Delta)$.

Ferner: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$. Mit $\int_{\partial\Delta_n} \cdots \,\mathrm{d}z$ folgt:

$$J_n = \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,\mathrm{d}z}_{=0 \text{ nach } 2.13} + \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z}_{=0 \text{ nach Satz } 2.13} + \int\limits_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow 4^{-n} |J| \overset{(*)}{\leq} |J_n| &= \left| \int\limits_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z \right| \leq \max_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|\, |z - z_0| l(\partial\Delta_n) \\
&\overset{(*),(**)}{\leq} \left(2^{-n} l(\partial\Delta_n)\right)^2 \max_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| \\
&\Longrightarrow |J| \leq l(\partial\Delta_n)^2 \max_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $J = 0$, also die Behauptung im Fall $w_0 \notin \Delta$.

(2) Sei $w_0 \in \Delta$.

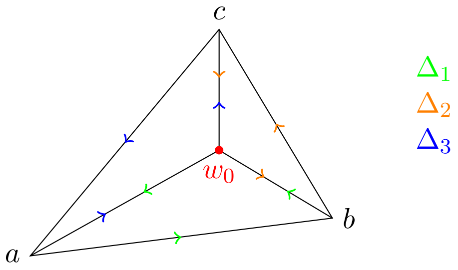
(a) Sei w_0 eine Ecke von Δ. Sei $\varepsilon > 0$. Zerlege Δ wie in (1) per Seitenhalbierung. Wähle dabei stets das Teildreieck mit Ecke w_0. Erhalte Dreiecke $\Delta_1^*, \ldots, \Delta_m^*$ mit disjunktem Inneren, sodass $w_0 \in \Delta_1^*$, $l(\partial\Delta_1^*) \leq \varepsilon$, $w_0 \notin \Delta_k^*$ für $k \geq 2$. Wie in (1) erhalten wir

$$\left| \int\limits_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\partial\Delta_k^*} f\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int\limits_{\partial\Delta_1^*} f\,\mathrm{d}z \right| \leq \varepsilon \underbrace{\sup_{z\in\Delta} |f(z)|}_{<\infty}.$$

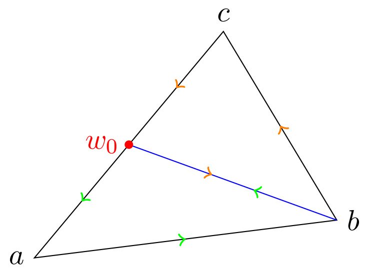
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z = 0$.

(b) Sei $w_0 \in \Delta \setminus \partial\Delta$. Zerlege Δ in $\Delta_1 = \Delta(a,b,w_0)$, $\Delta_2 = \Delta(b,c,w_o)$ und $\Delta_3 = \Delta(c,a,w_0)$. Damit erhalten wir nach (a)

$$\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial\Delta_k} f \,\mathrm{d}z = 0.$$

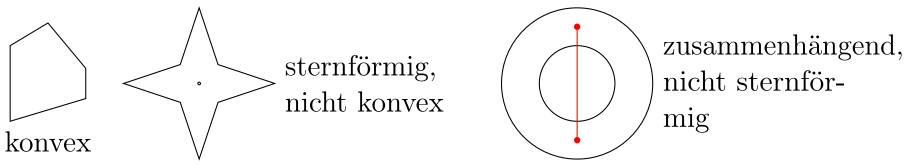


(c) Sei $w_0 \in \partial\Delta$, w_0 keine Ecke. Wie in (b) zerlegen wir Δ in zwei Teildreiecke:

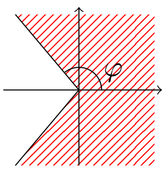


Daraus erhalten wir wieder $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z = 0.$ □

Definition 2.20. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Die Menge M heißt *konvex*, wenn für alle $w, z \in M$ auch $\overrightarrow{wz}$ in M liegt. Die Menge M heißt *sternförmig* mit Zentrum $z_0 \in M$, wenn für alle $w \in M$ auch $\overrightarrow{z_0 w}$ in M liegt.



Klar ist: M konvex $\implies M$ sternförmig und M sternförmig $\implies M$ zusammenhängend (nach Satz 2.8).



Sektoren Σ_π sind sternförmig (mit Zentrum 1) und d ist konvex $\iff \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Theorem 2.21 (Cauchys Integralsatz für sternförmige Gebiete)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$ und $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f \,\mathrm{d}z = 0.$$

Bemerkung. Nach Satz 2.13 ist die Aussage von Theorem 2.21 äquivalent zu: Jedes $f \in H(D)$ besitzt auf D eine Stammfunktion, wenn D sternförmig ist.

Beweis. Sei z_0 das Zentrum von D. Setze für alle $z \in D$

$$F(z) = \int\limits_{\overrightarrow{z_0 z}} f(w)\,\mathrm{d}w = -\int\limits_{\overrightarrow{z z_0}} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Sei $r > 0$ mit $B(z,r) \subseteq D$, $z \in D$ fest, sowie $0 < |h| < r$. Dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(F(z+h) - F(z)\big) &= \frac{1}{h}\Bigg(\int\limits_{\overrightarrow{z_0(z+h)}} f\,\mathrm{d}w + \int\limits_{\overrightarrow{z z_0}} f\,\mathrm{d}w + \int\limits_{\overrightarrow{(z+h)z}} f\,\mathrm{d}w\Bigg) + \frac{1}{h}\int\limits_{\overrightarrow{z(z+h)}} f\,\mathrm{d}w \\ &= \underbrace{\frac{1}{h}\int\limits_{\partial\Delta(z_0,z+h,z)} f\,\mathrm{d}w}_{=0\text{ (Satz 2.19)}} + \underbrace{\frac{1}{h}\int\limits_0^1 f(z+th)h\,\mathrm{d}t}_{\to f(z),\ h\to 0 \text{ nach (2.7)}}.\end{aligned}$$

Also ist $F'(z) = f(z)$. $\square$

Beispiel 2.22. (a) $\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}z}{z+2} = 0$, denn $f(z) = \frac{1}{z+2}$ liegt in $H(D)$ für

$$D = \{C \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -\frac{3}{2}\}.$$

Beachte: D ist sternförmig und offen, $\partial\mathbb{D} \subseteq D$.

(b) Cauchy ist im Allgemeinen falsch für Gebiete mit Löchern, z.B. $\mathbb{C} \setminus \{0\} =: D$. Siehe Bsp. 2.14: $f(z) = \frac{1}{z}$, $f \in H(D)$, $\Gamma = \partial\mathbb{D}$. Dann

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0.$$

Bemerkung. Theorem 2.21 gilt auch, wenn $f \in C(D,\mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$ für ein $w_0 \in D$. Denn Satz 2.19 wurde für solche f bewiesen.

Theorem 2.23 (Cauchys Integralformel für sternförmige Gebiete)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$, $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$n(\Gamma,z)f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w, \quad \forall z \in D \setminus \Gamma. \tag{CIF}$$

Speziell mit $\Gamma = \partial B(z,r) \subseteq D$ für $B(z,r) \subseteq D$ und $z \in B(z,r)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Beweis. Sei $z \in D \setminus \Gamma$ fest. Setze $g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in D \setminus \{z\} \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$.
Dann ist $g \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{z\})$. Die Bemerkung nach Bsp. 2.22 liefert dann

$$0 = \int_\Gamma g(w)\,\mathrm{d}w \overset{z \notin \Gamma}{=} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z) \underbrace{\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z}}_{=2\pi \mathrm{i} n(\Gamma, z)}.$$

Daraus folgt (CIF) und der Spezialfall (2.4). Mit $c = z$ und der Parametrisierung $\gamma(t) = z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ folgt aus (2.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t,$$

also (2.5). □

Beispiel. Es gilt $\displaystyle\int_{\partial B(2,1)} \frac{\sqrt{w}}{w - \frac{3}{2}}\,\mathrm{d}w = 2\pi \mathrm{i} \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Wähle hier $D = B(2, \frac{3}{2})$, $f(w) = \sqrt{w}$. Dann ist D konvex, $f \in H(D)$, $\partial B(2,1) \subseteq D$.

Definition 2.24. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, wenn es für jedes $z \in D$ eine $r(z) > 0$ gibt, sodass $B(z, r(z)) \subseteq D$ und f auf $B(z, r(z))$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z und Koeffizienten $a_n(z)$ besitzt.
Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt *ganz*.

Theorem 2.25 (Entwicklungssatz)**.** *Sei $f \in H(D)$. Dann ist f analytisch auf D.*
Sei ferner $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Seien $n \in \mathbb{N}$, $z \in B(z_0, r)$. Dann gelten die Cauchyformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \tag{2.6}$$

und die Cauchy-Abschätzungen

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \le \frac{n!}{r^n} \max_{|w - z_0| = r} |f(w)|. \tag{2.7}$$

Sei $R(z_0) = \sup\{s > 0 \mid B(z_0, s) \subseteq D\}$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \tag{2.8}$$

für alle $z \in B(z_0, r)$ mit $0 < r < R(z_0)$. Die Reihe in (2.8) konvergiert absolut und gleichmäßig für $z \in B(z_0, r')$ mit $0 < r' < r < R(z_0)$. Wenn f ganz ist, dann gibt es $a_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$), sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Beweis. Seien $z_0 \in D$, $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Seien $w \in \Gamma := \partial B(z_0, r)$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in B(z_0, r)$. Dann existiert

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(w)}{w - z} = n! \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

und

$$(w, z) \mapsto \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(w)}{w - z}$$

ist stetig für $w \in T$, $z \in B(z_0, r)$. Somit folgt aus der (CIF) und Satz 2.7(d) (mit „$D = B(z_0, r)$“), dass f auf D beliebig oft differenzierbar ist und (2.6) gilt. Da $l(\Gamma) = 2\pi r$ und $(w - z_0)^{-n-1} = r^{-n-1}$, folgt (2.7) aus (2.6) (mit $z = z_0$).

Seien nun $0 < r' < r$, $z \in \overline{B}(z_0, r')$. Dann gilt:

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \leq \frac{r'}{r} =: q < 1.$$

Damit:

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n . \tag{$*$}$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für $w \in \Gamma$ und $z \in \overline{B}(z_0, r')$. Dann gilt:

$$f(z) \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \underset{\text{Satz 2.7(c)}}{\overset{(*)}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w}_{\overset{(2.6)}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)} .$$

Damit folgt (2.8). Wenn $D = \mathbb{C}$, wähle $z = 0$, r beliebig groß und erhalte so letzte Bedingung. □

Beispiel 2.26. (a) Das Theorem ist falsch im Reellen, Beispiel aus Analysis 1:

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \implies f$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ (mit $f'(0) = 0$) *aber* f' ist unbeschränkt für $x \to 0_+$, also unstetig und $\nexists f''$.

(2) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \rightsquigarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$ aber $f^{(n)}(0) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, als Taylorreihe von f in 0 ist konstant 0, also ungleich f.

(b) Sei $f(z) = (1 + z)^\alpha$ (wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest, $z \in D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$) $\rightsquigarrow f$ ist holomorph auf D. Aus Theorem 2.25 folgt: f hat Potenzreihe in $z_0 = 0$. Diese ist gleich der Binomialreihe aus Analysis 1. Nach Theorem 2.25 ist der Konvergenzradius $\rho \geq 1$. *Falls* $\rho < 1$ hätten alle Ableitungen von f eine stetige Fortsetzung auf $\partial B(0, 1)$. Das widerspricht der Definition von $f \implies \rho = 1$.

Korollar 2.27. *Gegeben sei eine Borelmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $h \colon D \times X \to \mathbb{C}$, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, mit:*

(a) *$\forall z \in D$ ist $x \mapsto h(z, x)$ integrierbar auf X.*

(b) *$\forall x \in X$ ist $z \mapsto h(z, x)$ holomorph auf D.*

(c) *Es existiert ein integrierbares $g \colon X \to \mathbb{R}_+$ mit $|h(z, x)| \leq g(x)$ $(\forall z \in D,\ x \in X)$.*

Dann ist

$$z \mapsto H(z) := \int_X h(z, x) \, \mathrm{d}x$$

holomorph auf D und es gilt:

$$H^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z, x) \, \mathrm{d}x \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Sei $z_0 \in D, r > 0$ fest (aber beliebig) mit $B(z_0, r) \subseteq D$. Sei $z \in B(z_0, r) \Longrightarrow \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. (2.7) für z und $k \in \mathbb{N}$ liefert

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z,x)\right| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|w-z|=r} |h(w,x)| \overset{\text{n.V.}}{\leq} \frac{h!}{r^k} g(x) \quad \text{(für jedes feste } x \in X.) \tag{$*$}$$

Seien nun $z_n \to z_0$, mit $z_n \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Dann:

$$\begin{aligned} D_n &:= \frac{1}{z_n - z_0}\Big(H(z_n) - H(z_0)\Big) = \int_X \frac{1}{z_n - z_0}\Big(h(z_n, x) - h(z_0, x)\Big)\, \mathrm{d}x \\ &\overset{(2.1)}{=} \int_X \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z} h\right)\Big(z_0 + t(z_n - z_0), x\Big)}_{=:\varphi_n(t,x)} \cdot (z_n - z_0)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

(Vergleiche hierzu das Vorgehen im Beweis zu Satz 2.7(d)).

