

3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

3.1. Motivation

In \mathbb{R}^n kann man Tangentialräume in verschiedenen Punkten vergleichen: Die Tangentialräume von x und y sind $T_x\mathbb{R}^n = \{x\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ und $T_y\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$. Es gibt dann eine Translation (Parallelverschiebung) $T_{y-x} : T_x\mathbb{R}^n \rightarrow T_y\mathbb{R}^n; (x, v) \mapsto (T_{y-x}(x), v)$, wobei $T_{y-x}(x) = x + (y - x) = y$.

Die Situation für Mannigfaltigkeiten ist lokal die gleiche: Ist (U, φ) eine Karten, so gilt $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (vergleiche Basis-Satz, Satz 1.1). Ist $p, q \in U$, so gilt: ($[\dots]$ affine Hülle)

$$T_pM = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right] \text{ und } T_qM = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_q \right]$$

Die Parallelverschiebung $T_pM \rightarrow T_qM$ bildet jetzt $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ auf $\bar{v} = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$ ab.

Der globale Vergleich von Tangentialräumen erfordert jedoch eine Zusatzstruktur („Fernparallelismus“)

In der Flächentheorie realisiert man die Parallelverschiebung via Kovariante Ableitung: Ist c eine Flächenkurve der Fläche F , so ist $\frac{D}{dt}c'$ die orthogonale Projektion von c'' in die Tangentialebene $T_{c(t)}F$. Die Geodätischen in F (die „verallgemeinerten Geraden“) sind definiert als Lösungen von $\frac{D}{dt}c' = 0$.

3.2. Affine Zusammenhänge

Definition (Affiner Zusammenhang)

Ein Affiner Zusammenhang D auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$D : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \rightarrow \mathcal{V}M \\ (X, Y) \mapsto D_X Y$$

so dass für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$ und $f, g \in C^\infty M$ gilt:

- (Z1) $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$
- (Z2) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$
- (Z3) $D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$

3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

Beispiele

(1) Flächentheorie: $D_X Y := Y'_T$

(2) In \mathbb{R}^n : $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $D_X Y := \sum X(b_i) \frac{\partial}{\partial x^i}$

D ist ein lokaler Begriff: Wähle Karte (U, φ) mit Basisfelder $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. $X, Y \in \mathcal{V}U$: $X = \sum_{i=1}^n v^i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^n w^j X_j$. Dann:

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{\sum_i v^i X_i} \left(\sum_j w^j X_j \right) \\ &\stackrel{(Z1)}{=} \sum_i v^i D_{X_i} \left(\sum_j w^j X_j \right) \\ &\stackrel{(Z2)}{=} \sum_i v^i \sum_j D_{X_i} (w^j X_j) \\ &\stackrel{(Z3)}{=} \sum_{i,j} v^i w^j D_{X_i} X_j + \sum_{i,j} v^i X_i (w^j) X_j \end{aligned}$$

wobei $D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ (diese Darstellung existiert wegen dem Basissatz 1.1) für lokal definierte C^∞ -Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ (Christoffel-Symbole).

Wir haben also:

$$D_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n v^i w^j \Gamma_{ij}^k + X(w^k) \right) X_k$$

Die Formel zeigt, dass $D_X Y(p)$ bestimmt ist durch $v^i(p)$, $w^j(p)$ und $X_p(w^k)$ (und Γ_{ij}^k). Insbesondere braucht man das Vektorfeld Y (bzw. w^k) nur „in Richtung X “ zu kennen.

Wir folgern: Man kann Vektorfelder längs einer Kurve in Richtung dieser Kurve ableiten: Falls Y ein Vektorfeld ist längs c (also $Y(c(t)) = \sum_{i=1}^n w^i(t) X_i(c(t))$), dann ist

$$D_{c'} Y := \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j} x^{i'}(t) w^j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) + w^{k'}(t) \right) X_k(c(t))$$

(wobei $\varphi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ und damit $c' = \sum x^{i'} X_i$)

Definition

Ein Vektorfeld Y längs einer Kurve c heißt parallel bezüglich einem affinen Zusammenhang D , falls $D_{c'} Y = 0$.

Beispiele

(1) Im \mathbb{R}^n haben wir für ein paralleles Vektorfeld Y , dass $D_{c'} Y = \sum_{j=1}^n w^{j'} X_j = \sum_{j=1}^n 0 X_j = 0$, da bei Vektorfeldern in \mathbb{R}^n parallel und konstant gleichwertig ist.

