

inoffizielles Skript

# Angewandte Differentialgeometrie

Gehalten von Dr. S. Grensing im Sommersemester 2013

getippt von Aleksandar Sandic\*

3. Mai 2017

\*[Aleksandar.Sandic@student.kit.edu](mailto:Aleksandar.Sandic@student.kit.edu)



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>5</b>
<b>1 Räuber und Gendarm</b>	<b>7</b>
1 Metrische Räume mit oberen Krümmungsschranken . . . . .	7
2 Konvexität . . . . .	10
3 Räuber und Gendarm . . . . .	12
4 Geometrische Charakterisierung von Flucht- und Verfolgerkurven . .	22
5 Positive Krümmungsschranken . . . . .	26
<b>2 Bewegungsplanung &amp; Konfigurationsräume</b>	<b>29</b>
1 Geometrie des Kubenkomplexes $K_n \mathcal{G}$ . . . . .	36
2 Nichtpositive Krümmung von Kubenkomplexen . . . . .	38
3 Verallgemeinerung: Lokal rekonfigurierbare Räume . . . . .	40
<b>3 „Gestänge“ (Linkages)</b>	<b>43</b>
1 Abstandsfunktion von Roboterarmen . . . . .	43
2 Polygonräume . . . . .	43
3 Walkers Vermutung . . . . .	50
<b>4 Kinematik</b>	<b>53</b>
1 Vorwärtstransformation . . . . .	55
2 Linearisierung (d.h. Tangentialräume) . . . . .	56
3 Adjungierte Darstellung . . . . .	57
4 Exponentialabbildung . . . . .	59
5 Clifford Algebren . . . . .	61
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>66</b>



# Vorwort

## Über dieses Skript

Dies ist eine Mitschrieb der Vorlesung „Angewandte Differentialgeometrie“ von Dr. S. Gensing, gehalten im Sommersemester 2013 am Karlsruher Institut für Technologie. Dr. Gensing ist nicht für den Inhalt verantwortlich und es besteht weder eine Garantie für Vollständigkeit, noch Korrektheit der enthaltenen Aussagen.

## Wer

Das Skript wurde in von Aleksandar Sandic getippt. Bei Anmerkungen bzw. beim Auffinden von Fehlern korrigierte bitte die entsprechende Stelle in Wiki oder schickt eine E-Mail an

[aleksandar.sandic@student.kit.edu](mailto:aleksandar.sandic@student.kit.edu)

## Wo

Link zur Vorlesung: <http://www.math.kit.edu/iag5/lehre/angdifgeo2013s/de>

Link zum Skript: <http://mitschriebwiki.nomeata.de/AngDiffGeo2013.pdf>

Link zum Mitschriebwiki: <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>

## To Do

Fertig, die Vorlesung ist beendet und der Inhalt ist vollständig. Eventuell könnte man noch die Übung in's Skript aufnehmen, aber ich bin nicht sicher ob das den Aufwand wert wäre. Ansonsten...

- Glossareinträge anlegen
- Ein richtiges Literaturverzeichnis



# Kapitel 1

## Räuber und Gendarm

### 1 Metrische Räume mit oberen Krümmungsschranken

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Ein Weg  $c : \mathcal{I} \rightarrow X$  heißt (**minimierende**) **Geodätische**, wenn  $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$  für alle  $t, t' \in \mathcal{I}$  gilt. Der Raum  $X$  heißt **geodätischer Raum**, wenn für alle  $x, y \in X$  eine Geodätische von  $x$  nach  $y$  existiert, beziehungsweise  **$R$ -geodätisch**, wenn dies für  $d(x, y) \leq R$  gilt. Ist  $c : [a, b] \rightarrow X$  ein Weg so heißt er **rektifizierbar**, falls seine Länge

$$\mathcal{L}(c) = \sup \left\{ \sum d(c(t_i), c(t_{i+1})) \mid t_1 < \dots < t_n, t_i \in \mathcal{I} \right\}$$

endlich ist. Es gilt  $d(c(a), c(b)) \leq \mathcal{L}(c)$ . Die Kurvenlänge ist invariant unter monotonen Reparametrisierungen. Die Längenfunktion  $t \mapsto \mathcal{L}(c|_{[a,t]})$  ist monoton wachsend; insbesondere besitzt jede Kurve eine Bogenlängenparametrisierung. Der Raum  $(X, d)$  heißt **Längenraum** (oder  **$d$  innere Metrik**), falls die Metrik

$$\bar{d}(x, y) = \inf \{ \mathcal{L}(c) \mid c : \mathcal{I} \rightarrow X \text{ rektifizierbarer Weg, } c(0) = x, c(1) = y \}$$

mit  $d$  übereinstimmt.

#### Beispiele

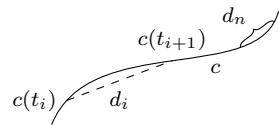
- 1)  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik ist ein geodätischer Raum und ein Längenraum.
- 2) Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein Längenraum (Beweis zur Übung).
- 3) Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so folgt dass  $(X, \bar{d})$  eine Längenmetrik ist, das heißt  $\bar{d} = d$  (das iterieren der Konstruktion liefert keine neue Metrik).
- 4) Jeder geodätische Raum ist ein Längenraum. Es gilt stets  $d \leq \bar{d}$ . Sind  $x, y \in X$  und ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  eine Geodätische von  $x$  nach  $y$ , so gilt:

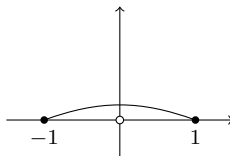
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &= \sup \left\{ \sum d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum (t_{i+1} - t_i) \right\} \\ &= t - a = d(x, y). \end{aligned}$$

Also

$$\bar{d}(x, y) = \inf_c \mathcal{L}(c) \leq \mathcal{L}(\gamma) = d(x, y)$$

- 5)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist ein Längenraum (bezüglich der euklidischen Metrik), aber kein geodätischer Raum.