Es gilt: $\varphi_n(t,x) \to \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x)$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig in $t \in [0,1]$, für jedes feste $x \in X$, da

$$z \mapsto \frac{\partial}{\partial z} h(z,x)$$

stetig ist nach Theorem 2.25. Also:

$$\int_0^1 \varphi_n(t,x)\, \mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \quad (n \to \infty,\ x \in X).$$

Ferner:

$$\left|\int_0^1 \varphi_n(t,x)\, \mathrm{d}t\right| \underset{(k=1)}{\overset{*}{\leq}} \frac{1}{r} g(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ x \in X),$$

wobei $g(x)$ integrierbar ist. Majorisierte Konvergenz liefert:

$$D_n \longrightarrow \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x)\, \mathrm{d}x \quad (n \to \infty).$$

$\Longrightarrow$ H ist bei z_0 differenzierbar $\Longrightarrow$ $H \in H(D)$. Ferner:

$$H'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z,x)\, \mathrm{d}x \quad (\forall z \in D).$$

Beachte: $\frac{\partial}{\partial z} h(z,x)$ ist in x messbar, also liefern Theorem 2.25 und $(*)$ eine iterative Formel für $H^{(k)}$. □

Beispiel 2.28 (Laplacetransformation)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ messbar, so dass für gewisse $w \in \mathbb{R}$, $c > 0$ gilt:

$$|f(t)| \leq c\mathrm{e}^{wt} \quad (\forall t \geq 0).$$

Dann:

$$\exists \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > w$ und ist dort holomorph mit

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} t^n f(t)\, \mathrm{d}t \quad (\forall \lambda \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda > w,\ n \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Setze
$$h(\lambda, t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t) \quad \text{für } t \geq 0,\ \operatorname{Re}\lambda > w.$$
Klar: h ist in λ holomorph ($\forall t \geq 0$).

Sei $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig, $\operatorname{Re}\lambda \geq w + \varepsilon > w$. Dann:
$$|h(\lambda, t)| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\lambda t} |f(t)| \leq \mathrm{e}^{-wt}\mathrm{e}^{-\varepsilon t} |f(t)| \overset{\text{n.V.}}{\leq} c\mathrm{e}^{-\varepsilon t} =: g(t),$$
wobei $g(t)$ integrierbar und unabhängig von λ ist.

Korollar 2.27 liefert Holomorphie von $\hat{f}(\lambda)$ für $\operatorname{Re}\lambda \geq w + \varepsilon$, folglich die Holomorphie für $\operatorname{Re}\lambda > w$, da $\varepsilon > 0$ beliebig. Weiter gilt:
$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^n \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re}\lambda > w).$$
□

Korollar 2.29 (Morera). *Sei $f \in C(D, \mathbb{C})$ so dass*
$$\int_{\partial\Delta} f\,\mathrm{d}z = 0$$
für alle Dreiecke $\Delta \subseteq D$. Dann: $f \in H(D)$.

Beweis. Sei $z \in D$. Wähle $r > 0$ mit $B(z, r) \subseteq D$. Nach dem Beweis von Theorem 2.21 impliziert die Vorraussetzung, dass f auf $B(z, r)$ (sternförmig) eine Stammfunktion $F \in H(B(z, r))$ besitzt. Nach Theorem 2.25 ist $F \in C^2$ und somit ist $f = F'$ differenzierbar auf $B(z, r)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Theorem 2.30 (Liouville). *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei f eine beschränkte ganze Funktion und $z \in \mathbb{C}$. (2.7) mit $n = 1$ liefert:
$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{1}{r} \max_{|z-w|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r}\|f\|_\infty,$$
wobei hier $r > 0$ beliebig ist, da $f \in H(\mathbb{C})$. Mit $r \to \infty$ folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 2.10 ist f konstant. □

Korollar 2.31 (Fundamentalsatz der Algebra). *Ein Polynom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ (mit $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$) hat genau n (eventuell mehrfach gezählte) Nullstellen.*

Beweis. Sei $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass p konstant ist. Setze dazu $f = \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$. Wähle $r > 0$, sodass
$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \geq r.$$
Sei $|z| \geq r$. Dann gilt
$$|p(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - \Big(|a_{n-1}|\,|z|^{n-1} + \cdots + |a_0|\Big) = |a_n|\,|z|^n \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n}\right) \geq \frac{1}{2}\,|a_n|\,r^n.$$

Also ist $f(z) \leq \frac{2}{|a_n| r^n}$, wenn $|z| \geq r$. Ferner ist f auf $\overline{B}(0,r)$ beschränkt als stetige Funktion auf einer kompakten Menge. Damit ist f beschränkt auf ganz $\mathbb{C}$. Mit Liouville (Theorem 2.30) folgt, dass f und damit auch p konstant ist.

Damit hat jedes nichtkonstante Polynom, d.h. jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mindestens eine Nullstelle. Mit Polynomdivision folgt induktiv die Behauptung. □

Definition 2.32. Sei $U \subseteq \mathbb{K}^l$ offen (wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und $f, f_n\colon U \to \mathbb{K}^k$ Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, dass $f_n \to f$ für $n \to \infty$ *kompakt konvergiert* (oder *„gleichmäßig auf kompakten Mengen“*), wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq U$ gilt:

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Bemerkung 2.33. (a) Sei $f_n \to f$ (kompakt) und f_n stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Analysis 2 ist dann f stetig auf K für jedes kompakte K, z.B. $K = \overline{B}(x,r) \subseteq U$. Also ist $f \in C(U, \mathbb{K}^k)$. Im Reellen folgt aber selbst aus $f_n \in C^\infty$ nicht, dass $f \in C^1$. Gegenbeispiel aus Analysis 2: $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ für $x \in (-1,1)$. Hier ist $f_n \in C^\infty((-1,1))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf $(-1,1)$ mit $f(x) = |x|$. Aber f ist bei 0 nicht differenzierbar.

(b) Die Partialsummen einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius ρ konvergieren kompakt auf $B(z_0, \rho)$ gegen f. Im Allgemeinen haben wir aber keine gleichmäßige Konvergenz auf $B(z_0, \rho)$.

Beweis. Sei $K \subseteq B(z_0, \rho)$ kompakt. Nach Satz vom Maximum existiert ein $z_1 \in K$ mit

$$|z_0 - z_1| = \max_{z \in K} |z_0 - z| =: r < \rho,$$

da $z_1 \in K \subseteq B(z_0, \rho)$. Also gilt $K \subseteq \overline{B}(z_0, r) \subseteq B(z_0, \rho)$. Ferner:

$$\max_{z \in \overline{B}(z_0,r)} |a_n| \, |z - z_0|^n \leq |a_n| \, r^n =: b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{b_n} = r \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt{|a_n|} = \frac{r}{\rho} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium gilt dann $\sum_{n=0}^\infty b_n < \infty$. Satz 1.13 (Weierstraß) aus Analysis 2 impliziert, dass die Potenzreihe gleichmäßig und absolut auf $\overline{B}(z_0, r)$ konvergiert, und somit auf K. □

Theorem 2.34 (Konvergenzsatz von Weierstraß)**.** *Seien $f_n \in H(D)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to f$ (kompakt) für ein $f \in C(D, \mathbb{C})$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $f \in H(D)$ und $f_n^{(j)}$ konvergiert kompakt gegen $f^{(j)}$ für $n \to \infty$ und jedes $j \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $\Delta \subseteq D$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt $f_n \to f$ (gleichmäßig) auf $\partial\Delta \subseteq D$ $(n \to \infty)$. Damit:

$$0 \overset{2.19}{=} \int_{\partial\Delta} f_n \, \mathrm{d}z \xrightarrow{2.7} \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z \; (n \to \infty) \quad \implies \quad \int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

Nach Morera (Kor. 2.29) gilt dann $f \in H(D)$.

Sei $r > 0$, $z_0 \in D$ mit $\overline{B}(z_0, 2r) \subseteq D$. Sei $z \in \overline{B}(z_0, r)$. Dann gilt $\overline{B}(z, r) \subseteq \overline{B}(z_0, 2r)$. Da $f - f_n \in H(D)$, folgt mit (2.7), dass

$$\begin{aligned}\max_{z\in\overline{B}(z_0,r)} \left| f^{(j)}(z) - f_n^{(j)}(z) \right| &\leq \max_{z\in\overline{B}(z_0,r)} \max_{|w-z|=r} \frac{j!}{r^j} |f(w) - f_n(w)| \\ &\leq \frac{j!}{r^j} \max_{|w-z|\leq 2r} |f(w) - f_n(w)| \\ &\longrightarrow 0 \ (n \to \infty) \text{ nach Voraussetzung,} \qquad (*)\end{aligned}$$

also $f_n^{(j)} \to f^{(j)}$ auf $\overline{B}(z_0, r)$ $(n \to \infty,\ j \in \mathbb{N})$.

Sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann gibt es für jedes $z_0 \in K$ ein $r(z_0) > 0$ mit $B(z_0, 2r(z_0)) \subseteq D$, da D offen. Klar:

$$K \subseteq \bigcup_{z_0 \in K} B(z_0, r(z_0)).$$

Da K kompakt ist, existieren endlich viele $z_1, \ldots, z_m \in K$ und $r_1, \ldots, r_m > 0$ mit $B(z_k, 2r_k) \subseteq D$ $(k = 1, \ldots, m)$ und $K \subseteq B(z_1, r_1) \cup \cdots \cup B(z_m, r_m)$. $(*)$ angewandt auf $\overline{B}(z_k, r_k)$ liefert die Behauptung. □

2.3 Weitere Hauptsätze über holomorphe Funktionen

Theorem 2.35 (Identitätssatz)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$. Dann sind äquivalent:*

(a) *$f = 0$ auf D.*

(b) *Es gibt ein $z_0 \in D$ mit $f^{(m)}(z_0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.*

(c) *$N = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ hat einen Häufungspunkt $z_0 \in N$, d.h. es gibt eine Folge $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $z_n \to z_0$ und $z_n \in N$.*

Somit sind zwei Funktionen $g, h \in H(D)$ schon gleich, sobald $g(z_n) = h(z_n)$ auf einer Folge $z_n \to z_0$ mit $z_n, z_0 \in D$ und $z_n \neq z_0$ $(n \in \mathbb{N})$ oder sobald für ein $z_0 \in D$ gilt: $g^{(m)}(z_0) = h^{(m)}(z_0)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere sind die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Der Satz ist falsch, wenn D nicht zusammenhängend ist.

Beweis. Die letzte Behauptung folgt mit $f = g - h$ aus „(c)⇒(a)“ bzw. „(b)⇒(a)“.

a) ⇒ c): klar.

c) ⇒ b): Seien $z_n, z_0 \in D$, $z_n \neq z_0$, $f(z_n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$. Dann ist $f(z_0) = 0$.

Annahme: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Theorem 2.25 liefert ein $r > 0$ mit

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}_{=:a_n} (z - z_0)^k \qquad (\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D),$$

wobei $a_m \neq 0$. Damit:

$$g(z) := (z - z_0)^{-m} f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m} \overset{l=k-m}{=} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+m} (z - z_0)^l \quad (z \in B(z_0, r)).$$

Also ist $g \in H(B(z_0, r))$ und $g(z_0) = a_m \neq 0$. Aber $g(z_n) = (z_n - z_0)^{-m} f(z_0) = 0$, wobei $z_n \neq z_0$, $z_n, z_0 \in B(z_0, r)$ und $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$. WIDERSPRUCH zu c). $\Longrightarrow$ b) gilt.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $D_1 := \{z \in D \mid f^{(m)}(z) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0\}$. Nach Vorraussetzung ist $D_1 \neq \varnothing$.

D_1 offen in D: Sei $z \in D_1$. Nach Theorem 2.25 hat f auf einer Kugel $B(z, r)$ eine Potenzreihendarstellung mit Koeffizienten

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0),$$

wegen $z \in D_1$. Daraus folgt $f = 0$ auf $B(z, r)$, also $B(z, r) \subseteq D_1$, also ist D_1 offen.

$D_2 := \{D \backslash D_1\}$ offen: Sei $w \in D_2$. Dann gibt es $l \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(l)}(w) \neq 0$. Nach Theorem 2.25 ist $f^{(l)}$ stetig. Also gibt es ein $r_1 > 0$ mit $B(w, r_1) \subseteq D$ und $f^{(l)}(z) \neq 0$ für alle $z \in B(w, r_1)$. Also gilt $B(w, r_1) \subseteq D_2$, folglich ist D_2 offen.

ANNAHME: $D_2 \neq \varnothing$. Dann ist $D = D_1 \dot\cup D_2$, D_1, D_2 offen, nichtleer. WIDERSPRUCH zu D zusammenhängend.

$$\Longrightarrow \ D_2 = \varnothing \ \Longrightarrow \ D_1 = D \ \Longrightarrow \ \text{(a)}. \qquad \square$$

Bemerkung. Bei (c) muss $z_0 \in D$ vorrausgesetzt werden, *Beispiel:*

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann ist $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

aber $f \neq 0$.

Korollar 2.36 (Nullstellensatz)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$, $f \neq 0$ und $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in D$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$, sowie eine Funktion $g \in H(B(z_0, r))$, sodass*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0), \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0, \quad g(z_0) \neq 0$$

und $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in B(z_0, r)$. (Dabei heißt $m \in \mathbb{N}$ die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle z_0 von f.)

Beweis. Die Behauptung über die Ableitung folgt aus Theorem 2.35. Die Existenz von g folgt aus dem Beweis von Theorem 2.35 „(c) $\Longrightarrow$ (b)“. $\square$

Bemerkung. Im reellen müssen so ein $m \in \mathbb{N}$ und ein g nicht existieren, *Beispiel:*

$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = f'(0) = 0$, aber $f \notin C^2$ und

$$|x|^{-k} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \infty, & k \geq 2, \\ 0, & k = 0, 1, \end{cases}, \quad (x \to \infty).$$

Hier ist „$m = \frac{3}{2}$“.

Korollar 2.37. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$, f nicht konstant und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Menge $N_c = \{z \in D \colon f(z) = c\}$ diskret, d.h.: Für alle $z \in N_c$ gibt es ein $r(z) > 0$, sodass $B(z, r(z)) \cap N_c = \{z\}$.*

Beweis. Wenn N_c nicht diskret ist, dann existiert ein $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = c$ und $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ mit $f(z_n) = c$ und $z_n \longrightarrow z_0$ $(n \to \infty)$. Dann liefert Theorem 2.35 „(c) $\Longrightarrow$ (a)“ für $h = f - c$ die Behauptung, da f nicht konstant ist, also $h \neq 0$ ist. □

Korollar 2.38 (Holomorphe Fortsetzung)**.**

Beispiel 2.39.

Lemma 2.40.

