29.11.06

Das `latexki`-Team

Stand: 7. August 2018

Beispiel 1.66 Integraloperatoren
Sei $X = C([0,1])$ und $k \in C([0,1]^2)$. Sei $f \in X$. Setze $(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)ds$ für $t \in [0,1]$. Sei $t_n \to t$ in $[0,1]$. $|Tf(t_n) - Tf(t)| \leq \int_0^1 |k(t_n,s) - k(t,s)||f(s)|ds \leq \int_0^1 ||f||_\infty \sup_{s\in[0,1]} |k(t_n,s) - k(t,s)| \to 0$ $(n \to \infty)$. Da k glm stetig $\Rightarrow Tf \in X$. Klar: $T : X \to X$ ist linear

$$||Tf||_\infty \leq \underbrace{\sup_{t\in[0,1]^2} \int_0^1 |k(t,s)|\mathrm{d}s||f||_\infty}_{=:\kappa\leq||k||_\infty<\infty}$$

$\Rightarrow T \in B(X), ||T|| \leq \kappa$.
Beh: $||T|| = \kappa$.
Bew: $\exists\, t_0 \in [0,1]$ mit $\kappa = \int_0^1 |k(t_0,s)|\mathrm{d}s$. Setze $f_n(s) = \frac{\overline{k(t_0,s)}}{|k(t_0,s)|+\frac{1}{n}}$, $s \in [0,1]$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n \in X, ||f_n||_\infty \leq 1 \Rightarrow ||T|| \geq ||Tf_n||_\infty \geq |Tf(t_0)| = \int_0^1 \underbrace{\frac{|k(t_0,s)|^2}{|k(t_0,s)| + \frac{1}{n}}}_{\leq|k(t_0,s)|} ds \to \kappa$ $(n \to \infty) \overset{\lim_{n\to\infty}}{\Longrightarrow} ||T|| \geq \kappa$.

■

Fast genau so zeigt man, dass $(Tf)(t) = \int_0^t k(t,s)f(s)\mathrm{d}s$, $t \in [0,1]$, $f \in X$ einen Operator $T \in B(X)$ mit

$$||T|| = \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t |k(t,s)|\mathrm{d}s \quad \text{definiert.}$$

Beispiel 1.67 Differentialoperatoren

a) $X = C^1([0,1])$ mit $||f||_{C^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$, $Y = C([0,1])$. Setze $Df = f'$ für $f \in X \Rightarrow$ Klar: $D : X \to Y$ ist linear. Ferner: $||Df||_\infty = ||f'||_\infty \leq ||f||_{C^1} \Rightarrow D \in B(X,Y)$ mit $||D|| \leq 1$.
Beh: $||D|| = 1$.
Bew: Wähle $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n-1)t$, $n \geq 3, t \in [0,1] \Rightarrow f_n \in X, ||f_n||_\infty = \frac{1}{n}$, $||f_n'||_\infty = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow ||f_n||_{C^1} = 1$ und $||D|| \geq ||Df_n||_{C^1} = 1 - \frac{1}{n} \overset{\sup_n}{\Rightarrow} ||D|| \geq 1$.

■

Beachte: $f_n \to 0$ bzgl $||\cdot||_\infty$ oder $||Df_n||_\infty \to 1$ $(n \to \infty)$, also: $D : (X, ||\cdot||_\infty) \to (Y, ||\cdot||_\infty)$ ist unstetig.

b) Sei $X = C_b^2(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^2(\mathbb{R}^d) : ||f||_{C_b^2} = ||f||_\infty + \sum_{k=1}^d ||\partial_k f||_\infty + \sum_{k,l=1}^d ||\partial_k\partial_l f||_\infty < \infty\}$ (mit $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$), $Y = C_b(\mathbb{R}^d)$.
Laplace Operator
$\Delta f = \partial_1^2 f + \cdots + \partial_d^2 f \Rightarrow \Delta \in B(X,Y)$, $||\Delta|| \leq 1$.

Beispiel 1.68 Stetige Linearformen

a) $X = C([0,1]),\ Y = \mathbb{K},\ f \in X$

(i) $\varphi(f) = f(t_0)$ für ein festes $t_0 \in [0,1]$ (Punktauswertung). $\Rightarrow \varphi : X \to \mathbb{C}$ ist linear. $|\varphi(f)| \leq ||f||_\infty \Rightarrow \varphi \in X^*,\ ||\varphi||_{X^*} \leq 1$.
Ferner: $||\varphi|| \geq |\varphi(\mathbb{1})| = 1 \Rightarrow ||\varphi|| = 1$ $(||\mathbb{1}||_\infty = 1)$

