1 Din A4 Zettel mit beliebigem Inhalt

Entscheidbarkeit

Nichtentscheidbare Probleme

Welche von denen gehören zu den Semientscheidbaren?

- Diagonalsprache $L_d := \{\omega_i : M_i$ akzeptiert ω_i nicht$\}$
- Kontextfreie Sprachen: $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?, Mehrdeutigkeit (mehrere Ableitungen zum gleichen Wort)?, $\overline{L(G)}$ kontextfrei?, $L(G)$ regulär?, $L(G)$ det. kontextfrei?
- Diophantische Gleichungen: multivariates Polynome p, Koeffizienten ganzzahlig: $\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$: $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$?
- *siehe semientsch. Probleme*

Semientscheidbare Probleme

Definition: Es ex. eine TM, die genau die Wörter aus L akzeptiert, sonst aber nicht halten muss.

Beispiele:

- Halteproblem $H := \{wv | T_w$ hält auf der Eingabe $v\}$
- Universelle Sprache $L_u := \{wv | v \in L(T_w)\}$
- Postsches Korrenspondenzproblem Geg: Menge von Wortpaaren $(x_i, y_i) \in (\Sigma^+ \times \Sigma^+)^*$. Gibt es eine endl. Folge von Indizes: $x_{i1} \ldots x_{in} = y_{i1} \ldots y_{in}$?
- Komplement der Diagonalsprache

Entscheidbare Probleme

Definition: Es ex. eine TM, die genau die Wörter aus L akzeptiert und bei jeder Eingabe hält.

Beispiele:

Presburger Arithmetik: eingeschränkte prädikatenlogische Formeln.

Typ	$\in$	$\emptyset$	$=$	$\cap = \emptyset$
CH-3	J	J	J	J
Det. KF	J	J	J	N
CH-2	J	J	N	N
CH-1	J	N	N	N
CH-0	N	N	N	N

$\mathcal{NP} \stackrel{?}{=} \mathcal{P}$

Definitionen $\mathcal{NP}, \mathcal{P}$

- $\text{time}_M(w) :=$ Anzahl Rechenschritte einer TM M bei Eingabe w
- $\text{TIME}(f(n)) := \{L \in \Sigma^* : \exists$ TM $M : L(M) = L$ und $\forall w \in L(M) : \text{time}_M(w) \leq f(|w|)\}$
- $\mathcal{P} := \cup_{\text{Polynom } p} \text{TIME}(p(n))$
- $\text{ntime}_M(w) = \begin{cases} \min\{n : P = (s)w \Rightarrow^n u(f)v, \\ f \in F\} \text{ falls } w \in L(M) \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$
- $\text{NTIME}(f(n)) = \{L \in \Sigma^* :$ $\exists$NTM $M : L(M) = L$ und $\forall w \in L(M) : \text{ntime}_M(w) \leq f(|w|)\}$
- $\mathcal{NP} = \cup_{\text{Polynom } p} \text{NTIME}(p(n))$
- $V \in \mathcal{NP}$-hart $:\Leftrightarrow$ $\forall V' \in \mathcal{NP} : V' \leq_p V$
- $V \in \mathcal{NP}$-vollständig $:\Leftrightarrow$ $V \in \mathcal{NP} \cap \mathcal{NP}$-hart

Probleme siehe Tabelle Achtung: „Rucksack" ist Knapsack bei Sanders, aber Subsetsum bei Schöning.

Grammatiken

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$, $\forall l \to r \in P$:

Def. CH-0 (rekursiv aufzählbar)

beliebig

Wortproblemkomplexität: semientscheidbar

Definition CH-1 (längenbeschr.)

$|l| \leq |r|$. Sonderregel für ε-Produktion nur bei S

Beispiel: $a^n b^n c^n$

Wortproblemkomplexität: $|\Sigma|^{O(n)}$, NP-hart *Entscheidbare Probleme:* $L(G) = \emptyset$, $|L(G)| \neq \infty$, $L(G) = \Sigma^*$

Definition CH-2 (kontextfrei)

CH-1 und $l \in V$

Beispiel: $a^n b^n$

Wortproblemkomplexität: $O(n^3)$

Pumpinglemma: L kontextfrei $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall z \in L, |z| > n :$ $\exists u, v, w, x, y :$ $z = uvwxy \wedge |vx| \geq 1 \wedge |vwx| \leq n \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i wx^i y \in L$

Odgens Lemma: L kontextfrei $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall z \in L, |z| \geq n :$ Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren $\exists u, v, w, x, y : z = uvwxy$, dass von den mindestens n markierten Buchstaben mindestens einer zu vx gehört und höchstens n zu vwx gehören und $\forall i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$.