Theorem 2.41 (Gebietstreue)**.**

Beweis. Sei $U \subseteq D$ offen, $z_0 \in U$ fest, aber beliebig. Nach Korollar 2.37 (mit „$c = f(z_0)$“) existiert ein $r > 0$ mit $f(z) \neq f(z_0)$ für alle $z \in \overline{B}(z_0, r) =: B \subseteq U$ mit $z \neq z_0$. Da ∂B kompakt, folgt

$$\exists \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| =: \delta > 0.$$

Sei nun $w \in B(f(z_0), \delta)$ beliebig, aber fest. Dann ist zu zeigen: $w \in f(U)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\exists z_1 \in U : f(z_1) = 2.$$

Für $z \in \partial B$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - w| \geq |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| &\geq 2\delta - \delta = \delta \\ \Longrightarrow \min_{z \in \partial B} |f(z) - w| &\geq \delta. \end{aligned}$$

Lemma 2.40 für $g := f - w$ liefert $z_1 \in B(z_0, r) \subseteq U$ mit $g(z_1) = 0 \iff f(z_1) = w$. Also ist $f(U)$ offen. Wenn U zusammenhängend ist, dann ist $f(U)$ nach Theorem 1.68 (Ana 2) zusammenhängend. □

Bemerkung. Seien X, Y normierte Vektorräume und $D \subseteq X$. Eine Abbildung $f \colon D \to Y$ heißt *offen*, wenn für jede in D offene Teilmenge $U \subseteq D$ die Bildmenge $f(U)$ in Y offen ist. Theorem 2.41 zeigt also die Offenheit aller nichtkonstanten, holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$.

Theorem 2.42 (Maximumsprinzip)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$ nicht konstant.*

(*a*) *Dann hat die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ kein lokales Maximum auf D.*

(*b*) *Wenn ferner $f \in C(\overline{D}, \mathbb{C})$ und D beschränkt ist, dann gilt:*

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Beweis. (a) Annahme: $\exists\, z_0 \in D$, $r > 0$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $(\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D)$.

Wähle $w_n \in \mathbb{C}$ mit $|w_n| > |f(z_0)|$ mit $w_n \to f(z_0)$ $(n \to \infty)$. Nach Theorem 2.41 ist $f(B(z_0, r))$ offen, also

$$\exists\, \delta > 0 : B(f(z_0), \delta) \subseteq f(B(z_0, r)). \tag{$*$}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $w_n \in B(f(z_0), \delta)$. Dann folgt mit $(*)$:

$$\exists\, z \in B(z_0, r) \text{ mit } f(z) = w_n \implies |f(z)| = |w_n| > |f(z_0)| \quad \text{Widerspruch}$$

(b) Nach Vorraussetzung gibt es $z_1 \in \overline{D}$ mit

$$|f(z_1)| = \max_{z\in\overline{D}} |f(z)|\,.$$

Nach (a) gilt $z_1 \in \partial D$. □

Bemerkung. Theorem 2.42(b) ist im allgemeinen falsch für unbeschränkte Gebiete. *Beispiel*:

$$D = \{z \in \mathbb{C}\colon -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}, \quad f(z) = \exp(\exp(z)).$$

Dann ist $f \in H(\mathbb{C})$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \in \partial D$,

$$\left|f\left(x \pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\exp(\mathrm{e}^x \underbrace{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}_{=\pm\mathrm{i}})\right| = 1.$$

Aber $\exp(\exp(x))$ ist unbeschränkt!

Beispiel 2.43 (Potenzreihenentwicklung für gewöhnliche Differentialgleichungen)**.** (allgemeines in Walter: Gewöhnliche DGL) Wir haben Lösungen von

$$\begin{cases} u''(x) + b(x)u'(x) + a(x)u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{$*$}$$

Frage: Hat u eine Potenzreihe? Einfache Antwort mittels Holomorphie!

Voraussetzung: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in D$, a, $b \in H(D)$ und $R > 0$ mit $\overline{B}(0,R) \subseteq D$. Setze

$$M := \max_{|z|\le R}\{|a(z)|\,,\,|b(z)|\}. \tag{$**$}$$

Seien u_0, $u_1 \in \mathbb{C}$ gegeben, löse:

$$\begin{cases} u''(z) + b(z)u'(z) + a(z)u(z) = 0, & z \in D, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Sei $f \in H(B(0,R))$, $r \le R$. Setze

$$\int_0^z f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\overrightarrow{DZ}} f(w)\,\mathrm{d}w, \quad |z| < r.$$

Dann

$$\exists\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^z f(w)\,\mathrm{d}w = \lim_{\substack{h\to 0\\(h\neq 0,\,|z+h|<r)}} \frac{1}{h}\left(\int_0^{z+h} f\,\mathrm{d}w - \int_0^z f\,\mathrm{d}w\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f\,\mathrm{d}w \underset{\substack{\text{vgl. Bew.}\\\text{von 2.13}}}{=} f(z).$$

Damit und mit Satz 2.13 folgt:

$$(2.9) \iff \begin{cases} u(z) = u_0 + \int_0^z u'(w)\,\mathrm{d}w \\ u'(z) = u_1 - \int_0^z \big(a(w)u(w) + b(w)u'(w)\big)\,\mathrm{d}w. \end{cases}$$

Mit „$v = u'$“ definiere

$$\Big(T(u,v)\Big)(z) = \Big(u_0 + \int_0^z v(w)\,\mathrm{d}w,\ u_1 - \int_0^z (au+bv)\,\mathrm{d}w\Big)$$

für $r < \min\{R, 1, \frac{1}{2M}\}$, $z \in B(0,r)$, $(u,v) \in H(B(0,R))^2 \cap C(\overline{B}(0,R))^2 =: E$.

Setze $q = \min\{r, 2m\} < 1$. Dann: $T(u,v) \in E$ und E ist ein Vektorraum mit Norm

$$\|(u,v)\|_\infty = \max_{|z|\le r}\{|u(z)|\,,\ |v(z)|\}.$$

Beh.: $(E, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Beweis. Sei (u_n, v_n) eine Cauchyfolge in E. $\implies$ (u_n), (v_n) sind Cauchyfolgen in $C(\overline{B}(0,r))$ bezüglich der Supremumsnorm. Dies ist ein Banachraum (Ana 2).

$$\implies \exists\, u,v \in C(\overline{B}(0,r)) \text{ mit } u_n \to u,\ v_n \to v \text{ gleichmäßig auf } \overline{B}(0,r).$$

Aus Theorem 2.34 folgt: $u,v \in H(B(0,r))$. Beachte:

$$\|(u_n,v_n) - (u,v)\|_\infty \longrightarrow 0, \quad n \to \infty. \qquad \square$$

Seien (u,v), $(\tilde u, \tilde v) \in E$. Dann:

$$\begin{aligned}
\|T(u,v) - T(\tilde u,\tilde v)\|_\infty &= \max_{|z|\le r}\Bigg\{\bigg|\int_0^z \big(v(w)-\tilde v(w)\big)\,\mathrm{d}w\bigg|,\\
&\qquad\bigg|\int_0^z \Big(a(w)(u(w)-\tilde u(w)) + b(w)(v(w)-\tilde v(w))\Big)\,\mathrm{d}w\bigg|\Bigg\}\\
&\overset{(**)}{\le} \max_{|w|\le|z|\le r}\{\underbrace{|z|}_{\le r}\,|v(w)-\tilde v(w)|\,,\ \underbrace{|z|}_{\le r}(M\,|u(w)-\tilde u(w)| + M\,|v(w)-\tilde v(w)|)\}\\
&\le\ r\underbrace{\max\{r, 2M\}}_{=q<1}\|(u,\tilde u) - (v,\tilde v)\|_\infty
\end{aligned}$$

Banachscher Fixpunktsatz: $\exists!\,(u,v) = T(u,v) \implies u$ löst (2.9) auf $B(0,r)$.

Aus Theorem 2.25 folgt $\exists\, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\begin{cases} u(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n, & \forall z \in B(0,r)\\ c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Ein Beispiel zur Berechnung von c_n: **Hermitesche DGL:**

Gegeben: $\lambda \in \mathbb{R}$, u_0, $u_1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0\\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Hier ist $a(z) = \lambda$, $b(z) = -2z$ ($z \in \mathbb{C}$). Dann folgt nach Satz 1.3

$$-2zu'(z) = -2z\sum_{n=1}^\infty nc_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^\infty (-2nc_n)z^n,$$

$$u'' = \sum_{n=2}^\infty n(n-1)c_n z^{n-2} \overset{k=n-2}{=} \sum_{k=0}^\infty (k+2)(k+1)c_{k+2}z^k$$

für ein $z \in B(0,r)$, r aus (2.10). Dann folgt aus (2.11)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big[(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n\big] z^n = 0, \quad c_0 = u_0,\, c_1 = u_1.$$

$$\xRightarrow{2.35} \begin{cases} (n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n = 0, & n \in \mathbb{N}_0, \\ c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \end{cases} \implies c_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} c_n$$

$$\implies c_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}(2(k-2)-\lambda)(2(k-4)-\lambda)\cdots(-\lambda)c_0, & k \text{ gerade}, \\ \frac{1}{k!}(2(k-2)-\lambda)\cdots(2-\lambda)c_1), & k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Zwei linear unabhängige Lösungen erhält man durch:

1) $c_0 = u_0 = 1$, $c_1 = u_1 = 0$; Lösung:

$$v_{1,\lambda}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{4-\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)}{6!}x^6 - \dots$$

2) $c_0 = 0$, $c_1 = 1$; Lösung:

$$v_{2,\lambda}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \dots$$

Wenn $\lambda = 2m$, $m \in \mathbb{N}_0$: Abbruch der Rekusion wenn

Fall 1: m gerade, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$,

Fall 2: m ungerade, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \lambda = 0,\, m = 0&:\ u_0(x) = 1 \\ \lambda = 2,\, m = 1&:\ u_1(x) = x \\ \lambda = 4,\, m = 2&:\ u_2(x) = 1 - 2x^2 \\ \lambda = 6,\, m = 3&:\ u_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3 \end{aligned}$$

Diese Lösungen erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \, |u_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \tag{+}$$

Man kann zeigen, dass alle anderen Lösungen von (2.11) (+) verletzen.

3 Isolierte Singularitäten

3.1 Klassifikation und Laurentreihe

Definition 3.1.

Beispiel 3.2.

Theorem 3.3.

Beispiel 3.4.

Theorem 3.5.

Bemerkung. (a) Man kann in Theorem 3.5 auf die Voraussetzung des Zusammenhangs verzichten.

(b) todo

Zusatz zu Theorem 3.5: Wenn $f\colon D \to f(D)$ biholomorph, dann gilt nach Satz 1.8(a):

$$f'(z) \neq 0 \quad (\forall z \in D), \qquad \big(f^{-1}\big)'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)} \quad (w \in f(D)).$$

Seien $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben. Wir sagen, dass die *Laurentreihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn ihr *regulärer Anteil*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und ihr *singulärer Anteil*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

konvergiert. Die Laurentreihe ist dann die Summe der beiden Anteile. Entsprechend definiert man absolute beziehungsweise gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta.

Theorem 3.6 (Laurent)**.** *Seien $f \in H(D)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ mit $D_0 = B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$. Für $\rho \in (0, R)$, setze $K_\rho = \partial B(z_0, \rho)$ und*

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_\rho} \frac{f(w)}{w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ für } z \in D_0 \tag{3.2}$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta in D_0. Die Koeffizienten a_n sind dabei eindeutig bestimmt, insbesondere sind sie unabhängig von ρ.

Beweis. 1) *Existenz:* Sei $K \subseteq D_0$ kompakt. Dann existieren

$$0 < s < s + \delta < r - \delta < r < R \text{ mit } s + \delta \leq |z - z_0| \leq r - \delta, \quad \forall z \in K$$

(vgl. den Beweis von Theorem 2.25). Wähle ein $z \in K$. Setze

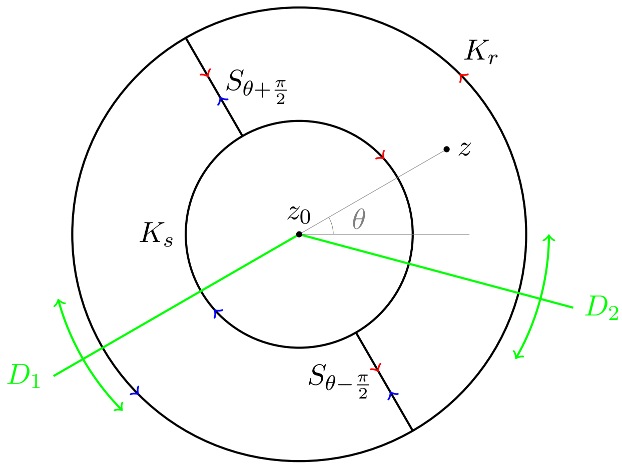
$$\theta = \arg(z - z_0), \quad S_\varphi = \{z_0 + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ s \leq t \leq r\}$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$ und

$$K_\sigma^1 = \left\{ z = z_0 + \sigma \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} : \theta - \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \theta + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad K_\sigma^2 = K_\sigma \setminus K_\sigma^1, \quad \sigma = s, r.$$

Setze weiter

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= K_r^1 + (-S_{\theta+\frac{\pi}{2}}) + (-K_s^1) + S_{\theta-\frac{\pi}{2}}, \\ \Gamma_2 &= K_r^2 + (-S_{\theta-\frac{\pi}{2}}) + (-K_s^2) + S_{\theta+\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \tag{$*$}$$



Beachte: Es gilt: $n(\Gamma_1, z) = 1$, $n(\Gamma_2, z) = 0$, sowie

$$\Gamma_1 \subseteq D_1 := D_0 \setminus S_{\theta+\pi}, \quad \Gamma_2 \subseteq D_2 := D_0 \setminus S_{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

und D_1 und D_2 sind sternförmig.

Die (CIF) auf D_1 beziehungsweise D_2 liefert:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w + \underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w}_{=0} \overset{(*)}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{K_r} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w}_{=:f_1(z)} \underbrace{- \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{K_s} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w}_{=:f_2(z)}.$$

Der obige Ausdruck für f_1 (beziehungsweise für f_2) ist für alle $z \in B(z_0, r)$ (beziehungsweise $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, s)}$) definiert und nach Satz 2.7 dort holomorph.