(ii) Sei $g \in L^1([0,1])$ fest gewählt. Setze $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Klar: $\varphi : X \to \mathbb{C}$ ist linear und $|\varphi(f)| \leq ||f||_\infty \int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t \Rightarrow \varphi \in X^*$ mit $||\varphi||_{X^*} \leq ||g||_1$ wie in Bsp 1.65 sieht man, dass $||\varphi|| = ||g||_1$

b) Sei $X = L^p(A)$, $1 \leq p \leq \infty$ für ein $A \in \mathcal{L}_d$. Sei $g \in L^{p'}(A)$ fest. Setze $\varphi(f) = \int_A f(x)g(x)\mathrm{d}x$ Hölder: $\varphi(f) \leq ||f||_p ||g||_p \Rightarrow \varphi(f) \in \mathbb{C}$ für alle $f \in X$ und $\varphi \in X^*$ mit $||\varphi|| \leq ||g||_{p'}$. Später: $||\varphi|| = ||g||_{p'}$

Beispiel 1.69 Folgenräume
Sei $T \in B(X,Y)$ mit $X \in \{c_0, l^p, 1 \leq p < \infty\}$ und $Y \in \{c_0, l^p, 1 \leq p \leq \infty\}$. Setze $a_{k,l} = (Te_l)_k$ für $k,l \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{k,l} \in \mathbb{C}$, bilde $A = [a_{k,l}]_{k,l \in \mathbb{N}}$. Sei $x \in X$. Setze $v_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in c_\infty$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_n \to x$ in X $(n \to \infty)$, da $p < \infty$ (Satz 1.27)
$(Tv_n)_k = (\sum_{j=1}^n T(x_j e_j))_k = \sum_{j=1}^n a_{k,l} x_j = (Av_n)_k$ (Matrizenmultiplikation)
T stetig $\Rightarrow Tv_n \to Tx$ in $Y \Rightarrow (Tx)_k = \lim_{n\to\infty} (Tv_n)_k = \sum_{l=1}^\infty a_{k,l} x_l$ $(*)$ insbesondere existiert die Reihe. Umbekehrt: Sei T durch $(*)$ gegeben. Unter welchen Bed ist $T \in B(X,Y)$ wobei nun $X, Y \in \{c_0, c, l^p, 1 \leq p < \infty\}$?

a) Sei $X = Y = l^1$, $a_{kl} \in \mathbb{C}$ $(k,l \in \mathbb{N})$ mit $\alpha := sup_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^\infty |a_{kl}| < \infty$ (Spaltensummennorm)
Sei $x \in l^1$. Dann existiert $(*)$ da $|a_{kl}| \leq \alpha < \infty\ \forall k,l \in \mathbb{N}$. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann: $\sum_{k=1}^N |(Tx)_k| \leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^\infty |a_{kl}||x_l| = \sum_{l=1}^\infty (\sum_{k=1}^N |a_{kl}|)|x_l| \leq \alpha \sum_{l=1}^\infty |x_l| = \alpha ||x||_1$ wobei T durch $(*)$ gegeben ist. Mit $\sup_N$ folgt $Tx \in l^1$. Klar: $T : l^1 \to l^1$ ist linear, und $||T|| \leq \alpha$, also $T \in B(l^1)$.
Beh: $||T|| = \alpha$
Bew: Klar: $\alpha = 0$. Wenn $\alpha > 0$, dann wähle $\varepsilon \in (0,\alpha)$. Dann ex $j \in \mathbb{N}$ mit: $\sum_{k=1}^\infty |a_{kl}| \geq \alpha - \varepsilon$. Ferner: $||T|| \geq ||Te_j||_1 = \sum_{k=1}^\infty |a_{kl}| \geq \alpha - \varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$ folgt Beh.

■

b) Für $x \in X \in \{c_0, c, l^p, 1 \leq p < \infty\}$ setze $Rx = (0, x_1, x_2, \dots), Lx = (x_2, x_3, \dots)$.
Klar: $Rx, Lx \in X, R : X \to X, L : X \to X$ sind linear. Ferner. $||Rx||_p = ||x||_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ $||Lx||_p \leq ||x_p||$, $Le_2 = e_1 \Rightarrow R, L \in B(X)$ mit Norm $= 1$.
Beachte: $LRx = x,\ RLx = (0, x_2, x_3, \dots) \Rightarrow R$ ist injektiv, nicht surjektiv, L ist surjektiv, nicht injektiv.
Matrizendarstellung:

$$R \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$L \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Definition 1.70 *Seien X, Y nVr. Eine injektive stetige lineare Abb $T : X \to Y$ heißt* ***Einbettung****. Man schreibt dann $X \hookrightarrow Y$. Wenn $T \in B(X, y)$ bijektiv und $T^{-1} : Y \to X$ stetig, dann heißt T* ***Isomorphismus*** *und man schreibt $X \cong Y$. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ mit $||Tx|| = ||x||$, heißt* ***Isometrie****.*