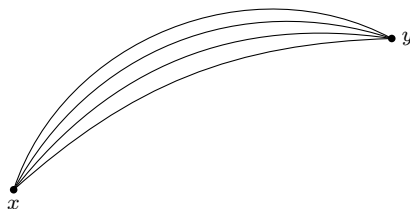
Es gibt keine kürzeste Verbindung

**Satz (von Hopf-Rinow; Chom-Vossen 1935)**

Es sei  $X$  ein lokalkompakter Längenraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $X$  ist vollständig
- (ii)  $X$  ist **geodätisch vollständig**, das heißt jede Geodätische  $c : [0, 1) \rightarrow X$  kann in 1 fortgesetzt werden.
- (iii) Beschränkte abgeschlossene Mengen sind kompakt.

Jede der obigen Aussagen impliziert, dass  $X$  ein geodätischer Raum ist.



Kanten  $e_n$  der Länge  $1 + \frac{1}{n} \rightsquigarrow$  Es gibt keine Kurve der Länge 1

Es bezeichne  $M_\kappa^2$  die (eindeutigen) 2-dimensionalen, einfachzusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit der Schnittkrümmung  $\text{sec} \equiv \kappa$ , und  $D_\kappa$  ihren Durchmesser:

$$M_\kappa^2 = \begin{cases} \mathbb{S}_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^2 & , \kappa > 0 \\ \mathbb{R}^2 & , \kappa = 0 \\ \mathbb{H}_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^2 & , \kappa < 0 \end{cases}$$

$$D_\kappa = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & , \kappa > 0 \\ \infty & , \kappa \leq 0 \end{cases}$$

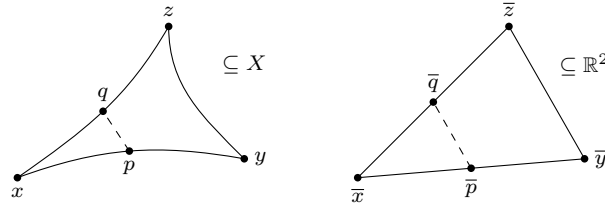
wobei

$$\mathbb{H}_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -\frac{1}{\kappa} \right\}.$$

Es sei  $X$  ein metrischer Raum. Ein **geodätisches Dreieck**  $\Delta(x, y, z)$  besteht aus Geodätischen  $c_{xy} = \overline{xy}$ ,  $c_{yz} = \overline{yz}$  und  $c_{zx} = \overline{zx}$  zwischen den Punkten  $x, y$  und  $z$ . Ein Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^2$  ist ein geodätisches Dreieck  $\overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$  mit gleichen Kantenlängen wie das ursprüngliche Dreieck. Ein solches Vergleichsdreieck existiert eindeutig, falls der Umfang  $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) \leq 2D_\kappa$  ist. Ein Punkt  $\overline{p} \in \overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$  heißt **Vergleichspunkt** zu  $p \in \Delta(x, y, z)$ ,  $p \in \overline{xy}$ , falls  $\overline{d}(\overline{x}, \overline{p}) = d(x, p)$ . Das Dreieck  $\Delta(x, y, z)$  erfüllt die **CAT ( $\kappa$ )-Ungleichung**, wenn für alle  $p, q \in \Delta(x, y, z)$  mit Vergleichspunkten  $\overline{p}, \overline{q}$  gilt:

$$d(p, q) \leq \overline{d}(\overline{p}, \overline{q})$$

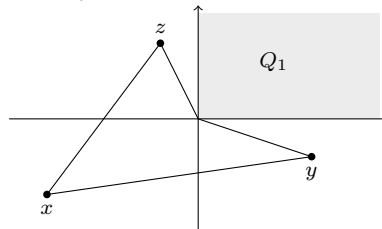




Der Raum  $X$  besitzt die obere Krümmungsschranke  $\kappa$ , wenn für alle  $x \in X$  eine geodätische Umgebung existiert, in der alle Dreiecke die  $\text{CAT}(\kappa)$ -Ungleichung erfüllen. Für  $\kappa = 0$  heißt  $X$  **nicht-positiv gekrümmt**. Erfüllt  $X$  global die  $\text{CAT}(\kappa)$ -Ungleichung, so heißt  $X$   **$\text{CAT}(\kappa)$ -Raum**.

**Beispiele**

- 1)  $\mathbb{R}^2$  ist  $\text{CAT}(0)$ ,  $M^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  ist nichtpositiv gekrümmt.
- 2)  $\mathbb{S}^1$  ist  $\text{CAT}(1)$ .
- 3)  $\mathbb{R}^2 \setminus Q_1$ ,  $Q_1 = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ , mit der induzierten Längenmetrik ist  $\text{CAT}(0)$ .



- 4) Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Schnittkrümmung  $\text{sec}_g \leq \kappa$  und vollständig. Nach dem Satz von Topogonov hat  $M$  die obere Krümmungsschranke  $\kappa$ .