Nach Theorem 2.25 existieren $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ mit

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w, \quad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{+}$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für z mit $|z - z_0| \le r - \delta$. Für $|z - z_0| \ge s + \delta$ und $|w - z_0| \le s$ gilt:

$$\frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} \le \frac{s}{s + \delta} =: q < 1.$$

Somit:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_s} \frac{f(w)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} \,\mathrm{d}w \overset{q<1}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_s} \frac{f(w)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^k} \,\mathrm{d}w \\ &\overset{\substack{\text{Satz}\\ 2.7}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_s} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-k}} \,\mathrm{d}w}_{=:a_n} (z - z_0)^{-k-1} \end{aligned} \tag{++}$$

mit $n = -k - 1 \in \{-1, -2, \dots\}$. Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für z mit $|z - z_0| \ge s + \delta$. Damit konvergieren auch (+) und (++) absolut und gleichmäßig auf K. Somit ist die Existenz einer Laurentreihe gezeigt.

2) *Eindeutigkeit und* (3.1): Seien $\rho \in (0, R)$ und $b_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$ mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \text{ für } z \in D_0$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz auf K_ρ (z.B. $b_n = a_n$ aus Teil 1 mit $0 < s < \rho < r < R$). Sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \overset{\substack{\text{Satz}\\ 2.7}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_\rho} (w - z_0)^{n-m-1} \,\mathrm{d}w = b_m, \tag{**}$$

wobei nach Beispiel 2.6 gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_\rho} (w - z_0)^{n-m-1} \,\mathrm{d}w = \begin{cases} 0, & n - m - 1 \ne -1, \\ 1, & n - m - 1 = -1. \end{cases}$$

Speziell kann man also in Teil 1 die Radien s, r für a_n durch jedes $\rho \in (s, r)$ ersetzen. Da in Teil 1 s beliebig nahe an 0 und r beliebig nahe an R gewählt werden kann, folgt (3.1) für jedes $\rho \in (0, R)$. Schließlich liefert (**) auch die Eindeutigkeit der Koeffizienten in (3.2). □

Korollar 3.7. *Seien $f \in H(D)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ mit $D_0 = B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ und a_n die Koeffizienten der Laurentreihe ($n \in \mathbb{Z}$). Dann:*

(a) *z_0 hebbar $\iff a_n = 0, \forall n < 0$.*

(b) *z_0 ist Pol m-ter Ordnung $\iff a_n = 0, \forall n < -m$ und $a_{-m} \ne 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.*

(c) *z_0 ist wesentlich $\iff \exists n_j \longrightarrow -\infty$ mit $a_{n_j} \ne 0$ $(\forall j \in \mathbb{N})$.*

Beweis. c) folgt per Negation aus a) und b).

a) und b): Bezeichne (nur hier) eine hebbare Singularität als „Pol 0-ter Ordnung“ (setze dann $m = 0$). Nach Definition ($m = 0$) beziehungsweise nach Theorem 3.3 ($m > 0$) ist z_0 genau dann ein Pol m-ter Ordnung von f, wenn

$$g(z) := (z - z_0)^m f(z)$$

bei z_0 holomorph fortgesetzt werden kann, wobei $g(z_0) \neq 0$, wenn $m > 0$. Nach Theorem 2.25 ist dies genau dann der Fall, wenn g auf einem Kreis $B(z_0, r)$, $r \leq R$, eine Potenzreihe mit Koeffizienten b_n, $n \in \mathbb{N}_0$, besitzt, wobei $b_0 \neq 0$ falls $m > 0$. Also genau dann, wenn

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k-m} \text{ für alle } z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$

Dies ist eine Laurentreihe mit Koeffizienten $a_{-m} = b_0 \neq 0$, wenn $m > 0$.

Also liefert die Eindeutigkeit in Theorem 3.6 die Behautungen a) und b). □

Beispiel 3.8. (a) $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k \overset{(n=-k)}{=} \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$, $(z \neq 0)$, also ist $z = 0$ wesentlich.

(b) $$z^{-6}(\cos(z) - 1) = z^{-6} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-6} \overset{j=k-3}{=} - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+6)!} z^{2j}$$

$$= \underbrace{-\frac{z^{-4}}{2} + \frac{z^{-2}}{4!}}_{\text{sing. Teil}} \underbrace{- \frac{1}{6!} + \frac{z^2}{8!} - \cdots}_{\text{reg. Teil}}$$

für $(z \neq 0)$. Also ist 0 Pol mit $m = 4$.

(c) Sei $z \in B(0, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$. Dann:

$$f(z) = \frac{1+z}{z - z^2} = \frac{1+z}{z} \frac{1}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} 2z^n.$$

Also ist 0 Pol 1. Ordnung.

3.2 Der Residuensatz und reelle Integrale

Definition 3.9. Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f \in H(D)$. Der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe von f bei z_0 heißt *Residuum* $\operatorname{Res}(f, z_0)$ von f bei z_0. Es gilt also

$$\operatorname{Res}(f, z_0) \overset{(3.1)}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0, r)} f(w) \, \mathrm{d}w$$

(wobei $\overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$).

Bemerkung. $f \mapsto \operatorname{Res}(f, z_0)$ ist linear auf $H(D)$.

Theorem 3.10 (Residuensatz). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig, $A = \{z_1, \ldots, z_l\} \subseteq U$, $D = A \setminus U$, $f \in H(D)$ und $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{l} n(\Gamma, z_j)\mathrm{Res}\,(f, z_j). \tag{3.3}$$

Bemerkung. Wenn alle z_j hebbar sind, dann ist $\mathrm{Res}\,(f, z_j) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, l$ und somit hat f eine Fortsetzung in $H(U)$. Also ist der Cauchy-Integralsatz ein Spezialfall von (3.3).

Beweis. Sei $r_j > 0$ mit $D_j := B(z_j, r_j) \setminus \{z_j\} \subseteq D$ für $j = 1, \ldots, l$. Sei weiter

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_j)(z - z_j)^{-n} \quad (\forall z \in D_j) \tag{$*$}$$

der singuläre Anteil der Laurentreihe von f bei z_j mit Koeffizienten $a_{-n}(z_j)$ für $j = 1, \ldots, l$. Nach dem Beweis von Theorem 3.6 kann man g_j holomorph auf $H(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$ fortsetzen (siehe f_2 im dortigen Beweis für beliebig kleine $s > 0$). Wir bezeichnen diese Fortsetzung auch mit g_j. Setze $h_0 = f - g_1 - \cdots - g_l$ auf D. Da $f - g_j$ nach $(*)$ eine Potenzreihe auf D_j ist, hat $f - g_j$ eine holomorphe Fortsetzung in z_j und damit hat h_0 eine holomorphe Fortsetzung $h \in H(U)$.

Mit Theorem 2.21 (Integralsatz) folgt $\int_\Gamma h\,\mathrm{d}z = 0$ (da U sternförmig). Da alle Funktionen auf Γ stetig sind, folgt

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{l}\int_\Gamma g_j\,\mathrm{d}z \overset{(*),(2.7)}{=} \sum_{j=1}^{l}\left(a_{-1}(z_j)\underbrace{\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_j}}_{=2\pi\mathrm{i}\cdot n(\Gamma, z_j)} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n}(z_j)\underbrace{\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_j)^n}}_{=0 \text{ (Bsp. 2.6)}}\right). \qquad \square$$

Lemma 3.11. *Sei z_0 ein Pol m-ter Ordnung von $f \in H(D)$ ($m \in \mathbb{N}$) und g die holomorphe Fortsetzung der Funktion $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ auf eine Kugel $B(z_0, r) \subseteq D$ (vgl. Theorem* **??***). Dann gilt*

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(z).$$

Speziell für $m = 1$:

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z).$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = h(z_0)$*, wenn $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$ für ein $h \in H(B(z_0, r))$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$. Somit ist* (CIF) *ein Spezialfall von* (3.3) *für solche f und $l = 1$.*

Beweis. Nach Theorem 3.6 gibt es ein $r > 0$ mit $D_0 = B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$, $h \in H(B(z_0, r))$ und $a_{-1}, \ldots, a_{-m} \in \mathbb{C}$ mit $a_{-m} \neq 0$ und

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad z \in D_0.$$

Daraus erhält man $g(z) = a_{-m} + \cdots + (z - z_0)^{m-1}a_{-1} + (z - z_0)^m h(z)$, $z \in D_0$, und weiter $g^{(m-1)}(z) = 0 + a_{-1}(m-1)! + (z - z_0)\varphi(z)$ für ein $\varphi \in H(B(z_0, r))$.

$$\Longrightarrow \lim_{z\to z_0} g^{(m-1)}(z) = (m-1)!\,a_{-1}.$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Sei nun f wie in der letzten Behauptung. Wenn $h(z_0) \neq 0$, dann ist z_0 ein Pol erster Ordnung von $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$. Mit der ersten Behauptung mit $m = 1$ folgt $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = h(z_0)$. Falls $h(z_0) = 0$, dann hat h eine Nullstelle n-ter Ordnung ($n \in \mathbb{N}$) bei z_0, also ist z_0 eine hebbare Singularität von f und damit $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = 0 = h(z_0)$. $\square$

Beispiel 3.12. (a) Sei U offen, $z_1, z_2 \in U$, $z_1 \neq z_2$, $g \in H(U)$. Betrachte $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_1)(z-z_2)^2}$ für $z \in D = U \setminus \{z_1, z_2\}$. Es sei $g(z_j) \neq 0$ $(j = 1, 2)$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{z \to z_j} (z - z_j)^j f(z) \neq 0$, also ist z_j ein Pol j-ter Ordnung $(j = 1, 2)$. Mit Lemma 3.11 folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{g(z)}{(z - z_2)^2} = \frac{g(z_1)}{(z_1 - z_2)^2} \neq 0, \\
\operatorname{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \to z_2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z - z_2)^2 f(z) \right) = \lim_{z \to z_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{g(z)}{z - z_1} \\
&= \lim_{z \to z_2} \left(\frac{g'(z)}{z - z_1} - \frac{g(z)}{(z - z_1)^2} \right) = \frac{g'(z_2)}{z_2 - z_1} - \frac{g(z_2)}{(z_2 - z_1)^2}.
\end{aligned}$$

(b) Sei $f(z) = (\cot z)^2 = \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$ für $z \in B(0, \pi) \setminus \{0\} =: D$. Wie in Bsp. 3.4 sieht man: 0 ist Pol zweiter Ordnung, denn $z^2 \cot^2 z = \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 \cos^2 z \to 1$, $z \to 0$. Setze $g(z) = z^2 \cot^2 z$ für $z \in D$. Mit Lemma 3.11 folgt:

$$\operatorname{Res}\left(\cot^2, 0\right) = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z) = \lim_{z \to 0} \left(2z \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} + 2z^2 \cot z \cot' z \right)$$

(Beachte: $\cot' = \frac{1}{\sin^2}$)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \to 0} \left(\underbrace{2 \frac{z}{\sin z} \cos z}_{\to 2} \frac{\sin z \cos z - z}{\sin^2 z} \right) \\
&= 2 \lim_{z \to 0} \underbrace{\frac{z^2}{\sin^2 z}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\frac{1}{2} \sin 2z - z}{z^2}}_{=:Q}.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$Q = \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} (2z)^{2n+1} - z \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2z)^{2n-1}$$

eine Potenzreihe um 0 mit dem Wert 0 an der Stelle 0. Damit folgt $\lim_{z \to 0} Q = 0$ und $\operatorname{Res}\left(\cot^2, 0\right) = 0$.

Reelle Integrale

Beispiel 3.13. Sei $a > 1$. Dann ist

$$J := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a + \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
J &\overset{(1.14)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)} = \frac{2}{\mathrm{i}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^2 + 1} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{=} \frac{2}{\mathrm{i}} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 2az + 1} = \frac{4\pi}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\frac{1}{z - z_2}}{z - z_1} \,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

wobei $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-1} \in \mathbb{R}$, $z_1 \in (-1,1)$, $z_2 < -1$. Damit und mit (CIF) folgt

$$J = 4\pi \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \qquad \square$$

Beispiel 3.14. Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-|t|}$.

Beweis. Sei $t > 0$ (falls $t < 0$: substituiere $y = -x$, setze $s = -t > 0$ in J). Das Integral existiert, da

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+x^2} \right| = \frac{1}{1+x^2},$$

was integrierbar ist. Setze $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$. Dann ist $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\})$ und $\pm\mathrm{i}$ sind einfache Pole. Es gilt

$$J = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \Big(\underbrace{\int_{\Gamma_r} f \,\mathrm{d}z}_{=:J_1} - \underbrace{\int_{K_r} f\, \mathrm{d}z}_{=:J_2} \Big).$$

$$\Gamma_r = [-r, r] + K_r, \qquad K_r : z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le \pi, r > 1$$

Es gilt $\quad J_1 \overset{\text{Thm. 3.10}}{=} 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f, i) \overset{\text{Lem. 3.11}}{=} 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to\mathrm{i}} (z-i) f(z) = 2\pi\mathrm{i} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2 t}}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \pi \mathrm{e}^{-t}$

und $\quad |J_2| \le \pi r \max_{z\in K_r} \left| \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}}{1+z^2} \right| \le \pi r \max_{z \in K_r} \dfrac{\mathrm{e}^{t \operatorname{Re} \mathrm{i}z}}{|z|^2 - 1} \overset{\substack{\mathrm{i}z= \\ r(\mathrm{i}\cos\theta - \sin\theta)}}{=}$

$$\pi r \max_{0\le\theta\le\pi} \frac{\mathrm{e}^{-tr\sin\theta}}{r^2-1} \le \frac{\pi r}{r^2-1} \to 0, \quad r \to \infty. \qquad \square$$

Beispiel 3.15.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Beweis. Existenz: für

$$|x| \ge 1 : x^2 + x^4 \le 2 + 2x^4 \iff \frac{x^2}{1+x^4} \le \frac{2}{1+x^2},$$

was integrierbar ist.