Chomsky-Normalform: falls gilt: $P \subseteq (V \times \Sigma) \cup (V \times VV)$

1. Terminale in eigene Regeln.
2. Regeln mit rechts > 2 Nicht-Terminale aufsplitten
3. ε-Produktionen entfernen
4. Kettenproduktionen entfernen

Definition Det. KF

Bitte noch eintragen

Wortproblemkomplexität: $O(n)$

Definition CH-3 (regulär)

CH-2 und $r \in \Sigma \cup \Sigma V$

Beispiel: $a^* b^*$

Wortproblemkomplexität: $O(n)$

Pumpinglemma: L regulär $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L, |w| > n :$ $\exists u, v, x : w = uvx \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \in L$

Reguläre Ausdrücke: Beispiel: $(\emptyset \cup \varepsilon)^* abc^+$

Nerode-Relation

Für Sprache L: $R_L := \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

Für Automat M: $R_M := \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \delta^*(s, x) = \delta^*(s, y)\}$

Verfeinerung: R verfeinert $R' \Leftrightarrow R \subseteq R'$

Satz: L regulär $\Leftrightarrow \text{index}(R_L) \neq \infty$

Satz: $q \not\equiv r \Leftrightarrow \exists z \in \Sigma^* : \delta(q, z) \in F \not\Leftrightarrow \delta(r, z) \in F$

Beispielanwendung: $a^n b^n$ ist nicht regulär, denn $[a^n], n \in \mathbb{N}$ sind unendlich verschiede Äquivalenzklassen, denn für $i \neq j$ ist $a^i b^i \in L$, aber $a^j b^i \notin L$, also $[a^i] \neq [a^j]$.

Abschlusseigenschaften

Typ	$\cap$	$\cup$	$\overline{}$	$\cdot$	$*$
CH-3	J	J	J	J	J
Det. KF	N	N	J	N	N
CH-2	N	J	N	J	J
CH-1	J	J	J	J	J
CH-0	J	J	N	J	J
semient.	J	J	N	J	J
entsch.	J	J	J	J	J

Automaten-Zuordnung

Typ	Automat
CH-3	Endlicher Automat (NEA, DEA)
Det. KF	det. Kellerautomat (DKellerA)
CH-2	Kellerautomat (NKellerA)
CH-1	linear beschr. Automat (NLBTM)
CH-0	Turingmaschine (TM)

Automatenäquivalenz

εNEA ist zu $\overline{\varepsilon}$NEA ist zu DEA und NTM ist zur DTM äquivalent. NKellerA ist zu DKellerA nicht äquivalent. Äquivalenz von NLBTM und DLBTM ist noch nicht bewiesen.

Automaten

Mealy-Automat: Ausgabe beim Übergang, Moore-Automat: Ausgabe beim Zustand.

DTM

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F), \delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$

sie hält in q(q)av: $\Leftrightarrow \delta(q, a) = (q, a, N)$.

Konvention: $\forall q \in F : \forall a \in \Gamma : \delta(q, a) = (q, a, N)$

sie akzeptiert w: $\Leftrightarrow$ $(s)w$ hält nach endlich vielen Übergängen in $x(f)y, f \in F$. y ist die Ausgabe.

rekursiv aufzählbar (semientscheidbar): $\exists T : T$ akzeptiert L

rekursiv (entscheidbar): $\exists T : T$ akzeptiert $L \wedge \forall w \in \Sigma^* : T$ hält.

DTM-Varianten

Mehrere Bänder, mehrere Köpfe, mehrere Dimensionen – alles gleich mächtig wie DTM.

