Funktionentheorie I - Prüfungsprotokolle

Skript Dr. Herzog

§ 1 Komplexe Zahlen

§ 2 Topologische Begriffe

- Offene Menge
- Abgeschlossene Menge
- Kompakte Teilmenge: Überdeckungskompaktheit

§ 3 Die Riemann'sche Zahlenkugel

§ 4 Konvergenz und Stetigkeit in $\hat{\mathbb{C}}$

§ 5 Komplex differenzierbare Funktionen

- Definition: Holomorphe Funktion ($\rightarrow$ In jedem Punkt einer offenen Menge komplex differenzierbar)
- Beispiele für holomorphe Funktionen:
  Potenzreihen
  Konstante Funktionen
  $f(z) = z$
  Polynome
  $f(z) = \overline{z}$ ist in keiner Stelle komplex differenzierbar ($\rightarrow$ CRD)
- Komplexe Differenzierbarkeit ($\rightarrow$ reelle Differenzierbarkeit + CRD)
- Sind alle holomorphen Funktionen stetig?

§ 6 Potenzreihen

- Was ist eine Potenzreihe? Wie sieht ihr Konvergenzverhalten aus?
- Satz von Cauchy-Hadamard
  Was gilt für den Rand des Konvergenzkreises einer Potenzreihe?
  Was weiß man über das Konvergenzverhalten?
- Satz 6.2
- Satz von Abel
- Konvergenzradius der geometrischen Reihe
- Funktion auf $\mathbb{D}$ gegeben: Ist die Funktion auf $\mathbb{D}$ holomorph?

§ 7 Stammfunktionen

§ 8 Die Funktionen e^z, $\log z$, z^q

- Definition Logarithmus ($\rightarrow e^z = w \Rightarrow \log(w) = \log|w| + i\arg(w)$)
  Wo ist dieser definiert? ($\rightarrow$ auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$)
  Warum? ($\rightarrow$ Umkehrfunktion der Exponentialfunktion)

§ 9 Möbiustransformationen

- Definition Möbiustransformation
  Möbiustransformationen bilden verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab
- Wie transformiert man die Einheitskreisscheibe auf die obere Halbebene in $\mathbb{C}$? ($\rightarrow \Phi(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$)

§ 10 Das Wegintegral

- Definition (geschlossener) Weg
- Definition Wegintegral
- Was bedeutet, dass eine holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe entwickelbar ist?
  Wie groß ist der Konvergenzradius mindestens?
- Definition Umlaufzahl
  Wo ist die Umlaufzahl definiert? ($\rightarrow$ auf $\mathbb{C}\backslash\gamma*$)
  Umlaufzahl anhand eines Beispiels bestimmen

§ 11 Der lokale Cauchy'sche Integralsatz

- Hat jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion?
  Beispiel für eine Funktion, die keine Stammfunktion hat ($\rightarrow f(z) = \frac{1}{z}$)
  Wie sieht es aus, wenn man den Definitionsbereich auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ einschränkt? ($\rightarrow \log(z)$ ist dann die Stammfunktion)
- Lokaler CIS (+ Beweis)
- CIS für Dreiecke/Lemma von Goursat (+ Beweisidee)
  Brauchen wir da nicht mehr als Ω offen? ($\rightarrow$ Nein, weil wir $\Delta \subseteq \Omega$ fordern)
- CIS für konvexe Mengen (+ Beweis)
  Wie sieht die Stammfunktion von f aus? Wie wird die Stammfunktion konstruiert?
  Wo gibt es eine Stammfunktion?
  Warum ist das Integral über den Weg Null?
  Warum gibt es den Ausnahmepunkt im CIS? Warum ist er künstlich? ($\rightarrow$ Siehe Beweis der CIF, Riemann'scher Hebbarkeitssatz)
  $\int_\gamma \frac{\sin^2(z)}{z^2(z-2)}\,dz$ berechnen für $\gamma(t) = e^{it}$ ($\rightarrow$ Nach CIS $= 0$, $z = 0$ ist hebbar, $z = 2$ liegt außerhalb des Wegs)
  Was folgt aus dem CIS? ($\rightarrow$ CIF)
  Verallgemeinerungen
- CIF für konvexe Mengen (+ Beweis)
  Daraus folgt die lokale Entwickelbarkeit der Funktion als Potenzreihe