Setze

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} =: \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Dabei hat $h(z) = 1 + z^4$ die 4 Nullstellen

$$w_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}}, \quad k = 0,1,2,3.$$

Dann ist f holomorph auf

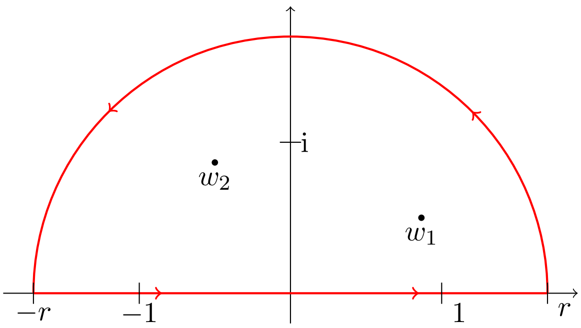
$$D = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > -\frac{1}{2},\ z \ne w_1, w_2\}.$$

Weiterhin gilt nach Übungsaufgabe 22b (da $g(w_k) \neq 0$, $h'(w_k) \neq 0$):

$$\operatorname{Res}(f, w_1) = \frac{g(w_1)}{h'(w_1)} = \frac{w_1^2}{4w_1^3} = \frac{1}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}.$$

Genauso: $\operatorname{Res}(f, w_2) = \frac{1}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Damit gilt:

$$\operatorname{Res}(f, w_1) = \frac{\sqrt{2}}{4(1+\mathrm{i})}, \quad \operatorname{Res}(f, w_2) = \frac{\sqrt{2}}{4(\mathrm{i}-1)}$$



Für $r > 1$:
K_r: $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,
$0 \leq t \leq \pi$

Setze $\Gamma_r = [-r, r] + K_r$. Damit:

$$\int_{-r}^{r} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x + \int_{K_r} \frac{z^2}{1+z^4}\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_r} \frac{z^2}{1+z^4}\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_r} \frac{z^2}{1+z^4}\,\mathrm{d}z \overset{3.10}{=} 2\pi\mathrm{i}(\operatorname{Res}(f, w_1) + \operatorname{Res}(f, w_2))$$

$$= \frac{\mathrm{i}\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}+1} + \frac{1}{\mathrm{i}-1}\right) = \frac{\mathrm{i}\pi}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{i}-1+\mathrm{i}+1}{i^2-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ferner:

$$\left|\int_{K_r} f\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi r \max_{z \in K_r} \left|\frac{z^2}{1+z^4}\right| \leq \pi r \max_{|z|=r} \frac{|z|^2}{|z|^4 - 1} \leq \frac{\pi r^3}{r^4} \longrightarrow 0$$

für $r \to \infty$. Damit folgt die Behauptung. □

Beispiel. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & t \in (-1, 1), \\ \frac{\pi}{2}, & t = \pm 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

ist ganz.

Betrachte $S_R = [-R, -1] + \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \colon -\pi \leq \theta \leq 0\} + [1, R]$ (für $R > 1$). Der Cauchy-Integralsatz (Theorem 2.21) liefert mit $D = \mathbb{C}$:

$$\int_{-S_R + [-R,R]} f\,\mathrm{d}z = 0.$$

Setze:

$$I(R) = \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} e^{itx}\, dx \implies I(R) = \int_{S_R} f\, dz$$

Setze ferner

$$\varphi_R(s) = \frac{1}{2i} \int_{S_R} \frac{e^{isz}}{z}\, dz, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{$+$}$$

Mit $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ folgt $I(R) = \varphi_R(t+1) - \varphi_R(t-1)$. Sei

$$K_R^+ = \{Re^{i\theta} \colon 0 \le \theta \le \pi\}, \quad K_R^- = \{Re^{i\theta} \colon -\pi \le \theta \le 0\},$$
$$\Gamma_R^+ = S_R + K_R^+, \quad \Gamma_R^- = S_R + (-K_R^-).$$

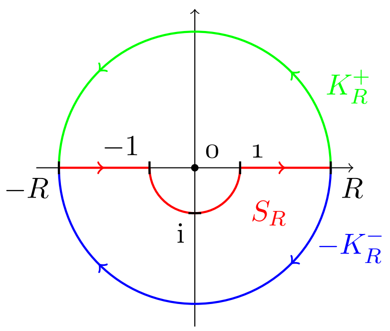
Die (CIF) mit $D = \mathbb{C}$ liefert:

$$\pi = \pi e^{is0} = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{isz}}{z-0}\, dz, \tag{$*$}$$

$$0 = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{isz}}{z}\, dz, \quad \text{da } n(\Gamma_R^-, 0) = 0 \tag{$**$}$$

$$\implies \varphi_R(s) \overset{(**)}{=} \frac{1}{2i} \int_{K_R^-} \frac{e^{isz}}{z}\, dz = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{0} Rie^{\theta} \frac{e^{isRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{0} \exp(isRe^{i\theta})\, d\theta, \tag{$++$}$$

$$\varphi_R(s) \overset{(*)}{=} \pi - \frac{1}{2i} \int_{K_R^+} \frac{e^{isz}}{z}\, dz = \pi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \underbrace{\exp(ise^{i\theta})}_{=:\alpha(R)}\, d\theta \tag{$+++$}$$



Beachte: $|\alpha(R)| = \exp(sR \cdot \mathrm{Re}\,(i\cos\theta + i^2 \sin\theta)) = e^{-sR\sin\theta}$.

Falls $s \cdot \sin\theta > 0$, ist $|\alpha(R)| \le 1$ und es gilt $\alpha(R) \longrightarrow 0$ für alle $R > 1$ mit $R \to \infty$.

Majorisierte Konvergenz folgt aus $(++)$, da $\varphi_R(s) \longrightarrow 0$ $(R \to \infty)$, wenn $s < 0$ und aus $(+++)$, also $\varphi_R(s) \longrightarrow \pi$, wenn $s > 0$. Mit $(**)$ folgt

$$\varphi_R(0) = \frac{\pi}{2}, \quad (\forall R > 1).$$

Setze in $(+)$ $s = t+1$, bzw. $s = t-1$. Dann:

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = \begin{cases} \pi - \pi = 0, & t > 1, \\ \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, & t = 1, \\ \pi - 0 = \pi, & -1 < t < 1, \\ \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, & t = -1, \\ 0 - 0 = 0, & t < -1, \end{cases}$$

wie gewünscht. $\square$

3.3 Das Argumentprinzip

Für $f \in H(D)$ sei $N(f)$ die Menge der Nullstellen von f in D und $m(z) = m_f(z)$ die Vielfachheit von $z \in N(f)$. *Ziel:* Bestimme $N(f)$ und $m(z)$ mit einem Kurvenintegral.

Theorem 3.16 (Argumentprinzip)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$ und $\Gamma \subseteq D$ geschlossene Kurve mit $\Gamma \cap N(f) = \varnothing$. Dann:*

$$\sum_{z_j \in N(f)} m(z_j) n(\Gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = n(\Gamma_f, 0), \tag{3.4}$$

wobei Γ_f die Parametrisierung $f \circ \gamma$ hat und γ die Parametrisierung von Γ ist. Die Summe in (3.4) *hat nur endlich viele Summanden, die nicht 0 sind.*

Beweis. Zur letzten Behauptung: Sei $z \notin D$. Dann ist

$$w \mapsto \frac{1}{w - z}$$

auf D holomorph und somit nach Theorem 2.21

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{1}{w - z} \,\mathrm{d}w = 0, \tag{$*$}$$

da D sternförmig ist.

Annahme: Es gibt $z_n \in N(f)$ mit $z_n \neq z_m$ und $n(\Gamma, z_n) \neq 0$ für alle $n \neq m$ in $\mathbb{N}$. Da $n(\Gamma, z_n) = 0$ in unbeschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ (nach Satz 2.16), ist (z_n) beschränkt. Also gibt es Teilfolgen $z_{n_j} \longrightarrow z (j \to \infty)$.

Da $f \neq 0$ (da $N(f) \cap \Gamma = \varnothing$), liefert der Nullstellensatz (Korollar 2.36), dass

$$z \in \partial D \overset{(*)}{\Longrightarrow} n(\Gamma, z) = 0,$$

aber

$$n(\Gamma, z) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{n(\Gamma, z_n)}_{\in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \neq 0 \quad \text{Widerspruch}\ .$$

Sei $z_0 \in N(f)$ und $m = m(z)$. Nach Korollar 2.36 existieren $r > 0$ und $g \in H(B(z_0, r))$, mit $B(z_0, r) \subseteq D$, $g(z) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad (\forall z \in B(z_0, r)).$$

Damit:

$$\begin{aligned} f'(z) &= m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z) \\ \Longrightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (\forall z \in B(z_0, r)). \end{aligned}$$

Da $\frac{g'}{g}$ holomorph auf $B(z_0, r)$ ist, folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = m.$$

Theorem 3.10 liefert also die erste Gleichung. Weiter:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_a^b \frac{1}{(f\circ\gamma)(t)}(f\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_f}\frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = n(\Gamma_f, 0).\end{aligned}$$

□

Korollar 3.17 (Rouché). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f, g \in H(D)$, $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Es gelte zusätzlich*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad \forall z \in \Gamma. \tag{3.5}$$

Dann gilt:

$$\sum_{z_j \in N(f)} n(\Gamma, z_j) m_f(z_j) = \sum_{w_k \in N(y)} n(\Gamma, w_k) m_g(w_k).$$

Beweis. Da f, g stetig sind und Γ kompakt ist, gibt es ein offenes $U \subseteq D$ mit $\Gamma \subseteq U$, so dass (3.5) für U gilt. Damit: $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und

$$\left|1 - \frac{f(z)}{g(z)}\right| < 1 + \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|, \quad \forall z \in U. \tag{$*$}$$

Annahme: $\frac{f(z)}{g(z)} =: t \in \mathbb{R}_-$ für ein $z \in U$. Dann folgt:

$$1 + |t| = 1 - t \leq |1 - t| \overset{(*)}{<} 1 + |t| \quad \text{Widerspruch}$$

Also gilt: $\dfrac{f(z)}{g(z)} \in \Sigma_\pi \quad (\forall z \in U) \implies h := \log\dfrac{f}{g} \in H(U) \implies h' = \dfrac{1}{\frac{f}{g}}\dfrac{f'g - fg'}{g^2} = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g}.$

Da h' eine Stammfunktion hat, gilt

$$0 = \int_\Gamma h'\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma \frac{g'}{g}\,\mathrm{d}z.$$

Die Behauptung folgt dann aus (3.4). □

Beispiel 3.18. Für festes $\lambda > 1$ hat die Gleichung $\lambda = z + \mathrm{e}^{-z}$ genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}_+$.

Beweis. Betrachte $f(z) = \lambda - z - \mathrm{e}^{-z}$, $g(z) = \lambda - z$ für $z \in D := \mathbb{C}_+$. Dann ist $N(g) = \{\lambda\}$, $m_g(\lambda) = 1$. Wähle $r > \lambda$ und $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$. Setze $\Gamma = \partial B(r, r - \varepsilon) \subseteq D$. Dann $\lambda \in B(r, r - \varepsilon)$. Damit folgt:

$$|f(z) - g(z)| = \left|\mathrm{e}^{-z}\right| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re} z} \overset{z\in\mathbb{C}_+}{<} \lambda - \varepsilon \leq |\lambda - z| = |g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| \quad (\forall z \in \Gamma).$$

Rouché (Theorem 3.17) liefert dann

$$m_g(\lambda) n(\Gamma, \lambda) = 1 = \sum_{z_j \in N(f)} \underbrace{m_f(z_j)}_{\geq 1} n(\Gamma, z_j)$$

und $n(\Gamma, z_j)$ ist 1, wenn $z_j \in B(r, r - \varepsilon)$, und 0 sonst. Also existiert genau eine einfache Nullstelle von f in $B(r, r - \varepsilon)$. Das gilt für alle $r > \lambda$, $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$. Mit $r \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 3.19. Sei D sternförmig mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq D$. Weiter sei $f \in H(D)$ mit $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau n (eventuell mehrfach gezählte) Lösungen von $f(z) = z^n$ mit $z \in D$.

Beweis. Betrachte $g(z) = f(z) - z^n$, $h(z) = -z^n$ für $z \in D$. Dann sind $g, h \in H(D)$. Ferner ist $N(h) = \{0\}$ und $m_h(0) = n$. Wähle $\Gamma = \partial\mathbb{D}$. Dann gilt $|g(z) - h(z)| = |f(z)| < 1 = |h(z)| \leq |g(z)| + |h(z)|$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Rouché liefert dann

$$n = \sum_{z_j \in N(g)} m_g(z_j) n(\partial\mathbb{D}, z_j) = \sum_{z_j \in N(g) \cap \mathbb{D}} m_g(z_j),$$

da $n(\partial\mathbb{D}, z_j) = 1$ für $z_j \in \mathbb{D}$ und 0 sonst. □

Sei $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} \cdots + a_n$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und gegebene $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Frage: Haben alle Nullstellen von p strikt negativen Realteil? (Dann heißt p *stabil.*) Setze $a_j = 0$ für $j > n$, $a_0 = 1$ und

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} \right|,\ \Delta_3 = \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \right|,\ \Delta_4 = \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} \right|,$$

und allgemein Δ_n die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & \ldots\ldots & \ldots & a_{2n-2} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots & & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.20 (Routh-Hurwitz). *Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \neq 0$. Genau dann haben alle Nullstellen von p strikt negativen Realteil, wenn*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0. \tag{3.6}$$

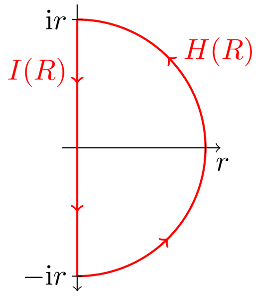
(Gantmacher: Matrix Theory II, AMS, 2000, §XV.6)

Beispiel. (a) $n = 2$: p stabil $\iff a_1 > 0$, $a_2 > 0$

(b) $n = 3$: p stabil $\iff a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1a_2 > a_3$

(c) $n = 4$: p stabil $\iff a_1 > 0$, $a_4 > 0$, $a_1a_2 > a_3$, $a_1a_2a_3 > a_1^2a_4 + a_3^2$

Beweisskizze (nur „$\Leftarrow$“). Behauptung 1: p hat keine Nullstelle auf $\mathrm{i}\mathbb{R}$. Sei N die Anzahl der Nullstellen von p in $\mathbb{C}_+$ (mit Vielfachheit gezählt). Sei $r > r_0 := \max|\lambda| \mid \lambda \in N(p)$, $I(r) = \mathrm{i}[-r, r]$, $H(r) = \{re^{\mathrm{i}\theta} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, $\Gamma(r) = H(r) - I(r)$.