NTM

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F), \delta : Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}}$

sie hält wie: DTM

sie akzeptiert w:$\Leftrightarrow \exists$ Folge von Konfigurationen $s(w) \to \cdots \to x(f)y, f \in F$

Gödelnummer-Code

1. Kodiere δ: $\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d_t) \to 0^i 10^j 10^r 10^s 10^t$ wobei $d_t \in \{d_1 = L, d_2 = R, d_3 = N\}$
2. Die TM wird dann kodiert durch: $111u_1 11u_2 11 \ldots 11u_z 111$ mit u_i die möglichen Übergänge in bel. Reihenfolge.

NLBTM

NTM $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F) : \forall a = a_1, \ldots, a_n \in \Sigma^+ : a \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha(q)\beta$ mit $|\alpha\beta| < n$

Nichtdet. Kellerautomat

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#), \delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$

er akzeptiert w: $\Leftrightarrow \exists$ Folge von Konfigurationen $(s, w, \#) \to \cdots \to (q, \varepsilon, \varepsilon), q \in Q$ beliebig.

Det. Kellerautomat

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#), \delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ mit $\forall q \in Q, a \in \Sigma, A \in \Gamma :$ $|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1$

er akzeptiert w: $\Leftrightarrow \exists$ Folge von Konfigurationen $(s, w, \#) \to \cdots \to (f, \varepsilon, \varepsilon), f \in F$

Automatenminimierung

(Für endliche Automaten)

1. nicht erreichbare Zustände weg
2. Tabelle aller Zustandspaare $\{z, z'\}$ mit $z \neq z'$ (z_1 bis z_k links, z_0 bis z_{k-1} unten)
3. Markieren der Zustandspaare mit $z \in F$ und $z \notin F$ oder umgekehrt.
4. Betrachte unmarkierte Paare $\{z, z'\}$. Wenn $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ für mind. ein $a \in \Sigma$ bereits makiert, markiere $\{z, z'\}$.
5. Wiederhole 4. bis keine Änderung mehr.
6. Unmarkierte Paare können verschmolzen werden.

DEA→reg. ex.

Betrachte $L_{ij}^m := \{w : \Sigma^* :$ Beim Verarbeiten von w geht A vom Zustand i nach j und dabei höchstens durch $m\}$.

Es gilt $L_{ij}^{m+1} = L_{ij} \cup \left(L_{i,m+1}^m (L_{m+1,m+1,}^m)^* L_{m+1,j}^m\right)$

So weitermachen, bis man L_{sf}^n hat (s Startzustand, f Endzustand, n Zahl der Zustände).

NEA → DEA

Potenzmengenkonstruktion. Knotenmengen sind Endzustände, wenn einer ihrer enthaltenen Zustände ein Endzustand ist.

Whileprogramm

```
ℕ main(ℕx_1, ..., x_k){
 ℕx_0 = 0; ℕx_{k+1} = 0; ...
 body;
 return x_0;
}
```

body $\in$ { Sequenz ';',while($x_i \neq 0$) : Schleife, $x_i := x_i + c$ wobei $c \in \{-1, 0, 1\}$ und $0 - 1 := 0\}$

„loop"-Konstrukte im body erlaubt, aber redundant.

Loopprogramm

```
ℕ main(ℕx_1, ..., x_k){
 ℕx_0 = 0; ℕx_{k+1} = 0; ...
 body;
 return x_0;
}
```

body $\in$ { Sequenz ';',loop(x_i) : Schleife, wobei schon vor dem Durchlauf bekannt ist wie oft die Schleife wiederholt wird, $x_i := x_i + c$ wobei $c \in \{-1, 0, 1\}$ und $0 - 1 := 0\}$

Ackermannfunktion

Definition

Function $a(x, y)$
if $x = 0$ then return $y + 1$
if $y = 0$ then return $a(x - 1, 1)$
return $a(x - 1, a(x, y - 1))$

Eigenschaften

- $\forall$ Loopprogramm $P : \exists k : \forall n \in \mathbb{N} : f_P(n) < a(k, n)$
- $y < a(x, y)$
- $a(x, y) < a(x, y + 1)$
- $a(x, y + 1) < a(x + 1, y)$
- $a(x, y) < a(x + 1, y)$
- $a(x, y) \leq a(x', y')$ falls $x \leq x'$ und $y \leq y'$

Pseudopolinomialität

Nur relevant für Probleme mit Zahlen

Approximation

$\mathcal{A}$ ein polynomieller Approximationsalgo, OPT Optimalwert:

absoluter Approxalgo

$\forall I$ Instanzen eines Optimierungsproblems $\exists K : \text{OPT}(I) - \mathcal{A}(I) \leq K$

Approxalgo relativer Güte

$\forall I$Instanz$\exists K : \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq K, K \geq 1$ konstant.