(2) Ein Vektorfeld entlang eines Klein-Kreises der Sphäre ist nicht parallel. (Durch Skizze motiviert). Ein Vektorfeld entlang eines Groß-Kreises ist jedoch parallel, da c'' orthogonal zum Groß-Kreis zum Mittelpunkt zeigt, die Projektion auf die Sphäre also 0 ist.

Später werden wir sehen, dass Geodätische (Kurven mit $D_{c'}c' = 0$) Geraden verallgemeinern.

Satz 3.1 (Eindeutigkeit der Parallelverschiebung)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang D . Sei $c : I = [a, b] \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve und $v_0 \in T_{c(a)}M$. Dann existiert genau ein paralleles Vektorfeld V längs c mit $V(c(a)) = v_0$.

Definition

Der Vektor $V(t)$ (aus Satz 3.1) heißt der längs c parallel verschobene Vektor v_0 . Die Abbildung

$$c \parallel_a^t : \begin{array}{l} T_{c(a)}M \rightarrow T_{c(t)}M \\ v_0 \rightarrow V(t) \end{array}$$

heißt Parallelverschiebung.

Beweis

Im ersten Schritt betrachten wir die Situation lokal. Sei $t_1 \in I$, so dass $c([a, t_1]) \subset U$ (Kartengebiet um $c(a)$). In der Karte (U, φ) ist die Definitionsgleichung $D_{c'}V = 0$ äquivalent zu:

$$\sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k = 0$$

wobei $V = \sum_{i=1}^n v^i X_i$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\varphi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, $c'(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt}(t) X_i(c(t))$. Das heißt wir haben ein System von n linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung in $v_k(t)$:

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j, \quad k = 1, \dots, n$$

Dieses System hat zu gegebenen Anfangsbedingungen $v(a) = v_0 = (v^1(a), \dots, v^n(a))$ genau eine Lösung für alle $t \in [a, t_1]$. Dann existiert eindeutig ein Parallelfeld V längs $c([a, t_1])$ mit $V(a) = v_0$.

Im zweiten Schritt sei $t_2 \in I$ beliebig. Das Segment $c([a, t_2])$ ist kompakt in M und kann daher mit endlich vielen Karten überdeckt werden. In jeder Karte existiert ein V und ist eindeutig (nach Schritt 1). Daraus folgt, dass V global eindeutig existiert auf $c([a, t_2])$ für beliebige t_2 . ■

3.3. Der Levi-Civita-Zusammenhang

Motivation: Ein Parallelfeld im Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine Isometrie.

Definition

Ein affiner Zusammenhang D auf einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt verträglich mit der Riemann'schen Struktur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ falls für jede differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow M$ und jedes Paar von parallelen Vektorfeldern V_1, V_2 längs c gilt:

$$\langle V_1(c(t)), V_2(c(t)) \rangle_{c(t)} \text{ ist für alle } t \in I \text{ konstant.}$$

Das heißt dass die Parallelverschiebung $c|_{t_1}^{t_2} : T_{c(t_1)}M \rightarrow T_{c(t_2)}M$ eine lineare Isometrie ist.

Satz 3.2 (Äquivalente Formulierung der Verträglichkeit)

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Ein affiner Zusammenhang D ist verträglich mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ genau dann, wenn für beliebige Vektorfelder V, W längs einer beliebigen Kurve $c : I \rightarrow M$ für alle $t \in I$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle_{c(t)} = \langle D_c V, W \rangle_{c(t)} + \langle V, D_c W \rangle_{c(t)} \quad (*)$$

Beweis

(*) \implies verträglich: V, W parallel ist äquivalent zu $D_c V = D_c W = 0$, also $\frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle_{c(t)} = 0$, also verträglich.

Umgekehrt gilt: Sei D verträglich, wir haben also eine Parallelverschiebung, die Isometrie ist. Wähle eine Orthonormalbasis $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$ von $T_{c(t_0)}M$. Mittels der Parallelverschiebung erhalten wir wieder für alle $t \in I$ eine Orthonormalbasis $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ von $T_{c(t)}M$. Wir können schreiben:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) P_i(t) \quad \text{sowie} \quad W(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) P_i(t)$$

wobei $v_i, w_i \in C^\infty$. Also:

$$D_c V = \sum_{i=1}^n \underbrace{c'(v_i)}_{v'_i} P_i + \sum_{i=1}^n v_i \underbrace{D_c P_i}_{=0}$$