Also

$$n(\lambda, \Gamma(r)) = 1, \qquad \forall \lambda \in N(p) \cap \mathbb{C}_+.$$

Nach Theorem 3.16 gilt:

$$2\pi N = \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{\Gamma(r)} \frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda = \underbrace{\frac{1}{\mathrm{i}} \int_{H(r)} \frac{p'}{p}\, \mathrm{d}\lambda}_{=:J_1(r)} - \underbrace{\frac{1}{\mathrm{i}} \int_{-\mathrm{i}r}^{\mathrm{i}r} \frac{p'}{p}\, \mathrm{d}\lambda}_{=:J_2(r)}. \tag{$*$}$$

Zu J_1:

$$\begin{aligned}
\frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)} &= \frac{n\lambda^{n-1} + a_1(n-1)\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}}{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n} \\
&= \frac{n}{\lambda} \frac{\lambda^{n-1} + a_1(1-\frac{1}{n})\lambda^{n-2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}}{\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda}} \\
&= \frac{n}{\lambda}\Bigg(1 - \underbrace{\frac{\frac{q_1}{n}\lambda^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda}}{\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda}}}_{=:q(\lambda)}\Bigg).
\end{aligned}$$

Weiterhin gibt es $r_1 \geq r_0$, $\mu > 0$ mit

$$|q(\lambda)| \leq \frac{\mu}{|\lambda|}, \qquad \forall \lambda \text{ mit } |\lambda| \geq r_1.$$

Sei $r > r_1$. Dann:

$$J_1(r) = \frac{n}{\mathrm{i}} \int_{H(r)} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} - \underbrace{\frac{n}{\mathrm{i}} \int_{H(r)} \frac{q(\lambda)}{\lambda}\, \mathrm{d}\lambda}_{=:J_3(r)} = \underbrace{\frac{n}{\mathrm{i}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}}{re^{\mathrm{i}\theta}}\, \mathrm{d}\theta}_{=n\pi} - J_3(r).$$

Dabei:

$$\begin{aligned}
|J_3| \leq n\pi r \max_{|\lambda|=r} \frac{|p(\lambda)|}{|\lambda|} \leq \frac{n\pi\mu r}{r^2} \longrightarrow 0, \quad r \to \infty. \\
\implies J_1(r) \longrightarrow n\pi \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen:

$$\lim_{r\to\infty} J_2(r) = n\pi,$$

da dann aus $(*)$ $N = 0$ folgt.

Zu J_2: Sei $\varphi(t) = p(\mathrm{i}t)$, $t \in \mathbb{R}$. Setze

$$K(r) = \varphi([-r, r]) = p([-\mathrm{i}r, \mathrm{i}r]).$$

Dann ist $K(r)$ eine C^1-Kurve von $p(-\mathrm{i}r)$ nach $p(\mathrm{i}r)$ (wobei $r \geq r_1$). Wie im Beweis von 3.10 ist

$$J_2(r) = \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{K(r)} \frac{\mathrm{d}w}{w}.$$

Nach Behauptung 1 ist $p(\mathrm{i}x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $0 \notin K(r)$, also ist das Integral wohldefiniert.

Sei nun n gerade (anderer Fall analog).

Behauptung 2: $K(r)$ schneidet $\mathrm{i}\mathbb{R}$ genau n mal, und zwar entweder vom ersten Quadranten in den zweiten oder vom dritten in den vierten.

Seien $\mathrm{i}y_j = p(\mathrm{i}x_j)$, $(j = 1, \ldots, n)$ die n Schnittstellen aus Behauptung 2, $K_j(r)$ die Teilkurve von $K(r)$ von $\mathrm{i}y_{j-1}$ nach $\mathrm{i}y_j$, für $j = 2, \ldots, n$, $K_1(r)$ die Teilkurve von $p(-\mathrm{i}r)$ nach $\mathrm{i}y_1$, $K_{n+1}(r)$ von $\mathrm{i}y_n$ nach $p(\mathrm{i}r)$.

Auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ betrachte

$$\operatorname{Log}(re^{\mathrm{i}\varphi}) = \ln(r) + \mathrm{i}\varphi, \tag{+}$$

wobei $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$. Dann:

$$\exp \operatorname{Log}(w) = w \quad (w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+), \qquad \operatorname{Log} \exp(z) = z \quad (\operatorname{Im} z \in (0, 2\pi)).$$

Mit Satz 1.8 sieht man wie für log, dass

$$\operatorname{Log}'(w) = \frac{1}{w}, \qquad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

Da n gerade ist, gilt

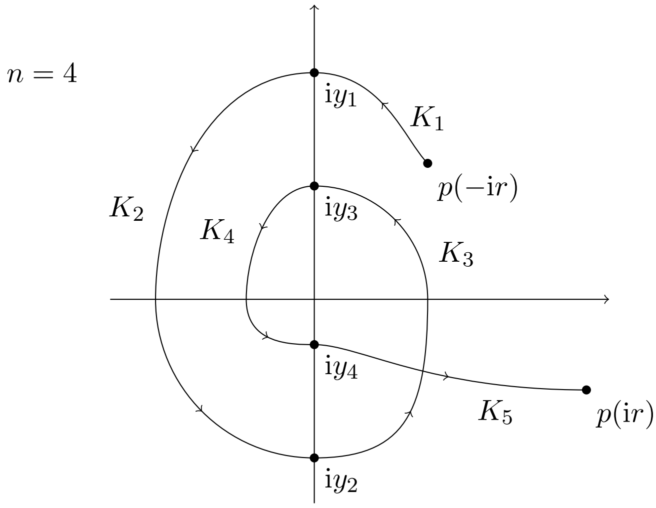
$$p(\pm\mathrm{i}r) = \left((\pm\mathrm{i})^2\right)^{\frac{n}{2}} r^n + c_\pm r^{n-1} + \cdots + a_n = (-1)^{\frac{n}{2}} + c_\pm r^{n-1} + \cdots + a_n$$

für gewisse $c_\pm \in \mathbb{C}$. Für $r \to \infty$ folgen

$$\frac{p(\pm\mathrm{i}r)}{r^n} \longrightarrow (-1)^{\frac{n}{2}}, \qquad \frac{|p(\pm\mathrm{i}r)|}{|p(-\mathrm{i}r)|} = \frac{\frac{|p(\mathrm{i}r)|}{|r^n|}}{\frac{|p(-\mathrm{i}r)|}{|r^n|}} \longrightarrow 1 \qquad (r \to \infty),$$

$$\arg(p(\pm\mathrm{i}r)) = \arg \frac{p(\pm\mathrm{i}r)}{r^n} \longrightarrow \begin{cases} 0, & \frac{n}{2} \text{ gerade}, \\ \pi, & \frac{n}{2} \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{**}$$

Also gibt es $r_2 \geq r_1$, so dass für alle $r > r_2$ $p(\pm\mathrm{i})$ beide entweder in $\mathbb{C}_+$ (wenn $\frac{n}{2}$ gerade) oder in $\mathbb{C}_-$ (wenn $\frac{n}{2}$ ungerade) liegen. Sei im folgenden $\frac{n}{2}$ gerade.



Sei nun r so groß, dass $p(\pm \mathrm{i}r) \in \mathbb{C}_+$. Wegen Behauptungen 1 und 2 gilt: $K_1(r)$ geht von $p(-\mathrm{i}r)$ nach $\mathrm{i}y_1 \in \mathrm{i}(0,\infty)$ durch $\mathbb{C}_+$. $K_{n+1}(r)$ geht von $\mathrm{i}y_n \in -\mathrm{i}(0,\infty)$ nach $p(\mathrm{i}r)$ durch $\mathbb{C}_+$, $K_j(r)$ $(j = 2, \ldots, n)$ läuft von $\mathrm{i}y_{j-1}$ nach $\mathrm{i}y_j$ entweder von $\mathrm{i}(0,\infty)$ durch $\mathbb{C}_-$ nach $-\mathrm{i}(0,\infty)$ oder von $-\mathrm{i}(0,\infty)$ durch $\mathbb{C}_+$ nach $\mathrm{i}(0,\infty)$. Damit:

$$J_2(r) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{K_j(r)} \frac{\mathrm{d}w}{w}.$$

Es gilt: Stammfunktion von $f(w) = \frac{1}{w}$ ist

in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: $\log(w) = \ln(w) + \mathrm{i}\arg(w)$ (nach (1.11))
in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$: $\mathrm{Log}(w) = \ln(w) + \mathrm{i}\phi$, wobei $w = |w|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $|w| > 0$, $\phi \in (0, 2\pi)$ (nach (+))

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ J_2(r) &= \frac{1}{\mathrm{i}}\big(\log(\mathrm{i}y_1) - \log p(-\mathrm{i}r)\big) + \frac{1}{\mathrm{i}} \sum_{\substack{i=2,\ldots,n \\ K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_+}}} \big(\log(\mathrm{i}y_j) - \log(\mathrm{i}y_{j-1})\big) \\
&\quad + \frac{1}{\mathrm{i}} \sum_{\substack{i=2,\ldots,n \\ K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_-}}} \big(\mathrm{Log}(\mathrm{i}y_j) - \mathrm{Log}(\mathrm{i}y_{j-1})\big) + \frac{1}{\mathrm{i}}\big(\log p(\mathrm{i}r) - \log(\mathrm{i}y_n)\big) \\
&\overset{(1.11)}{\underset{(*)}{=}} \frac{1}{\mathrm{i}} \ln|y_1| + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\mathrm{i}} \ln|p(-\mathrm{i}r)| - \arg\big(p(-\mathrm{i}r)\big) + \frac{1}{\mathrm{i}} \ln|p(\mathrm{i}r)| - \frac{1}{\mathrm{i}} \ln|y_n| + \frac{\pi}{2} \\
&\quad + \sum_{K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_+}} \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \ln|y_j| + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\mathrm{i}} \ln|y_{j-1}| + \frac{\pi}{2} \right) \\
&\quad + \sum_{K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_-}} \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \ln|y_j| + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{\mathrm{i}} \ln|y_{j-1}| - \frac{\pi}{2} \right) \\
&= n\pi + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{i}} \ln|y_j| - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{\mathrm{i}} \ln|y_{j-1}| + \frac{1}{\mathrm{i}} \ln \frac{|p(\mathrm{i}r)|}{|p(-\mathrm{i}r)|} + \arg\big(p(\mathrm{i}r)\big) - \arg\big(p(-\mathrm{i}r)\big) \\
&\longrightarrow n\pi \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Wegen $(**)$ sind wir fertig.

Zum Beweis von Behauptungen 1 und 2: Sei n gerade, $x \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\mathrm{i}x) &= (\mathrm{i}^2)^{\frac{n}{2}} x^n + a_1 \mathrm{i}(\mathrm{i}^2)^{\frac{n-2}{2}} x^{n-1} + a_2 (\mathrm{i}^2)^{\frac{n}{2}-1} x^{n-2} + \cdots + \mathrm{i} a_{n-1} x + a_n \\ &= \underbrace{(-1)^{\frac{n}{2}} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n}_{=: f_1(x) = \mathrm{Re}\,(p(\mathrm{i}x))} + \mathrm{i} \underbrace{\big((-1)^{\frac{n}{2}-1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x\big)}_{=: f_2(x) = \mathrm{Im}\,(p(\mathrm{i}x))}. \end{aligned}$$

Gantmacher §XV.6 (33) und §XV.3 besagt, dass aus (3.6) folgt: Im euklidischen Algorithmus

$$f_{k-1} = q_k f_k - f_{k+1} \tag{$***$}$$

treten Polynome f_k, $k = 1, \ldots, n+1$ mit Grad $n+1-k$, also $f_{n+1} \neq 0$ ist konstant, auf.

Weiter haben die f_k führende Koeffizienten ungleich 0 mit wechselndem Vorzeichen. (++)

Damit:

$$f_{k-1},\ f_k \ (k = 2, \ldots, n+1) \text{ haben keine gemeinsamen Nullstellen,} \tag{$+++$}$$

da sonst $f_{k+1}(x_0) = 0$ aus $(***)$ folgen würde. Iterativ folgt dann $f_{n+1}(x_0) = 0$: Widerspruch . Also haben f_1 und f_2 keine gemeinsame Nullstelle, das heißt

$$p(\mathrm{i}x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

womit Behauptung 1 gezeigt ist.