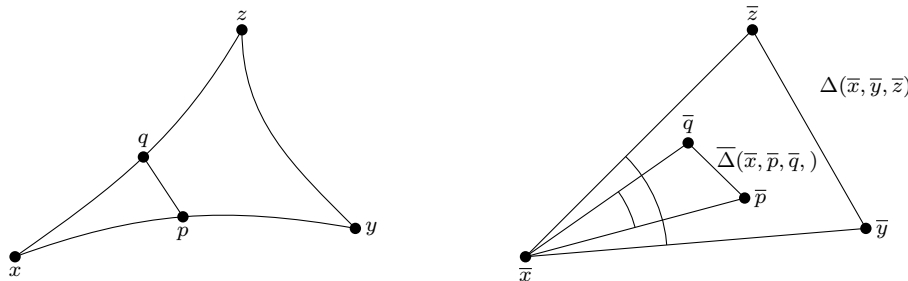
**Eigenschaften von  $\text{CAT}(\kappa)$ -Räumen**

- Geodätische der Länge  $< D_\kappa$  sind eindeutig.
- Bälle vom Radius  $< \frac{1}{2}D_\kappa$  sind konvex und zusammenziehbar.
- $\text{CAT}(0)$ -Räume sind zusammenziehbar.

**Charakterisierung von  $\text{CAT}(\kappa)$ -Räumen**

Für jedes geodätische Dreieck  $\Delta(x, y, z)$  vom Umfang  $< 2D_\kappa$  und Punkte  $p \in \overline{xy}$  und  $q \in \overline{xz}$  gilt für Vergleichsdreiecke  $\overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$  und  $\overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{p}, \overline{q})$ :

$$\sphericalangle_{\overline{x}}(\overline{p}, \overline{q}) \leq \sphericalangle_{\overline{x}}(\overline{y}, \overline{z}) \quad (\text{in } M_\kappa^2)$$



Ist  $X$  ein  $\text{CAT}(\kappa)$ -Raum und sind  $c_1$  und  $c_2$  Geodätische mit gleichem Startpunkt  $c_1(0) = c_2(0) = x$  so ist der Winkel  $\sphericalangle_{\overline{x}}(\overline{c_1(s)}, \overline{c_2(t)})$  monoton wachsend in  $s$  und  $t$ . Damit ist der Winkel

$$\sphericalangle(c_1, c_2) = \lim_{s,t \rightarrow 0} \sphericalangle_{\overline{x}}(\overline{c_1(s)}, \overline{c_2(t)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \sphericalangle_{\overline{x}}(\overline{c_1(t)}, \overline{c_2(t)})$$

wohldefiniert.

**Satz (von Hadamart-Cartan; Alexander-Bishop 1990)**

Es sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum mit der oberen Krümmungsschranke  $\kappa \leq 0$ . Dann ist seine universelle Überlagerung  $\tilde{X}$  (bezüglich der induzierten Metrik) (global) CAT( $\kappa$ ).

**2 Konvexität**

Eine Teilmenge  $C$  eines CAT(0)-Raumes (geodätischer Raum) heißt **konvex**, falls für alle  $x, y \in C$  das geodätische Segment von  $x$  nach  $y$  existiert und in ganz  $C$  verläuft. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem CAT(0)-Raum heißt **konvex**, falls für jede Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow X$  die Funktion  $f \circ c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  konvex im gewöhnlichen Sinne ist.

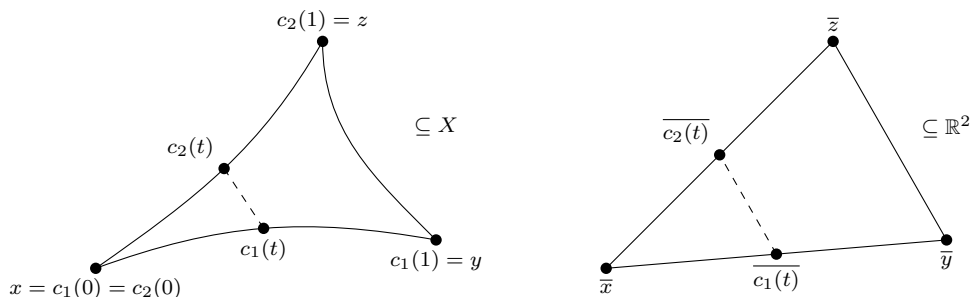
Ist  $X$  ein CAT(0)-Raum, so ist die Metrik konvex, das heißt für Geodätische  $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow X$  ist die Funktion

$$t \mapsto d(c_1(t), c_2(t))$$

konvex, wie man in der folgenden Beweisskizze erkennt:

**Beweisskizze**

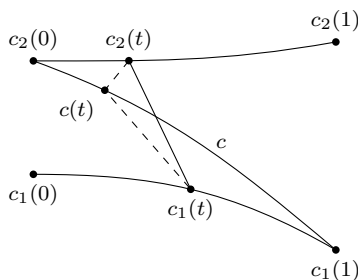
Wir betrachten ohne Einschränkung den Fall dass beide Geodätischen den gleichen Startpunkt  $x = c_1(0) = c_2(0)$  haben:



Bei Betrachtung des Vergleichsdreiecks zu  $\Delta(c_1(0), c_1(1), c_2(1))$  erhalten wir aus der CAT(0)-Ungleichung:

$$d(c_1(t), c_2(t)) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\overline{c_1(t)}, \overline{c_2(t)}) = t \cdot d_{\mathbb{R}^2}(\overline{y}, \overline{z}) = t \cdot d_{\mathbb{R}^2}(c_1(1), c_2(1))$$

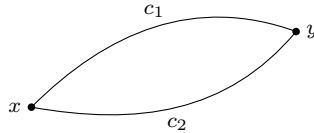
Betrachte nun  $c$  von  $c_2(0)$  nach  $c_1(1)$ .