Bemerkung 1.71 Wenn T eine Isometrie ist, so ist T stetig und injektiv. Ferner ist T^{-1} auf $R(T) = TX = \{y = Tx, x \in X\}$ eine Isometrie.
Beh: Wenn X ein BR ist, dann ist $R(T)$ abgeschlossen.
Bew:
Sei $y_n = Tx_n \to y$ in Y $(n \to \infty) \Rightarrow ||y_n - y_m|| = ||Tx_n - Tx_m|| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ $\exists\, x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Da T stetig: $Tx = y$

■

Beispiel 1.72 a) Sei $Y \subseteq X$ ein UVR. Seien $||\cdot||_Y$ Norm auf Y und $||\cdot||_X$ Norm auf X. Dann: $I : (Y, ||\cdot||_Y) \to (X, ||\cdot||_X)$ ist stetig (d.h. eine Einbettung) $\iff ||y||_X \leq c||y||_Y \;\forall\, y \in Y$. Dann heißt $||\cdot||_Y$ feiner als $||\cdot||_X$ und $||\cdot||_X$ gröber als $||\cdot||_Y$.
Beispiel: $l^p \hookrightarrow l^q,\ 1 \leq p \leq q \leq \infty. C^\alpha([0,1]) \hookrightarrow C([0,1)]),\ \alpha \in (0,1)$

b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Setze $K = \overline{U}$. Sei $1 \leq p < \infty$. Definiere $J : C(K) \to l^p(K)$ durch $Jf = f + N_K$. Beachte: f ist messbar, da stetig und $||f + N_k||_p = ||f||_p \leq (\lambda(k))^{\frac{1}{p}} ||f||_\infty \Rightarrow Jf \in L^p(K)$.
Beh: J ist injektiv.
Bew: Sei $Jf = 0$, also $\exists$ NM N mit $f(x) = 0$ für $x \in K \backslash N$. Da $\lambda(B(x, \varepsilon)) > 0$ für $\varepsilon > 0$ folgt, dass N^0 leer ist, also ist $K \backslash N$ dicht in K und somit $f = 0$, da f stetig.

■

Folgerung: Sei $\hat{f} = f + N_K \in L^p(A)$. Nach Satz 1.44 gibt es $f_n \in C(K)$ mit $f_n \to f$ bzgl $||\cdot||_p$. Wie in Bsp 1.55 erhält man Polynom g_n mit $||g_n - f_n||_\infty \leq \frac{1}{n} \Rightarrow ||g_n - f_n||_p \leq \frac{c}{n} \Rightarrow g_n \to f$ in $\mathcal{L}^p(K) \Rightarrow Jg_n \to \hat{f}$ in $L^p(K)$ $(n \to \infty)$ $\Rightarrow L^p(K),\ 1 \leq p < \infty$ ist seperabel. ($L(K) \hookrightarrow L^p(K)$ gilt für $p \in [1, \infty]$)

c) Sei $X = C^1[0,1], T = C[0,1]$, dann hat $D \in B(X, Y),\ Df = f'$ die Inverse $D^{-1}g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)\mathrm{d}s$ wobei $D^{-1} \in B(Y, X)$, also $X \cong Y \Rightarrow$ BR Struktur ist gleich. Aber D kann andere Strukturen verändern. z.B. $f \leq g \not\Rightarrow f' \leq g'$.

d) *Beh:* $c \cong c_0$
Bew: Sei $l(x) := \lim_{n\to\infty} x_n,\ x \in c$. Üb: $l \in c^*$. 1.68 b) $\Rightarrow R \in B(c), L \in B(c_0)$. Setze $Tx := Rx - l(x) \cdot \mathbb{1} = (-l(x), x_1 - l(x), \dots)$ für $x \in c \Longrightarrow T \in B(c, c_0)$. $Sx := Lx - x_1 \cdot \mathbb{1} = (x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots)$ für $x \in c_0$. $S \in B(c_0, c)$.
Einsetzen: $ST = I_c,\ TS = I_{c_0}$

■

Bem: T ist keine Isometrie. Betrachte $x = (2, 1, 1, \dots) \Rightarrow x \in c$ $||x||_\infty = 2$; $Tx = (-1, 1, 0, 0, \dots) \Rightarrow ||Tx||_\infty = 1$.

e) *Beh:*Alle endlichdimensionalen nVR ($d < \infty$) sind isomorph zu $(\mathbb{K}^d, ||\cdot||_2)$.
Bew: Wähle eine feste Basis B von X. Sei $\overline{x} \in \mathbb{K}^d$ der eindeutig bestimmte Koeffizientenvektor von x bzgl. B. Setze $T : X \to \mathbb{K}^d,\ x \to \overline{x} \Longrightarrow T$ ist linear und bijektiv. T ist Isometrie bzgl. $|||v||| = ||T^{-1}v||_X,\ v \in \mathbb{K}^d \Longrightarrow T^{-1}$ ist Isometrie (Bem 1.70). Nach Satz 1.22 ist $|||\cdot|||$ äquivalent zu $||\cdot||_2$, also sind T und T^{-1} bzgl. $||\cdot||_X, ||\cdot||_2$ stetig.

■