- Folgerung für holomorphe Funktionen:
  Potenzreihenentwicklung ($\rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty})a_n(z - z_0)^n)$
  Wie berechnet man die Koeffizienten? ($\rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$)
  Konvergenzradius kann größer als R sein
  Entwicklungssatz (+ Beweis, Bild)
  Warum kann man eine holomorphe Funktion als Potenzreihe darstellen und wo? ($\rightarrow$ Konvergenzradius)
  Was bedeutet die Aussage, dass eine holomorphe Funktion lokal durch eine Potenzreihe darstellbar ist?
  $f(z) = \frac{1}{\cos(z)}$: Potenzreihe um i, wie groß ist der Konvergenzradius?
  $f(z) = \frac{1}{\tan(z)}$
  $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$
  Konvergenzradius von $f(z) = \tan(z)$ ($\rightarrow R = \frac{\pi}{2}$)
  Konvergenzradius mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen
  Potenzreihenentwicklung der geometrischen Reihe

§ 12 Eigenschaften holomorpher Funktionen

- Nullstellensatz ($\rightarrow$ Keine Häufungspunkte)
  Fragen zur Menge $Z(f)$
- Identitätssatz
  $f(\frac{1}{n}) = 0\,\forall n \in \mathbb{N}$: Wie könnte f heißen? ($\rightarrow f(z) = 0$)
  Gibt es noch andere Lösungen? ($\rightarrow$ Nach dem Identitätssatz gibt es keine weiteren Lösungen)
  Beweis für den Fall $f = 0$ ($\rightarrow Z(f)$ hat HP in $\Omega \Rightarrow f = 0$ auf Ω)
- Isolierte Singularität
  Nur die drei? ($\rightarrow$ Verweis auf Beweis)
- Riemann'scher Hebbarkeitssatz (+ Beweis)
- Klassifikation isolierter Singularitäten ($\rightarrow$ Eigene Beispiele parat haben)
  Singularitäten bestimmen: $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f(z) = \frac{1}{e^z+1}$, $f(z) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$
- Pol
  Was macht eine Funktion bei einem Pol?
- Wesentliche Singularität
  Beispiel für Funktion mit wesentlicher Singularität ($\rightarrow f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, wesentliche Singularität bei 0)
  Satz von Casorati-Weierstraß
  Was bedeutet „Bild liegt dicht in $\mathbb{C}$“?
  Was passiert mit der Funktion in einer wesentlichen Singularität?
- Cauchy'sche Integralformel für Ableitungen
- Cauchy'sche Ungleichung (+ Beweis)
- Satz von Liouville (+ Beweis)
- Hauptsatz der Algebra
- Satz von der Gebietstreue (+ Beweis)

- Maximumprinzip (+ Beweis)
  Minimumprinzip ($\rightarrow f(z) \neq 0$)
  Warum Gebiet wichtig? ($\rightarrow$ Wegen zusammenhängend)
  Kann man eine Funktion finden, die Maximum/Minimum annimmt? ($\rightarrow$ Ja, f konstant)

- Schwarz'sches Lemma (+ Beweis) ($\rightarrow$ Anwendungen: Automorphismen, Subordination)

§ 13 Das lokale Abbildungsverhalten

§ 14 Folgen holomorpher Funktionen

- Kompakte Konvergenz

- Konvergenzsatz von Weierstraß (+ Beweis)
  Woher kommt die Konvergenz der Ableitungen? ($\rightarrow$ CIF für Ableitungen)
  Was gilt, wenn wir eine holomorphe Folge haben ($\rightarrow$ Konvergenzsatz von Weierstraß)

§ 15 Der globale Cauchy'sche Integralsatz

- Definition Zykel

- Globaler CIS
  Wie kann man CIS und CIF verallgemeinern?
  Was ändert sich an den Voraussetzungen?
  Wo muss der Index Null sein?

- Unterschied zwischen dem globalem CIS und CIS für konvexe Mengen ($\rightarrow$ Indexbedingung)
  Beispiel, für das die Indexbedingung gilt

§ 16 Einfach zusammenhängende Gebiete

- Homotopie

- Nullhomotopie

- Einfach zusammenhängendes Gebiet
  Darf es in einem ezsh. Gebiet Löcher geben? ($\rightarrow$ Nein)
  Beispiel für Gebiete, in denen $ind_\gamma(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ immer erfüllt ist ($\rightarrow$ ezsh. Gebiete)
  Einfach zusammenhängendes, nicht konvexes Gebiet zeichnen
  Nicht einfach zusammenhängendes Gebiet zeichnen
  Offene, aber nicht zsh. Menge zeichnen

- Was gilt auf einfach zusammenhängenden Gebieten? ($\rightarrow ind_\gamma(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\Omega$)

- Holomorpher Logarithmus (+ Beweis)

§ 17 Der Residuensatz

- Meromorphe Funktion

- Residuum

- Residuensatz (+ Beweisidee)
  Endlichkeit der Summe, Häufungspunkte (→ Definition meromorphe Funktion: Es darf Häufungspunkte geben, aber nur auf dem Rand. Da der Weg komplett innerhalb des Gebiets liegt, umläuft man auf keinen Fall irgendwelche Häufungspunkte und damit ist die Summe endlich, Menge der Pole abzählbar unendlich oder endlich)
  Anwendungen: Argumentprinzip, Satz von Rouché, Berechnung uneigentlicher Integrale