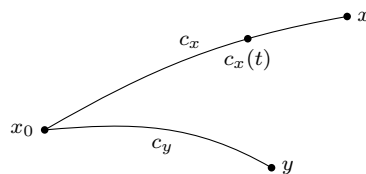
Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} d(c_1(t), c_2(t)) &\leq d(c_1(t), c(t)) + d(c_2(t), c(t)) \\ &\leq (1-t) \cdot d(c_1(0), c_2(0)) + t \cdot d(c_1(1), c_2(1)) \quad (\square) \end{aligned}$$

Geodätische Segmente in  $X$  sind immer eindeutig, wie man mit der folgenden Skizze erkennen kann:



Die Abstandsfunktion  $d(c_1(\cdot), c_2(\cdot))$  ist konvex mit Nullstellen in 0 und 1, also konstant Null und damit  $c_1 = c_2$ . Nun fixiere  $x_0 \in X$ , und sei  $c_x$  das geodätische Segment von  $x_0$  nach  $x$ .



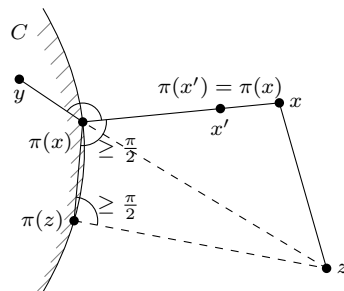
Damit wird  $H(x, t) = c_x(t)$  eine Retraktion von  $X$  auf  $\{x_0\}$ .

Ist  $C$  eine vollständige konvexe Teilmenge von  $X$ , so existiert eine „orthogonale Projektion“  $\pi : X \rightarrow C$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jedes  $x \in X$  ist  $\pi(x) \in C$  der eindeutig bestimmte Punkt mit

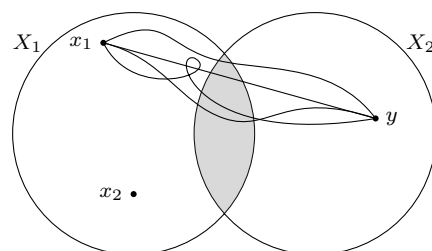
$$d(x, \pi(x)) = d(x, C) = \inf\{d(x, c) \mid c \in C\}$$

- (ii) Für Punkte  $y \in C$  und  $x \notin C$ , mit  $\pi(x) \neq y$ , gilt  $\sphericalangle_{\pi(x)}(x, y) \geq \frac{\pi}{2}$ .
- (iii) Es gilt  $\pi(\overline{x\pi(x)}) = \{\pi(x)\}$ .
- (iv)  $\pi$  ist eine Retraktion von  $X$  auf  $C$ , welche Abstände nicht vergrößert.



### Konstruktion

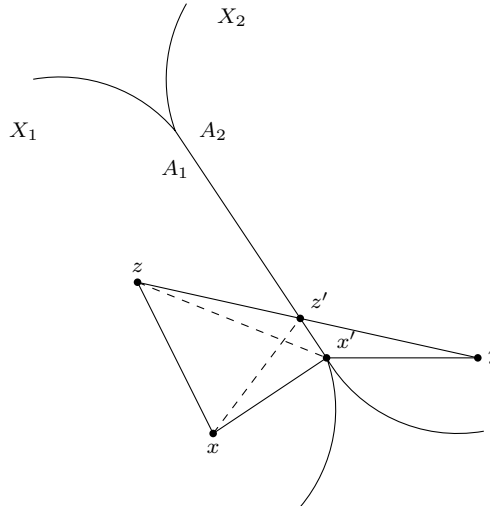
Es seien  $X_1$  und  $X_2$  zwei CAT(0)-Räume. Dann ist  $X_1 \times X_2$  ebenfalls ein CAT(0)-Raum bezüglich der Produktmetrik. Die Geodätischen von  $X_1 \times X_2$  sind genau die Produkt  $c_1 \times c_2$  von Geodätischen  $c_i$  in  $X_i$ .



Weitere CAT(0)-Räume erhält man durch „Verkleben“ entlang konvexer Teilmengen. Es sei  $A$  ein vollständiger metrischer Raum und seien  $\iota_i : A \hookrightarrow X_i \subseteq X_i$  Isometrien auf konvexen Teilmengen in  $X_1$  beziehungsweise  $X_2$ . Dann ist  $X_1 \cup_A X_2 = X_1 \dot{\cup} X_2 / \{\iota_1(a) = \iota_2(a) \in A\}$  mit der Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} d_{X_i}(x, y) & x, y \in X_i \\ \inf_{a \in A} \{d(x, \iota_i(a)) + d(\iota_j(a), y)\} & x \in X_i, y \in X_j, i \neq j \end{cases}$$

ein CAT(0)-Raum.



Betrachte die Vergleichsdreiecke  $\Delta(\bar{x}, \bar{x}', \bar{z}')$  und  $\Delta(\bar{z}', \bar{y}, \bar{x}')$

### 3 Räuber und Gendarm

#### Regeln

Das Spielfeld  $D$  sei eine zusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Eine Startkonfiguration sei gegeben durch eine endliche Anzahl von Verfolgern  $P_1, \dots, P_N \in D$  und einen Flüchtigen  $E \in D$ . Wir betrachten zunächst (zeitlich) diskrete Modelle. Es bezeichnen  $P_k^t$  beziehungsweise  $E^t$  die Positionen der Verfolger beziehungsweise des Flüchtigen zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$ .