Sei $V(x)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n+1}(x)$ (wobei $f_k(x) = 0$ ignoriert wird). Dann folgt nach (++)

$$\exists\, \alpha < \beta : V(x) = 0 \quad \forall x \leq \alpha, \qquad V(x) = n \quad \forall x \geq \beta. \tag{$\times$}$$

$V(x)$ kann sich nur beim Durchgang eines f_k durch eine Nullstelle ändern. Nach (+++) behalten dabei f_{k-1}, f_{k+1} ihr Vorzeichen. Falls $f_k(x_0) = 0$ für ein $k \geq 2$, liefern $(***)$ und (+++), dass

$$f_{k-1}(x_0) - f_{k+1}(x_0) < 0.$$

Wegen Stetigkeit gilt dies auch für $x \approx x_0$, zum Beispiel haben $f_{k-1}(x)$, $f_k(x)$, $f_{k+1}(x)$ die Vorzeichen $+,+,-$ für $x' < x_0$, $+,0,-$ für $x' = x_0$, $+,-,-$ für $x' > x_0$, also ist $V(x) = V(x')$. Das gilt auch für die anderen Fälle, das heißt $V(x)$ ändert sich nicht bei Nullstellen von $f_2, \ldots, f_{n+1}$. Wenn f_1 das Vorzeichen wechselt, ändert sich V um ± 1 (da nach (+++) das Vorzeichen von f_2 gleich bleibt). Nach $(\times)$ muss $V(x)$ bei $x = x_k$ um $+1$ ansteigen. Dazu: Für $x < x_k$, $x \approx x_k$ gilt für die Vorzeichen von $f_1(x)$, $f_2(x)$: $++$, $+-$, $-+$, $--$ und für $x > x_k$, $x \approx x_k$: $-+$, $--$, $++$, $+-$. Nur bei Übergängen von $++$ zu $-+$ und $--$ zu $+-$ steigt $V(x)$ an, also können nur solche auftreten. Das entspricht Übergängen von dem 1. in den 2. Quadranten, beziehungsweise von dem 3. in den 4. Quadranten. Damit ist Behauptung 2 gezeigt. □

Beispiel 3.21 (Grundmodell der Virendynamik, Nowak, May 2000)**.** Sei

$$\begin{aligned} V(t) &= \text{Anzahl der Viren zur Zeit } t \geq 0 \\ Z(t) &= \text{Anzahl der gesunden Zellen zur Zeit } t \geq 0 \\ I(t) &= \text{Anzahl der infizierten Zellen zur Zeit } t \geq 0 \end{aligned}$$

und es seien Konstanten $\lambda, m, \mu, \nu, k, r > 0$ und Anfangswerte $V_0, Z_0, I_0 \geq 0$ gegeben. Betrachte

$$\begin{cases} V'(t) = kI(t) - \nu V(t), & t \geq 0 \\ Z'(t) = \lambda - mZ(t) - rV(t)Z(t), & t \geq 0 \\ I'(t) = rV(t)Z(t) - \mu I(t), & t \geq 0 \\ V(0) = V_0,\ Z(0) = Z_0,\ I(0) = I_0. \end{cases}$$

Setze $u = (V, Z, I)$, rechte Seite $=: f(u)$. Klar: $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Nach Picard-Lindelöf existiert genau eine Lösung. Weiter kann man zeigen, dass diese für alle $t \geq 0$ existiert und positiv ist. Wir suchen eine positive stationäre Lösung $u(t) = u_0 = (V_0, Z_0, I_0)$ für alle $t \geq 0$, d.h. $u'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, also $f(u_0) = 0$. Dies gilt entweder für $(\overline{V}, \overline{Z}, \overline{I}) = (0, \frac{\lambda}{m}, 0)$ („krankheitsfrei") oder für

$$u_* = (V_*, Z_*, I_*) = \left((R-1)\frac{m}{r}, \frac{\lambda}{mR}, (R-1)\frac{m\nu}{rk}\right)$$

(„endemisch") mit Reproduktionsrate $R = \frac{kr\lambda}{m\mu\nu} > 1$.

Frage: Gilt $u(t) \to u_*$ für $t \to \infty$ $(R > 1)$?

Analysis 2: einfache Antwort: Theorem von Lyapunov: Sei $R > 1$, $A = f'(u_*)$. Wenn $S(A) = \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\} < 0$, dann existieren $c, \delta, \varepsilon > 0$, sodass für alle $u_0 > 0$ mit $|u_0 - u_*| \leq \delta$ gilt: $|u(t) - u_*| \leq c\mathrm{e}^{-\varepsilon t}$ $(\forall t \geq 0)$ (Aulbach: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Theorem 7.6.3 und Beweis). Hier ist

$$A = f'(V_*, Z_*, I_*) = \begin{pmatrix} -\nu & 0 & k \\ -rZ_* & -m - rV_* & 0 \\ rZ_* & rV_* & -\mu \end{pmatrix}$$

und das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + \underbrace{(\nu + m + rV_* + \mu)}_{=a_1}\lambda^2 + \underbrace{(\mu + \nu)(m + rV_*)}_{=a_2}\lambda + \underbrace{\mu\nu rV_*}_{=a_0}.$$

Da $V_* > 0$, gilt $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 > a_3$. Nach Theorem 3.20 ist dann $S(A) < 0$. Also: wenn $u_0 \approx u_*$, dann $u(t) \to u_*$ exponentiell. Mehr Infos: Prüss, Schnaubelt, Zacher: Mathematische Biologie, §13.

4 Ergänzungen

4.1 Die homotope Version des Cauchyschen Integralsatzes

Definition 4.1. Seien X ein normierter Vektorraum, $D \subseteq X$ offen und $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq D$ stetige geschlossene Wege mit Parametrisierungen $\gamma_0, \gamma_1 \in C([a,b], X)$. Die Wege Γ_0 und Γ_1 heißen homotop über D, wenn es eine Funktion $h \in C([0,1] \times [a,b], X)$ gibt, so dass

$$\begin{gathered} h(s,t) \in D, \quad h(0,t) = \gamma_0(t), \quad h(1,t) = \gamma_1(t) \\ \text{und } h(s,a) = h(s,b) \quad \forall (s,t) \in [0,1] \times [a,b]. \end{gathered}$$

Die Funktion h heißt dann Homotopie und man schreibt

$$\Gamma_0 \underset{D}{\sim} \Gamma_1 \text{ oder } \gamma_0 \underset{D}{\sim} \gamma_1.$$

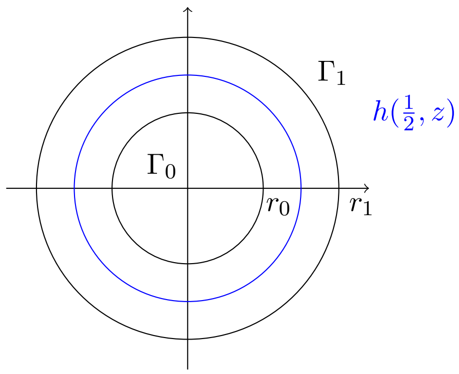
Falls dabei $\Gamma_1 = \{x_0\}$, also $\gamma_1(t) = x_0$ für alle $t \in [a,b]$ und ein $x_0 \in D$, so heißt Γ_0 nullhomotop, und man schreibt $\Gamma_0 \sim 0$. Wenn alle geschlossenen Wege nullhomotop sind, dann heißt D einfach zusammenhängend.

Beispiel 4.2. (a) Seien $\Gamma_j = \partial B(0, r_j)$ mit

$$\gamma_j(t) = r_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad j = 0,1, \quad 0 < r_0 < r_1, \quad D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann sind die Kreislinien Γ_0 und Γ_1 über D homotop mit

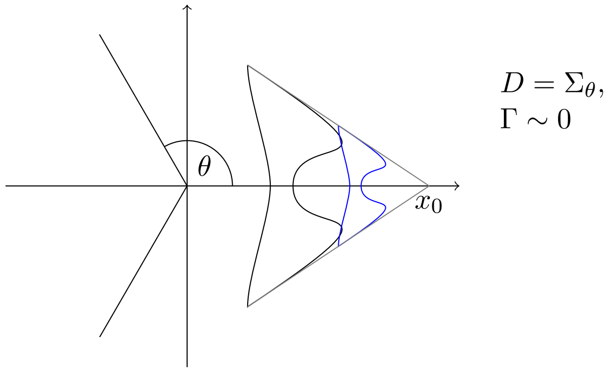
$$h(s,t) = \big(sr_1 + (1-s)r_0\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \text{ für } s \in [0,1], \quad t \in [0, 2\pi].$$



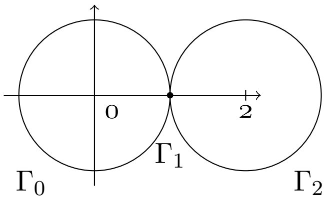
(b) Jedes sternförmige Gebiet D mit Zentrum x_0 ist einfach zusammenhängend. Eine geschlossene Kurve Γ kann dabei mittels der Homotopie

$$h(s,t) = (1-s)\gamma(t) + sx_0 \in \overrightarrow{\gamma(t)x_0} \subseteq D$$

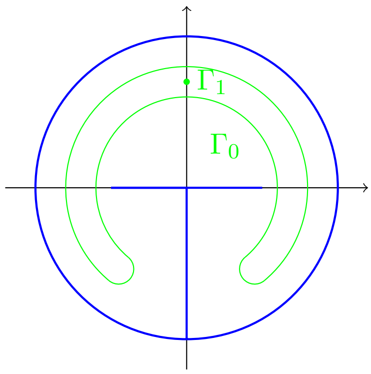
auf dem konstanten Weg $\{x_0\}$ zusammengezogen werden.



(c) Das Gebiet $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend. Dabei ist der Weg $\Gamma_0 = \partial\mathbb{D}$ über D weder zu $\Gamma_1 = \{1\}$ noch zu $\Gamma_2 = \partial B(2,1)$ homotop. Es gilt aber $\Gamma_1 \underset{D}{\sim} \Gamma_2$.



(d) Das Gebiet $D = \mathbb{D} \setminus (\mathrm{i}(-1,0) \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ ist einfach zusammenhängend, aber nicht sternförmig.



Theorem 4.3 (Homotope Version des Cauchyschen Integralsatzes)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$ und $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq D$ geschlossene Kurven mit $\Gamma_0 \underset{D}{\sim} \Gamma_1$. Dann gilt:*

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede nullhomotope Kurve $\Gamma_0 \subseteq D$. Wenn D einfach zusammenhängend ist, folgt also

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede geschlossene Kurve Γ.

Bemerkung 4.4. (a) Theorem 2.23, 3.10, 3.16 und Korollar 3.17 gelten für alle nullhomotopen Kurven Γ in beliebigen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$.

(b) Beispiel 4.2(c) folgt aus Theorem 4.3 für $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denn

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = 2\pi \neq 0 = \int_{\{1\}} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(2,1)} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z.$$

Beweis von 4.3. Seien $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to D$ Parametrisierungen von Γ_0 und Γ_1 (OBdA $a = 0$ und $b = 1$), $h \in C([0,1]^2, \mathbb{C})$ mit

$$h(s,t) \in D, \quad h(j,t) = \gamma_j(t), \quad h(s,0) = h(s,1) \quad \forall 0 \leq s,t \leq 1, \quad j = 0,1.$$

Da $[0,1]^2$ kompakt ist, ist $h([0,1]^2 \subset D$ kompakt und h gleichmäßig stetig. Somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(z,\varepsilon) \subseteq D$ für alle $z \in h([0,1]^2)$ und es exisitert $\delta > 0$ mit

$$\left|h(s,t) - h(s',t')\right| < \varepsilon,$$

falls (t,s), $(t',s') \in [0,1]^2$ mit

$$\left|t - t'\right|^2 + \left|s - s'\right|^2 < \delta^2. \tag{$*$}$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$ und setze

$$z_{jk} = h\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) \in D, \qquad j,k = 0,1,\ldots,n.$$

Beachte: $z_{jn} = h(\frac{j}{n},1) = h(\frac{j}{n},0) = z_{j0}$, $z_{0k} = h(0,\frac{k}{n}) = \gamma_0(\frac{k}{n})$ und $z_{nk} = h(1,\frac{k}{n}) = \gamma_1(\frac{k}{n})$. Weiter setzen wir

$$I_{jk} := \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \qquad j,k = 0,\ldots,n-1.$$

Mit $(*)$ folgt $h(I_{jk}) \subseteq B(z_{jk},\varepsilon) \subseteq D$, da der Durchmesser von I_{jk} $\frac{\sqrt{2}}{n}$ ist. Ferner, da jede Kugel konvex ist, liegt das Viereck V_{jk} mit den Ecken

$$z_{jk}, z_{jk+1}, z_{j+1k+1}, z_{j+1k} \in h(I_{jk})$$

in $B(z_{jk},\varepsilon)$. Der Integralsatz liefert für $D = B(z_{jk},\varepsilon)$

$$\int_{\partial V_{jk}} f(z) \,\mathrm{d}z. \tag{$**$}$$

Betrachte Polygonzüge P_j mit den Ecken

$$z_{j0} = z_{jn}, z_{j1}, z_{j2}, \ldots, z_{jn-1}, \quad j = 0,\ldots,n.$$

Behauptung 1: Für $j = 0,1,\ldots,n-1$ gilt $\displaystyle\int_{P_j} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{P_{j+1}} f(z) \,\mathrm{d}z.$

Behauptung 2: $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{P_0} f(z) \,\mathrm{d}z, \int_{\Gamma_1} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{P_n} f(z) \,\mathrm{d}z.$

Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt das Theorem. □

4.2 Laplace Transformationen

Sei $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *lokal integrierbar*, das heißt f ist messbar und $|f|$ ist integrierbar auf allen Intervallen $[0,b]$, $b>0$. Weiter sei f auf einem Intervall $[t_0,\infty)$ *exponentiell beschränkt*, das heißt es gibt $M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $t_0 \geq 0$, so dass

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \qquad (\forall t \geq t_0).$$

Es sei $\omega(f)$ das Infimum der obigen ω; $\omega(f)$ heißt exponentielle Wachstumsschranke.

Bemerkung. Für $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ gilt $\omega(f) = -\infty$; für $g(t) = t$ ist $\omega(g) = 0$ und das Infimum wird nicht angenommen; für $h(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ gilt $\omega(h) = \infty$ (stets $\forall t \geq 0$).

Beweis. Es gilt:

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{\frac{\omega^2}{4}}\mathrm{e}^{\omega t} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R},\ t \geq 0) \implies \omega(f) = -\infty.$$

Ferner:

$$t \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{\omega}} \quad (\forall \omega > 0,\ t \geq 0) \implies \omega(g) \leq 0.$$

Aber es gibt kein $M > 0$ mit $t \leq M$, für alle $t \geq 0$. Folglich ist $\omega(g) = 0$.