$\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \begin{cases} \frac{\mathcal{A}(I)}{\text{OPT}(I)} \text{ falls Minimierungspr.} \\ \frac{\text{OPT}(I)}{\mathcal{A}(I)} \text{ falls Maximierungspr.} \end{cases}$

vll Formulierungen anpassen

PAS – Approxschema

Familie von Approxalgos $\mathcal{A}_\varepsilon$ mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon$, polynomiell in der Eingabe

FPAS – vollpoly Approxschema

wie PAS, aber auch polynomiell in $\frac{1}{\varepsilon}$

Ansatz Nichtexistenzbeweis

Man zeigt, dass man das eigentliche Problem aufblähen kann, so dass eine Approximation des aufgeblähten beim zurücktransformieren das eigentliche Problem (in $\mathcal{P}$) lösen würde.

Bekannte Existenzen

(Falls $\mathcal{NP} \neq \mathcal{P}$)

- KNAPSACK, Clique kein abs. Approx-Algo
- Knapsack hat rel. Approx-Algo (greedy, Güte 2)
- Color hat kein rel. Approx-Algo mit $\mathcal{R}^\infty \leq \frac{4}{3}$
- TSP mit Δ-Ungleichung hat rel. Approx-Algo mit $\mathcal{R} \leq 2$

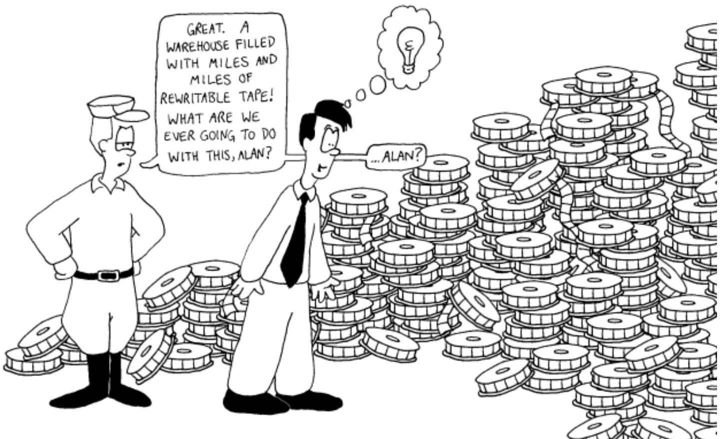
Hinweise

Diese Hinweise müssen noch ein sortiert und ggf. umformuliert werden

- Bei Reduktionsbeweisen stets zeigen, dass eine Lösung des einen Problems eine Lösung im anderen Problem induziert **und umgekehrt**. (Dieses muss allerdings nur in der einen Richtung in polynomieller Zeit möglich sein)