#### Spielverlauf

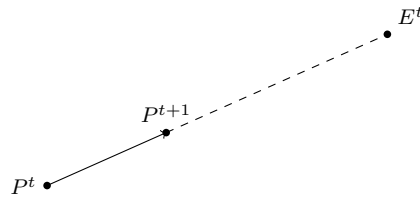
Zum Zeitpunkt  $t$  wählt zunächst  $E^t$  eine neue Position  $E^{t+1}$  mit dem Abstand  $d(E^t, E^{t+1}) \leq 1$ , also höchstens eine Einheit entfernt von der vorherigen Position, danach (simultan) die Verfolger  $P_k^t$ , entsprechend mit  $d(P_k^t, P_k^{t+1}) \leq 1$ . Die Verfolger gewinnen, wenn für jedes  $C > 1$  ein  $t \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $d(E^t, P_k^t) < C$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

#### Satz

Auf jedem Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ist „GREEDY“ stets erfolgreich (mit mindestens einem Verfolger).

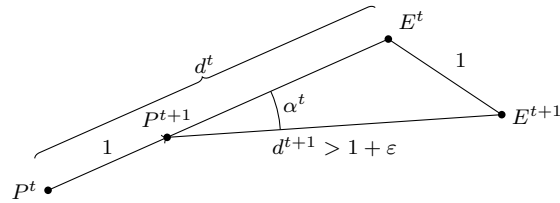
#### Greedy

Der Verfolger bewegt sich um die Distanz 1 auf der Strecke  $\overline{P^t E^t}$ :



**Beweisskizze (allgemein später)**

Skizze zum GREEDY Algorithmus:

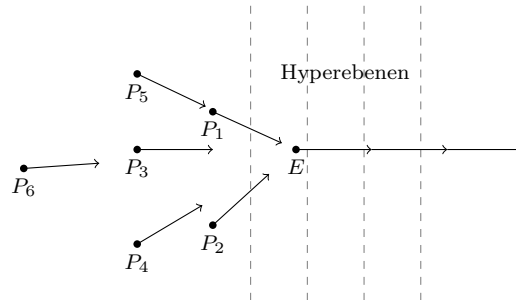


$$d^{t+1} \leq 1 + (d^t - 1) = d^t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d^t =: d^\infty$$

Angenommen der Flüchtige würde entkommen. Dann wäre  $d^\infty > 1$  und damit der Winkel  $\alpha^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , das bedeutet  $D$  würde beliebig lange Geradensegmente enthalten, wäre also nicht kompakt. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

**Mehrere Verfolger in  $\mathbb{R}^n$**

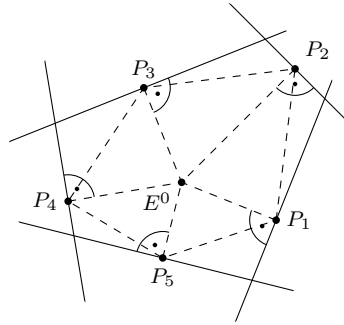
Wann ist ein Entkommen bei mehreren Verfolgern überhaupt möglich? Wir schauen uns die folgende Zeichnung an:



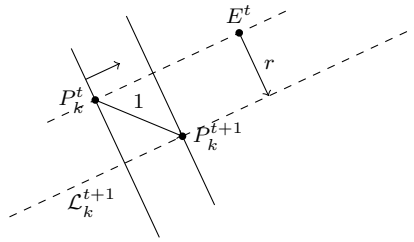
Sei  $C^t = \text{conv}(P_1^t, \dots, P_N^t)$  die konvexe Hülle zum Zeitpunkt  $t$ . Ein Entkommen ist möglich, wenn es eine trennende Hyperebene gibt, also wenn  $E \notin \overset{\circ}{\text{conv}}(P_1^t, \dots, P_N^t)$ , wobei  $\overset{\circ}{\text{conv}}$  das Innere der konvexen Hülle bezeichnet. Es stellt sich die Frage, ob die Umkehrung auch zutrifft, also ob nie ein Entkommen möglich ist, wenn  $E \in \overset{\circ}{\text{conv}}(P_1, \dots, P_N)$ . Bei GREEDY ist das nicht der Fall, der Beweis ist dem Leser zur Übung überlassen. Wir wenden uns nun also einen neuen Algorithmus anschauen.

**Planes**

Die Idee hinter dem PLANES Algorithmus ist den Bereich um die Verfolger durch Hyperebenen einzugrenzen und systematisch zu verkleinern.



- $P_k^{t+1} = P_k^{t+1}(P_k^t, E^t, E^{t+1})$
- Gerade  $\mathcal{L}_k^{t+1}$  parallel zu  $\overline{E^t P_k^t}$  durch  $E^{t+1}$



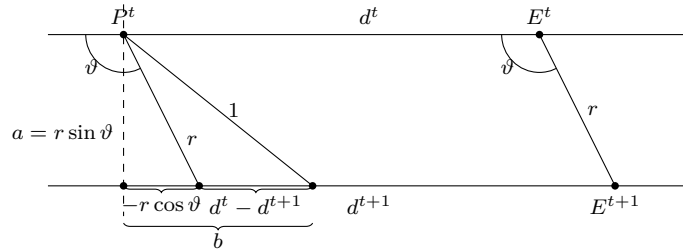
- $P_k^{t+1} \in \mathcal{L}_k^{t+1}$  mit  $d(P_k^t, P_k^{t+1}) = 1$  und  $d_k^{(t+1)}, E^{t+1})$  minimal

**Satz (Kopperty-Ravishankar '05)**

Es sei  $D = \mathbb{R}^n$ . Falls  $E \in \overset{\circ}{\text{conv}}(P_1, \dots, P_N)$  gilt, so ist PLANES erfolgreich.