das heißt: $D_c V = \sum_{i=1}^n v'_i P_i$ und $D_c W = \sum_{i=1}^n w'_i P_i$. Wir wollen zeigen, dass (*) gilt. Die rechte Seite ist:

$$\begin{aligned} \langle D_c V, W \rangle + \langle V, D_c W \rangle &= \left\langle \sum v'_i P_i, \sum w_j P_j \right\rangle + \left\langle \sum v_i P_i, \sum w'_j P_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} (v'_i w_j \langle P_i, P_j \rangle + v_i w'_j \langle P_i, P_j \rangle) \\ &= \sum_{i,j} (v'_i w_j \delta_{ij} + v_i w'_j \delta_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n (v'_i w_i + v_i w'_i) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n v_i w_i \right) \end{aligned}$$

Die linke Seite ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle \sum_i v_i P_i, \sum_j w_j P_j \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{ij} v_i w_j \langle P_i, P_j \rangle \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n v_i w_i \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bemerkung: Eine weitere äquivalente Formulierung der Verträglichkeit:
Für alle $X, Y, Z \in \mathcal{VM}$ gilt:

$$\underbrace{X \langle Y, Z \rangle}_{\in C^\infty(M)} = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

Die Frage ist jetzt, ob zu einer gegebenen Riemann'schen Struktur ein verträglicher Zusammenhang existiert.

Definition

Ein affiner Zusammenhang D heißt symmetrisch (oder torsionsfrei) falls für alle $X, Y \in \mathcal{VM}$:

$$T(X, Y) := D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0$$

Bemerkung: In lokalen Koordinaten (U, φ) gilt für D symmetrisch und Basisfelder $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$D_{X_i} X_j - D_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$$

da $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] f = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} f = 0$ wegen $f \in C^\infty$ und Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Weiter gilt:

$$D_{X_i} X_j - D_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k - \sum_k \Gamma_{ji}^k X_k = \sum_k \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right) X_k \implies \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Satz 3.3 (Levi-Civita-Zusammenhang)

Auf jeder Riemann'schen Mannigfaltigkeit $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert genau ein affiner Zusammenhang D , so dass gilt:

- (1) D ist symmetrisch
- (2) D ist verträglich mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Dieser eindeutige Zusammenhang D heißt Levi-Civita-Zusammenhang von M bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3. Affine Zusammenhänge und Parallelverschiebung

Beweis

Wir nehmen an, dass ein solches D existiert. Was sind die Eigenschaften?

D verträglich:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

Der Trick ist jetzt, die Gleichung zyklisch zu vertauschen:

$$\begin{aligned} Y\langle Z, X \rangle &= \langle D_Y Z, X \rangle + \langle Z, D_Y X \rangle \\ -Z\langle X, Y \rangle &= -\langle D_Z X, Y \rangle - \langle X, D_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Summe der drei Gleichungen

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, D_Y X \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle$$

Wir erhalten die Kozul-Formel

$$\langle Z, D_Y X \rangle = \frac{1}{2} \left(X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle \right) \quad (*)$$

Diese Formel zeigt, dass D eindeutig durch die Riemann'sche Struktur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bestimmt ist, denn seien D und \tilde{D} zwei affine Zusammenhänge, die (1) und (2) erfüllen, dann gilt (*) für beide, also $\langle Z, D_Y X \rangle = \langle Z, \tilde{D}_Y X \rangle$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{VM}$, was heißt dass $\langle D_Y X - \tilde{D}_Y X, Z \rangle = 0$, was heißt dass $D_Y X - \tilde{D}_Y X = 0$. Also ist $D = \tilde{D}$.

Die Existenz folgt daraus, dass man D durch (*) definieren kann. ■

Lokale Form von D Gegeben eine Karte (U, φ) mit Basisfelder $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$, auf U . Wir haben $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$, $[X_i, X_j] = 0$. Kozulformel:

$$\langle X_k, D_{X_i} X_j \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + 0 \right) = \left\langle X_k, \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l X_l \right\rangle = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{kl}$$

(g_{kl}) hat inverse Matrix (g^{mk}) . Damit

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g^{mk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Dieser Ausdruck zeigt nochmals: Levi-Civita-Zusammenhang ist eindeutig durch die Metrik bestimmt.

Beispiel

Im Euklidischer Raum $(\mathbb{R}^n, \text{Standardskalarprodukt})$ ist $g_{ij} = \delta_{ij}$, also $\Gamma_{ij}^k = 0$. Also: Der kanonische Zusammenhang ist der Levi-Civita-Zusammenhang.