- Argumentprinzip (+ Beweis)

- Satz von Rouché
  Welche Nullstellen sind gemeint? (→ Im Inneren des geschlossenen Wegs)
  Anwendungen des Satzes von Rouché (→ Satz von Hurwitz)

- Berechnung uneigentlicher Integrale (+ Beweis)
  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}$: Wo liegen die Polstellen? (→ Über die Residuen in der oberen Halbebene summieren)
  Warum werden da gerade die Nullstellen der Funktion gezählt? (→ Residuensatz)
  Warum muss $grad\, Q \geq grad\, P + 2$ gelten und $Q(x) \neq 0$ im Reellen? (→ Im Reellen gibt es Polynome vom Grad $n > 0$, die keine Nullstellen besitzen, im Komplexen wegen des Fundamentalsatzes der Algebra nicht)

- Satz von Rouché (im Zusammenhang mit Satz von Hurwitz)
  Rechenbeispiel

§ 18 Laurent-Reihen

- Entwicklungssatz von Laurent
  Konvergenzverhalten
  Ringgebiete

§ 19 Eine Anwendung des Schwarz'schen Lemmas

- Blaschkefaktor (→ Anwendung des Schwarz'schen Lemmas)

- Automorphismen des Einheitskreises

§ 20 Harmonische Funktionen

Funktionentheorie II - Prüfungsprotokolle

Skript Dr. Herzog

§ 1 Schreibweisen und Wiederholung

§ 2 Der Satz von Montel

- Satz von Arzelà-Ascoli
- Satz von Montel
  lokal gleichmäßig beschränkt
- Normale Familie
- Was heißt (lokal) gleichmäßige Konvergenz?

§ 3 Der Riemann'sche Abbildungssatz

- Konforme Abbildung
- Riemann'scher Abbildungssatz (+ Beweisidee)
  Welcher Satz geht in den Beweis ein? ($\rightarrow$ Satz von Montel)
  Wenn wir ein offenes zusammenhängendes Gebiet haben, welches nicht die ganze Ebene ist, was können wir dann über den Automorphismus von $\mathbb{D}$ sagen?

§ 4 Automorphismen spezieller Gebiete

- Automorphismus von $\mathbb{D}$ (+ Beweis)
- Blaschkefaktor
  Gibt es noch andere Automorphismen in $\mathbb{D}$ außer den Blaschkefaktor ($\rightarrow$ Nein. Siehe Beweis)
- Automorphismus von $\mathbb{C}$ (+ Beweis)
  Warum ist f ein Polynom? ($\rightarrow$ Laurententwicklung von g hat unendlich viele Terme $\Rightarrow$ f ist kein Polynom)
  Wieso sind das alle Automorphismen und wieso sind das überhaupt Automorphismen? ($\rightarrow$ Siehe Beweis)
- Lemma 4.3 (+ Beweis)
- Aut(G)
- Wie transformiert man die rechte Halbebene in $\mathbb{C}$ auf die Einheitskreisscheibe? ($\rightarrow$ Erst quadrieren, dann $\Phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$)
- Was bildet die offene Kreisscheibe auf die offene Kreisscheibe ab? ($\rightarrow$ Blaschkefaktor)

§ 5 Harmonische Funktionen

- Harmonische Funktionen
  Beipiel für harmonische Funktion: Realteil einer holomorphen Funktion
  Beipiel für eine harmonische Funktion, die kein Realteil einer holomorphen Funktion ist: $\log |z|$

- Satz 5.1 (+ Beweis)
  Was ist wenn f holomorph ist auf einem Gebiet und dort keine Nullstellen besitzt? ($\rightarrow$ Dann ist $\log|f|$ harmonisch)
- Ist jede harmonische Funktion Realteil von einer holomorphen Funktion? ($\rightarrow$ Auf einfach zusammenhängenden Gebieten ja)
- Konjugiert harmonische Funktion
  Was gilt alles: MWE, Maximum/Minimum, Identitätssatz
- MWE (+ Beweis)
- Poisson'sche Integralformel