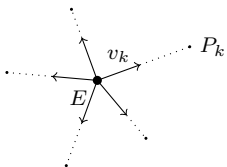
**Beweis**

Zunächst stellen wir mit der folgenden Zeichnung einige Vorüberlegungen an:



Falls  $\vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  gilt  $r \cos \vartheta \geq 0$  und damit folgt  $d^t - d^{t+1} \geq 0$ . Im Fall  $\vartheta > \frac{\pi}{2}$  gilt  $r \cos \vartheta = -r\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}$  und damit folgt dann

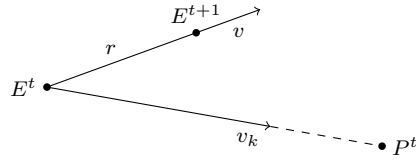
$$d^t - d^{t+1} = \sqrt{1 - r \sin^2 \vartheta} - r\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} \stackrel{r \leq 1}{\geq} (1 - r)\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} \geq 0.$$



Es bezeichne  $v_k := \frac{P_k^0 - E^0}{\|P_k^0 - E^0\|}$  den Einheitsvektor in Richtung  $\overline{E^0 P_k^0}$ . Da  $E \in \overset{\circ}{\text{conv}}(P_1, \dots, P_N)$  gilt, existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit der Sphäre  $\mathbb{B}_\varepsilon \subseteq \overset{\circ}{\text{conv}}(v_1, \dots, v_N)$ . Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass die  $v_1, \dots, v_{n+1}$  in allgemeiner Lage sind und dass  $\mathbb{B}_\varepsilon(0) \subseteq \overset{\circ}{\text{conv}}(v_1, \dots, v_{n+1})$ , sowie  $E = 0$  ist. Für ein  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in (0, 1)$  mit  $\varepsilon v = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k v_k$  und es folgt

$$\varepsilon = \varepsilon \|v\|^2 = \langle v, \varepsilon v \rangle = \sum \lambda_k \langle v, v_k \rangle.$$

man findet also ein  $k$ , so dass  $\langle v, v_k \rangle \geq \frac{\varepsilon}{n+1} = d_{\min} > 0$  gilt. Es seien  $v = \frac{E^{t+1} - E^t}{\|E^{t+1} - E^t\|}$  und  $k = k(v)$  wie oben. Dann gilt  $\cos \vartheta_k^t = \langle v, v_k \rangle \geq d_{\min}$ .



Es gilt:

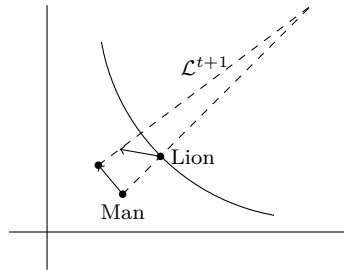
$$\begin{aligned}
 d^t - d^{t+1} &= \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \vartheta_k^t} + r \cos \vartheta_k^t \\
 &\geq \sqrt{1 - r^2} + r \cos \vartheta_k^t \\
 &= \sqrt{1 - r^2} - \cos \vartheta_k^t (1 - r) + \cos \vartheta_k^t \\
 &\geq \sqrt{1 - r} (\sqrt{1 + r} - \sqrt{1 - r}) + \cos \vartheta_k^t \\
 &\geq \langle v, v_k \rangle \geq d_{\min} > 0
 \end{aligned}$$

und

$$d^{t+1} = \sum_k d_k^{t+1} \leq \left( \sum_k d_k^t \right) - d_{\min} \leq \dots \leq \sum_k d_k^0 - t d_{\min} \quad \square$$

**Modifikation: Spheres**

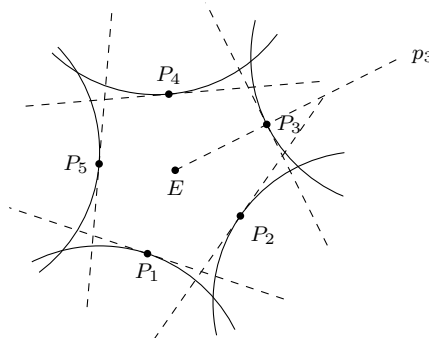
Wir betrachten das LION AND MAN Problem: ein Mensch versucht einem Löwen zu entkommen.



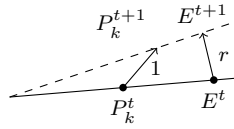
Der Löwe wählt einen Punkt, so dass er zwischen den Menschen und dem Punkt steht. Als Abgrenzung dient im Gegensatz zu PLANES keine Hyperebene, sondern eine Sphäre durch den Punkt und die Position des Löwen.

**Spheres**

- *Initialisierung:* Wähle Punkte  $p_k$  auf Geraden durch  $E$  und  $P_k$  so, dass  $P_k \in \overline{p_k E}$  gilt und die Komponente von  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_{d(p_k, P_k)}(p_k)$ , welche  $E$  enthält, beschrieben ist.



- $P_k^{t+1} = P_k^{t+1}(p_k, P_k^t, E^{t+1})$
- $P_k^{t+1} \in \overline{p_k E^{t+1}}$  mit  $d(P_k^t, P_k^{t+1}) = 1$  und  $d(P_k^{t+1}, E^{t+1})$  minimal.