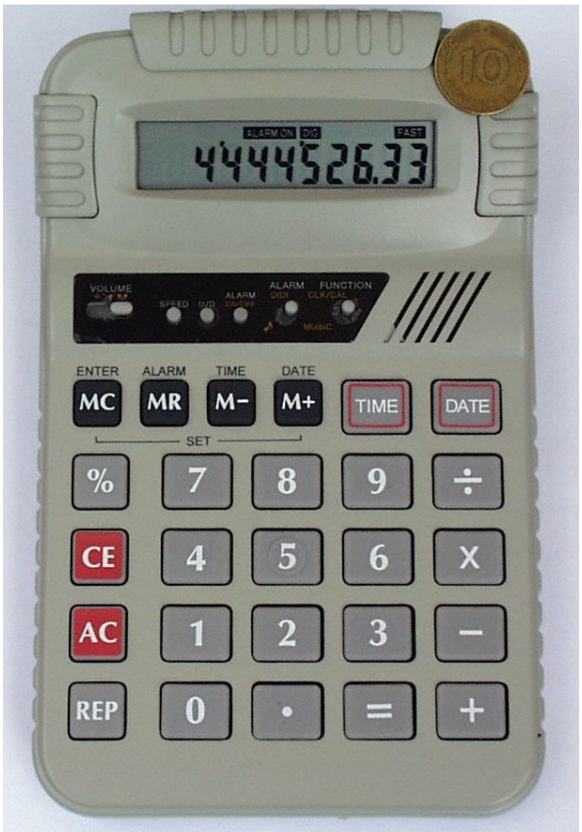
NP-Vollständige Probleme

Problem	Gegeben	Gesucht	polyn. red. von
SAT	aussagenlog. Formel	Erfüllbarkeit	TM
3SAT	boolesche Formel in KNF mit 3 Lit. pro Klausel	Erfüllbarkeit	SAT
Set Cover	endl. Menge M und $T_1, ..., T_k \subseteq M$, Zahl $n \leq k$	n Mengen $T_{i_1}, ..., T_{i_n}$ mit $M = \cup_{j=1...n} T_{i_j}$	3SAT
Steiner-Tree	Unger. Graph $G = (V, E)$ mit Gewichten $c : E \to \mathbb{R}^+$, $V = R$ (Pflicht-) $\cup$ F (Steinerknoten)	Baum $T \subseteq E$ der mit minimalen Kosten alle Pflichtknoten verbindet	3SAT
Clique	ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$	Clique $V' \subseteq V$ mit $\|V'\| \geq k$, also $\forall i, j \in V', i \neq j$, gilt: $\{i, j\} \in E$	3SAT
Vertex Cover	ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$	überdeckende Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\|V'\| \geq k$, sodass $\forall \{u, v\} \in E$: $u \in V'$ oder $v \in V'$	Clique
Subset Sum	Zahlen $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}$ und $W \in \mathbb{N}$	Teilmenge $J \subseteq \{1, ..., k\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = W$	3SAT
Partition	Zahlen $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}$	Teilmenge $J \subseteq \{1, ..., k\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$	Subset Sum
Bin Packing	Behältergröße b $\in \mathbb{N}$, Behälteranzahl k $\in \mathbb{N}$, Objekte $a_1, ...a_k \leq b$	Abb. $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., k\}$, sodass $\forall j = 1, .., k : \sum_{f(i)=j} a_i \leq b$	Partition
Knapsack	endl. Menge M, Gewichsfkt. $w : M \to \mathbb{N}_0$, Kostenfkt. (Profitfkt.) $c : M \to \mathbb{N}_0$, $W, C \in \mathbb{N}_0$	$M' \subseteq M$ mit $\sum_{a \in M'} w(a) \leq W$ und $\sum_{a \in M'} c(a) \geq C$	Subset Sum
ILP	Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und Bedingungen $a \cdot xRb$ mit $R \in \{\leq, \geq, =\}$, $a \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}$	Gibt es eine Belegung von x, so dass alle Bedingungen erfüllt sind?	Subset Sum
Gericht. Hamiltonkreis	gerichteter Graph $G = (V, E)$	Hamiltonkreis: einfacher Kreis der jeden Knoten genau einmal enthält	3SAT
Hamiltonkreis	ungerichteter Graph $G = (V, E)$	Hamiltonkreis	Gericht. Hamiltonkreis
TSP	Vollständiger Graph $G = (V, V \times V)$ mit Abstandsfkt. $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ und Zahl k	Hamiltonkreis C mit Länge $\sum_{(u,v) \in C} d(u, v) \leq k$	Hamiltonkreis
Coloring	ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$	$c : V \to 1, \ldots, k$ mit $\forall \{u, v\} \in E : c(u) \neq c(v)$	3SAT



And thus the Turing Machine was born.

Und für die, die den Taschenrechner vergessen haben:



Jetzt sogar mit Glückspfenning!

Dies ist ein http://mitschriebwiki.nomeata.de/-Projekt. Mitgewirkt haben: Joachim Breitner, Wenzel Jakob, Martin Kiefel, Lucas Lürich und Jennifer Tesch.