§ 6 Konforme Äquivalenz von Ringgebieten

- Aut(A) (A ist Ringgebiet um 0)
- Ziel

§ 7 Das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip

§ 8 Der Satz von Bloch

- Satz von Bloch
  Folgerungen: Kreisscheiben

§ 9 Der kleine Satz von Picard

- Kleiner Satz von Picard (+ Beweis über großen Satz von Picard)
  Gibt es holomorphe Funktionen, die einen Wert aus $\mathbb{C}$ weglassen? ($\rightarrow$ Ja, $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$)
- Kleiner Satz von Picard für meromorphe Funktionen (+ Beweis)
  Beispiel $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$, $0, 1 \notin f(\mathbb{C})$
  Warum gilt $g \in H(\mathbb{C})$? Was passiert mit den Polen von f?
  Was passiert mit den Polen?
- Anwendung des kleinen Satzes von Picard: Fixpunkt bei periodischer Funktion (+ Beweis)
- Beispiel anhand des Tangens $f(z) = \tan z$ ($\rightarrow$ Nimmt i und $-i$ nicht an)
  Beweis über die Ableitung des Tangens: $1 + \tan^2(z) = \frac{1}{\cos^2(z)}$ ist lösbar
- Welche Anwendungen gibt es?
  Sätze von Iyer
  Beispiel: $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
  In welchem berühmten Satz wird das angewandt? ($\rightarrow$ Satz von Fermat-Wiles)

§ 10 Schlichte Funktionen in $\mathbb{D}$

- Definition der Menge S
- Potenzreihendarstellung

- Koebefunktion
- Satz von Bieberbach
- Bieberbach'sche Vermutung
  Was kann man über die Koeffizienten sagen? ($\rightarrow |a_n| \leq n$)
- Koebe'scher $\frac{1}{4}$-Satz

§ 11 Zur Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen

- Singulärer Punkt, regulärer Punkt (auf dem Rand einer Kreisscheibe)
  Beispiele
  Welche Punkte gibt es immer? ($\rightarrow$ Singuläre Punkte)
  Hat jede holomorphe Funktion auf $\mathbb{D}$ singuläre Punkte?
  Beispiel, dass es keine regulären Punkte auf $\mathbb{D}$ geben muss? ($\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$)
  Wieso ist die Menge der singulären Punkte abgeschlossen?
- Satz über die Existenz singulärer Punkte (+ Beweis)
- Satz von Pringsheim
  Singuläre Punkte von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$

§ 12 Der Satz von Mittag-Leffler

- Satz von Mittag-Leffler
  Wie sieht f aus?
  Wie wählt man p_n?
  Wie wählt man q_n?

§ 14 Unendliche Produkte

- Unendliches Produkt
  Wann ist es konvergent?

§ 15 Der Weierstraß'sche Produktsatz

- Produktsatz von Weierstraß
  Definition
  Bedeutung
  Was sind E_{p_n}?
  Wie werden die p_n gewählt?
  Kann man immer ein p_n finden?
  Wie sieht die Funktion f aus und welche Eigenschaften hat sie?
  Beispiel: Eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion angeben, die in den natürlichen Zahlen Nullstellen hat
  Beispiel: Funktion konstruieren, die in natürlichen Zahlen doppelte Nullstellen besitzt
  Was tut man, wenn man die 0 als Nullstelle der Ordnung 5 haben möchte? ($\rightarrow$ Weierstraßprodukt mit z^5 multiplizieren)
- Was heißt lokal gleichmäßige Konvergenz? ($\rightarrow$ Kompakte Konvergenz)
- Folgerung aus dem Produktsatz von Weierstraß: Zusammenhang zwischen meromorphen und holomorphen Funktionen (+ Beweis)

§ 16 Der Ring $H(\mathbb{C})$

- Definition: Ideal, endlich erzeugt, Hauptideal, Hauptidealring
- Ist der Ring der holomorphen Funktionen auf einem Gebiet immer nullteilerfrei?
- $H(\mathbb{C})$ ist kein Hauptidealring (+ Beweis)
  Welches Ideal benötigt man, um das zu zeigen?
  Beispiel für ein Ideal im Ring $H(\mathbb{C})$, das nicht endlich ist erzeugt ist
  $H(\mathbb{C})$ ist kein Hauptidealring. Was gilt aber? ($\rightarrow$ Jedes endlich erzeugte Ideal ist Hauptideal)

§ 17 Die Jensen'sche Formel

- Definition Jensen'sche Formel + Bedeutung

§ 18 Periodische Funktionen

- Was sind Perioden?

§ 19 Elliptische Funktionen

- Elliptische Funktion
- 1. Satz von Liouville
- 2. Satz von Liouville
- 3. Satz von Liouville
- Weierstraß'sche ρ-Funktion
- Die Differentialgleichung der Weierstraß'schen ρ-Funktion
  Satz über die Darstellung aller elliptischen Funktionen durch 2 rationale Funktionen

§ 20 Der Fixpunktsatz von Earle-Hamilton in $\mathbb{C}$

- Strikte Teilmenge
- Fixpunktsatz von Earle-Hamilton

§ 21 Die Subordination

- Prinzip der Subordination (+ Beweis)

§ 22 Verbindungen zur Funktionalanalysis und die Sätze von Montel und Vitali