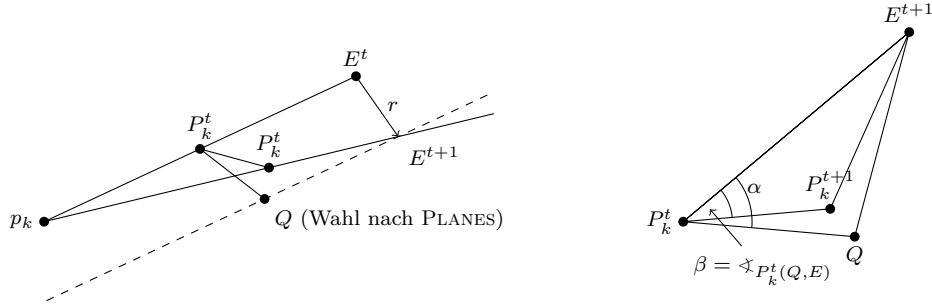


**Satz**

Es sei  $D = \mathbb{R}^n$ . Falls  $E \in \overset{\circ}{\text{conv}}(P_1, \dots, P_N)$  gilt, so ist SPHERES erfolgreich.

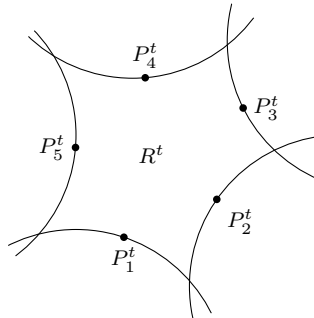
**Beweisskizze**

Wir betrachten in dem folgenden Bild den Unterschied zwischen PLANES und SPHERES



$$\Rightarrow d(D^{t+1}, E^{t+1}) < d(Q, E^{t+1})$$

Sei  $R^t = \text{conv}(p_1, \dots, p_N) \setminus \bigcup_{k=1}^N \mathbb{B}_{d(p_k, P_k^t)}(p_k)$  der zum Zeitpunkt  $t$  von den Sphären eingeschlossene Bereich.

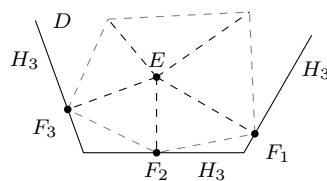


Wie für PLANES zeigt man: Es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle Punkte  $x \in R^t$  und Vektoren  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  ein  $k \leq N$  und ein  $v_k = \frac{P_k - x}{\|P_k - x\|}$  mit  $\langle v_k(x), v \rangle \geq d_{\min} > 0$  existieren. Es sei  $v = \frac{E^{t+1} - E^t}{\|E^{t+1} - E^t\|}$  und  $v_k = v_k(E^t)$ . Dann folgt wie für PLANES:

$$\underbrace{d(P^t, E_k^t)}_{=d^t} - d(Q, E^{t+1}) \geq \langle v_k, v \rangle \geq d_{\min} > 0$$

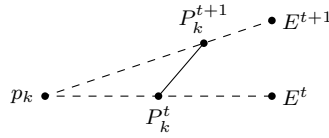
Daraus folgt dann  $d_k^t - d_k^{t+1} \geq d_{\min}$ . (□)

Unser Ziel ist es nun eine Verallgemeinerung auf beliebige konvexe Gebiete zu finden. Kopparty & Ravishankar diskutieren den folgenden Fall: Das Spielfeld  $D$  besteht aus dem Schnitt von endlich vielen Halbräumen  $H_i$ .





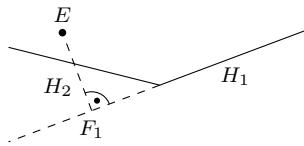
Die orthogonale Projektion  $F_l$  von  $E$  auf den Rand von  $H_l$  stellt zusätzliche (virtuelle) Verfolger dar, deren Bewegungen auf den Rand  $\partial H_l$  von  $H_l$  beschränkt sind. Für SPHERES lässt sich zeigen, dass die den Bewegungsspielraum von  $E$  einschränkenden Bälle „monoton wachsen“. Genauer:



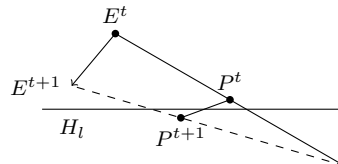
Falls also  $d(p_k, E_k^{t+1}) \leq \text{konst.}$  für alle  $t \in \mathbb{N}$  gilt, so ist SPHERES erfolgreich. Dies ist äquivalent dazu, dass  $E$  im Inneren der konvexen Hülle von  $P_1, \dots, P_k, F_1, \dots, F_k$  liegt.

Kopparty & Ravishankar behaupten, dies sei notwendig und hinreichend für den Erfolg von SPHERES. Bei unserer bisherigen Betrachtung unseres Algorithmus fallen zwei Probleme ins Auge:

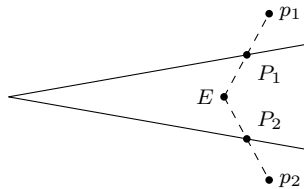
- $F_l$  liegt unter Umständen nicht in  $D$



- Der Algorithmus ist unter Umständen nicht wohldefiniert



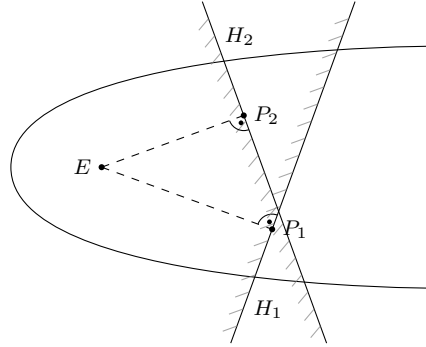
Es werden möglicherweise Verfolgerpositionen außerhalb von  $D$  errechnet. Das Verwerfen aller Verfolger  $P_k$  mit  $p_k \notin D$  führt unter Umständen dazu, dass alle  $P_k$  verworfen werden



Die folgende Bedingung ist äquivalent zum ersten Problem:

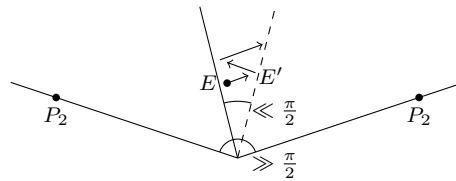
**Definition (Alexander-Bishop-Ghrist '09)**

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und konvex. Für  $k \leq N$  bezeichne  $H_k$  die abgeschlossene Halbebene, welche  $E$  enthält und deren Rand durch  $P_k$  und orthogonal zu  $\overline{EP_k}$  verläuft.