Die letzte Behauptung beweist man ähnlich. □

Nach Beispiel 2.28 existiert die *Laplacetransformation*

$$\big(\mathcal{L}f\big)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega(f)$ und $\hat{f}$ ist auf

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega(f)\}$$

holomorph. Weiter gilt:

$$\hat{f}^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \mathcal{L}\big(q_n f\big)(\lambda) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{4.1}$$

wobei $q_n(t) = t^n$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega(f)$. Sei ferner $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar mit $\omega(g) < \infty$. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\omega(\alpha f + \beta g) \leq \max\{\omega(f), \omega(g)\} < \infty$$

und

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g) \tag{4.2}$$

auf $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \max\{\omega(f), \omega(g)\}\}$. Sei nun $f \in C^k(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ mit

$$w := \max_{0 \leq j \leq k} \omega\left(f^{(j)}\right) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}\big(f^{(k)}\big)(\lambda) = \lambda^k \hat{f}(\lambda) - \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j f^{(k-j-1)}(0), \qquad \forall \operatorname{Re}\lambda > \omega. \tag{4.3}$$

Beweis. Für $k = 1$: Sei $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Dann ist

$$\lambda\hat{f}(\lambda) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \underbrace{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}_{=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\lambda t}} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\left(+\int_0^b \mathrm{e}^{-\lambda t} f'(t)\,\mathrm{d}t + f(0) - \mathrm{e}^{-\lambda b} f(b)\right) \overset{\operatorname{Re}\lambda>\omega}{=} \mathcal{L}\big(f'\big)(\lambda) + f(0),$$

wobei die partielle Integration mit (2.1) wie in Ana 1 gerechtfertigt werden kann. Der Rest der Behauptung folgt per Induktion. □

Betrachte nun das Polynom $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + 1_0$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und die Differentialgleichung

$$\begin{cases} p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)(u) = a_n u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = f,\ t \geq 0, \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Dabei sind $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$ und ein stetiges $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $\omega(f) < \infty$ gegeben.

Aus Analysis II wissen wir es gibt eine Lösung $u \in C^n(\mathbb{R}_+)$. Setze weiterhin

$$v(t) = \big(u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)\big), \quad v_0 = \big(u_0, \dots, u_{n-1}\big), \quad g = \big(0, \dots, 0, f\big).$$

Dann exisitert eine Hauptfundamentallösung e^{tA} mit

$$v(t) = \mathrm{e}^{tA} v_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad (t \geq 0).$$

Ferner existieren $M_1, M_2 \geq 0$ und $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq M_1 \mathrm{e}^{\omega_1 t}, \quad |g(t)|_2 \leq M_2 \mathrm{e}^{\omega_2 t}, \quad t \geq 0.$$

Sei $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$. Dann:

$$\begin{aligned} \left|u^{(k)}(t)\right| \leq |v(t)|_2 \leq M_1 \mathrm{e}^{\omega_1 t}|v_0|_2 + \int_0^t M_2 \mathrm{e}^{\omega_2(t-s)} M_1 \mathrm{e}^{\omega_1 s}\,\mathrm{d}s \\ \leq M_1 |v_0|_2 \mathrm{e}^{\omega t} + M_1 M_2 t \mathrm{e}^{\omega t} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\},\ t \geq 0). \end{aligned}$$

Mit (4.4) folgt die entsprechende Abschätzung für $u^{(n)}$. Also ist $\omega(u^{(k)}) \leq \omega$ für alle $k = 0, \dots, n$, also sind alle Ableitungen exponentiell beschränkt.

Wende nun $\mathcal{L}$ auf (4.4) für $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ an. Dann gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{L}\left(p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)(u)\right)(\lambda) \overset{(4.2)}{=} \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}\big(u^{(k)}\big)(\lambda) \overset{(4.3)}{=} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \hat{u}(\lambda) - \underbrace{\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} a_k \lambda^j \underbrace{u^{(k-j-1)}(0)}_{\overset{(4.4)}{=} u_{k-j-1}}}_{=:q(\lambda)}$$

. Also gilt $\hat{f} = p\hat{u} - q$ und somit

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{p(\lambda)}\hat{f}(\lambda) + \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} \tag{4.5}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, $p(\lambda) \neq 0$. Hierbei sind f, p und q gegeben! Es stellen sich noch folgende Fragen:

1) Wie kann man $\hat{f}$ berechnen?
2) Existiert $\mathcal{L}^{-1}$? Gibt es eine Formel?

Beispiel 4.5. (a) $f = \mathbb{1}_{[a,b)}$ wobei $0 \leq a < b \leq \infty$. Für $b = \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq 1 \leq \mathrm{e}^{\omega t}, \quad \forall \omega > 0,\ t \geq 0$$

und

$$\nexists\, \omega \leq 0,\ M \geq 0 \text{ mit } |f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Folglich ist $\omega(f) = 0$. Für $b < \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq \begin{Bmatrix} 1,\ t < b \\ 0,\ t \leq b \end{Bmatrix} \leq \mathrm{e}^{\omega b}\mathrm{e}^{-\omega t} \quad (\forall t \geq 0,\ \omega \in \mathbb{R}).$$

Folglich ist $\omega(f) = -\infty$. Sei $\operatorname{Re}\lambda > \omega(f)$. Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} b - a, & \text{falls } b < \infty, \\ \frac{1}{\lambda}(\mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}), & b < \infty,\ \lambda \neq 0, \\ \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda a}, & b = \infty. \end{cases}$$

Für $b = \infty$ hat $\hat{f}$ also eine eindeutige holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $f(t) = t^m$ für festes $n \in \mathbb{N}$. Wie oben gilt $\omega(f) = 0$. Sei $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{L}(q_n \mathbb{1}) \overset{(4.1)}{=} (-1)^n \hat{\mathbb{1}}(\lambda)^{(n)} \overset{(a)}{=} (-1)^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^n \frac{1}{\lambda} = n!\ \lambda^{-(n+1)}$$

Folglich existiert keine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Pol $(n+1)$ter Ordnung in 0.

(c) $f(t) = \mathrm{e}^{at} =: \mathrm{e}_a(t)$ für festes $a \in \mathbb{C}$. Es gilt $\omega(f) = \operatorname{Re} a$. Für $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re} a$ gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{(a-\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{\mathrm{e}^{(a-\lambda)t}}{a-\lambda}\right|_0^b = \frac{1}{\lambda - a}.$$

Also gibt es keine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Veralgemeinerung: Verschiebungsregel: Sei $a \in \mathbb{C}$, f mit $\omega(f) < \infty$, f lokal integrierbar. Sei $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re} a + \operatorname{Re}\omega(f)$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}\big(e_a f\big)(\lambda) = \int_0^\infty \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{at}}_{\mathrm{e}^{-(\lambda-a)t}} f(t)\,\mathrm{d}t = \hat{f}(\lambda - a). \tag{4.6}$$

(d) $f(t) = \cos(\alpha t)$ für festes $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f = \frac{1}{2}(\mathrm{e}_{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}_{-\mathrm{i}\alpha})$$

und damit

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2}(\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}\alpha} + \hat{\mathrm{e}}_{-\mathrm{i}\alpha}) \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda - \mathrm{i}\alpha} + \frac{1}{\lambda + \mathrm{i}\alpha}\right) = \frac{1}{\lambda^2 + \alpha^2}.$$

Hierbei ist $\omega(f) = 0$ und $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Weiter hat $\hat{f}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\alpha\}$.

(e) $f(t) = t^{\alpha-1}$, $t > 0$, $f(0) = 0$, wobei $\alpha > 0$ fest. Dann ist f integrierbar auf $[0, b]$ für alle $b > 0$ und

$$|f(t)| \leq 1, \quad \forall t \geq 1 \implies \omega(f) \leq 0.$$

Es gilt ferner: $\omega(f) = 0$. Sei $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t \overset{s=\lambda t}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\lambda} \,\mathrm{d}s = \lambda^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$$

nach Beispiel 2.39. Die Formel gilt auf $\mathbb{C}_+$ (mit $\lambda^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha \log \lambda}$). Weiter hat $\hat{f}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(f) Sei $f(t) = n$ für $t \in [n^2, (n+1)^2)$. Dann ist $\omega(f) = 0$. Sei $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \int_{n^2}^{(n+1)^2} n\mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{n=1}^\infty n\mathrm{e}^{-n^2\lambda} - \sum_{n=0}^\infty n\mathrm{e}^{-(n+1)^2\lambda}\right) \overset{j=n+1}{=} \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^\infty \mathrm{e}^{-j^2\lambda}.$$

Remmert II, §11.2.4 liefert: Es gibt kein $\mathrm{i}z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, so dass $\hat{f}$ eine holomorphe Fortsetzung auf eine Umgebung von $\mathrm{i}z$ hat (Kronecker).

Seien $f, g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ messbar mit

$$|f(t)| \leq M_1 \mathrm{e}^{\omega_1 t}, \quad |g(t)| \leq M_2 \mathrm{e}^{\omega_2 t}$$

für alle $t \geq 0$ und Konstanten $M_1, M_2 \geq 0$ und $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir die Faltung $f * g$ durch:

$$\big(f * g\big)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) \,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Diese ist integrierbar.

Beweis. Sei $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Setze $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t\}$. Dann:

$$\left|\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{1}_D(s,t)f(t-s)g(s)\right| \leq \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\lambda t}\mathbb{1}_D(s,t)M_1\mathrm{e}^{\omega(t-s)}M_2\mathrm{e}^{\omega s} = \mathrm{e}^{-t\operatorname{Re}\lambda}\mathbb{1}_D(s,t)M_1M_2\mathrm{e}^{\omega t} =: \varphi(s,t).$$

Damit:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(s,t)\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty tM_1M_2\mathrm{e}^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)t} \,\mathrm{d}t < \infty \qquad (\operatorname{Re}\lambda > \omega).$$

Also ist φ integrierbar auf $\mathbb{R}^2$ und somit auch die Faltung. □

Für die Laplacetransformation der Faltung gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(f * g\big)(t) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t f(t-s)g(s) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \\
&\overset{\substack{\text{Fubini} \\ 0\leq s\leq t<\infty}}{=} \int_0^\infty \int_s^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}f(t-s)\mathrm{e}^{-\lambda s}g(s) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s \\
&\overset{\substack{t=r+s \\ r=t-s}}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r} f(r) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

für alle λ mit $\operatorname{Re}\lambda > \max\{\omega_1, \omega_2\}$.

Erinnerung: Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *Nullmenge* $N \subseteq J$ ist eine Borelmenge mit

$$\int_N \mathrm{d}x = \int_J \mathbb{1}_N(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Man sagt, dass $f, g\colon J \to \mathbb{C}$ *fast überall* gleich sind, wenn es eine Nullmenge $N \subseteq J$ gibt mit $f(t) = g(t)$ für alle $t \in J \setminus N$. Eine Nullmenge kann kein Intervall mit Länge > 0 enthalten $(*)$. Wenn $\varphi \in C^1(J)$, dann ist auch $\varphi(N)$ eine Nullmenge (vgl. Analysis 3, Lem. 3.33 oder Übung 3.2).

Theorem 4.6 (Eindeutigkeitssatz für die Laplacetransformation)**.** *Seien $f, g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ messbar und es gebe Konstanten $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)|, |g(t)| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$. Weiter gebe es Zahlen $l > 0$ und $\lambda_0 \geq \omega + l$, sodass $\hat{f}(\lambda_n) = \hat{g}(\lambda_n)$ für alle $\lambda_n = \lambda_0 + nl$ gilt, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f = g$ fast überall und $f(t) = g(t)$ für alle gemeinsamen Stetigkeitsstellen $t \geq 0$ von f und g.*

Beweis. Setze $h = f - g$ (das ist messbar). Es gilt $|h(t)| \leq 2M\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$ und $\hat{h}(\lambda_n) = \hat{f}(\lambda_n) - \hat{g}(\lambda_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt

$$0 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nlt}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t} h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nun machen wir eine Transformation $\tau = \mathrm{e}^{-lt} \iff t = -\frac{\ln\tau}{l}$, $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -l\mathrm{e}^{-lt} = -l\tau$:

$$0 = \int_0^1 \tau^n \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{\lambda_0}{l}\ln\tau}\, h\left(-\frac{\ln\tau}{l}\right)\frac{1}{l\tau}}_{=:\varphi(\tau),\ 0<\tau\leq 1}\,\mathrm{d}\tau.$$

Beachte: φ ist messbar, $\varphi \leq \frac{1}{l\tau}\mathrm{e}^{\frac{\lambda_0}{l}\ln\tau}2M\mathrm{e}^{-\omega\frac{\ln\tau}{l}} = \frac{M}{l}\tau^{\frac{\lambda_0}{l}-\frac{\omega}{l}-1} \leq \frac{M}{l}$, da $0 < \tau \leq 1$ und $\lambda_0 - \omega \geq l$. Lemma 4.7 zeigt dann, dass $\varphi = 0$ fast überall $\implies h = 0$ fast überall $\implies f = g$ fast überall.

Sei t eine gemeinsame Stetigkeitsstelle von f und g und $N \subseteq \mathbb{R}_+$ eine Nullmenge mit $f(s) = g(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}_+ \setminus N$. Nach $(*)$ existiert eine Folge $t_n \to t$ mit $t_n \in \mathbb{R}_+ \setminus N \implies f(t_n) = g(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit $n \to \infty$folgt $f(t) = g(t)$. $\square$

Lemma 4.7. *Sei $\varphi \in L^2\big((0,1)\big)$ mit $\int_0^1 t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\varphi = 0$ fast überall.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass (Analysis 3) existieren Polynome p_1, p_2 mit $\|\operatorname{Re}\varphi - p_1\|_\infty \leq \varepsilon \|\operatorname{Im}\varphi - p_2\|_\infty \leq \varepsilon$. Setze $p = p_1 + \mathrm{i}p_2$. Dann ist $\|\varphi - p\|_\infty = \|\operatorname{Re}\varphi - p_1 + \mathrm{i}(\operatorname{Im}\varphi - p_2)\|_\infty \leq 2\varepsilon$. Sei etwa $p(t) = \sum_{k=0}^m b_k t^k$. Dann: $\square$