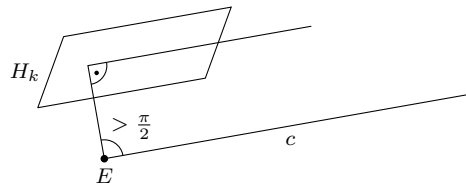


Die Konfiguration erfüllt die Bedingung **(BC)**, falls  $D \cap \bigcap_{k \leq N} H_k$  beschränkt ist.

Die Lösung des zweiten Problems bedarf einer Modifikation von SPHERES. Im zwei-dimensionalen Fall ändern Randkollisionen der Verfolger (heuristisch) nichts.



Im dreidimensionalen Fall sollte es möglich sein eine Konstellation in einem „breiten und flachen“ Gebiet die Verfolger in jedem Schritt zu Kollisionen zu zwingen, so dass eine Fluchtstrategie existiert. Zunächst lässt sich zeigen, dass (BC) notwendig ist: Falls  $D \cap \bigcap_{k \leq N} H_k$  beschränkt ist, so existiert ein Strahl  $c$  mit dem Startpunkt  $E$  und  $c \cap H_k = \emptyset$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .



Dann gilt  $\sphericalangle_E(c, \overline{EP_k}) > \frac{\pi}{2}$  für alle  $k \leq N$ . Somit enthält der Halbraum  $H = \{x \mid \langle x, \dot{c} \rangle \leq \langle E, \dot{c} \rangle\}$  alle Verfolger  $P_k$  und  $c$  ist eine Fluchtstrategie.

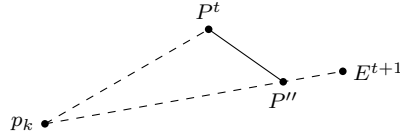
### Zur Lösung des „Kollisionsproblems“

Modifikation von SPHERES nach (A-B-G '09) zu ROTATING SPHERES . Die Idee besteht darin die Mittelpunkte  $p_k$  in jedem Schritt so zu bewegen, dass

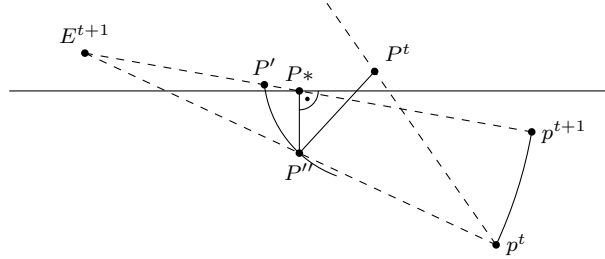
- $P_k^{t+1} \in D$
- (BC) erhalten bleibt
- Die Bälle um  $P_k$  hinreichend wachsen, so dass der Bewegungsspielraum von  $E$  eingeschränkt wird.

### Rotating Spheres

- *Initialisierung:* Wähle Punkte  $p_k^0$  auf dem Strahl von  $E$  durch  $P_k$  so, dass  $P_k \in \overline{Ep_k}$  gilt und die Komponente von  $D \setminus \bigcup_{k \leq N} \mathbb{B}_{d(p_k, P_k)}(p_k)$  welche  $E$  enthält, beschränkt ist. (folgt aus (BC))
- $P_k^{t+1} = P_k^{t+1}(D, p_k^t, P_k^t, E^{t+1})$
- $P_k'' \in \overline{p_k^t E^{t+1}}$  mit  $d(P_k^t, P_k'') = 1$  und  $d(P_k'', E^{t+1})$  minimal



Falls  $P'' \in D$ :  $P_k^{t+1} = P''$ ,  $p_k^{t+1} = p_k^t$   
 Falls  $P'' \notin D$ : Betrachte die folgende Zeichnung



E bezeichne  $P^*$  die orthogonale Projektion von  $P''$  auf  $D$  und  $p_k^{t+1}$  den Punkt auf dem Strahl von  $E^{t+1}$  durch  $P^*$  mit  $d(E^{t+1}, p_k^t) = d(E^{t+1}, p_k^{t+1})$ . Dann sei  $P_k^{t+1} = P'$  der Punkt auf  $\overline{p_k^{t+1}E^{t+1}}$  mit  $d(P_k^t, P_k^{t+1}) = 1$  und  $d(P_k^{t+1}, E^{t+1})$  minimal.

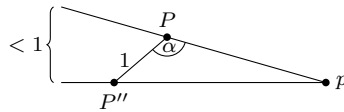
**Satz (A-B-G '09)**

Für jedes konvexe Gebiet  $D$  ist ROTATING SPHERES erfolgreich, wenn die Konfiguration  $D, P_1, \dots, P_N$  die Bedingung (BC) erfüllt.

**Beweisskizze**

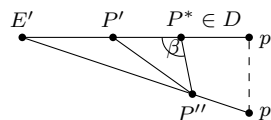
1) Es gilt  $d(p_k^{t+1}, P_k^{t+1})^2 > d(p_k^t, P_k^t)^2 + 1$ . Setze  $p = p_k^t$ ,  $p' = p_k^{t+1}$ ,  $P = P_k^t$ ,  $P' = P_k^{t+1}$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Falls  $P'' \in D$ : Es gilt



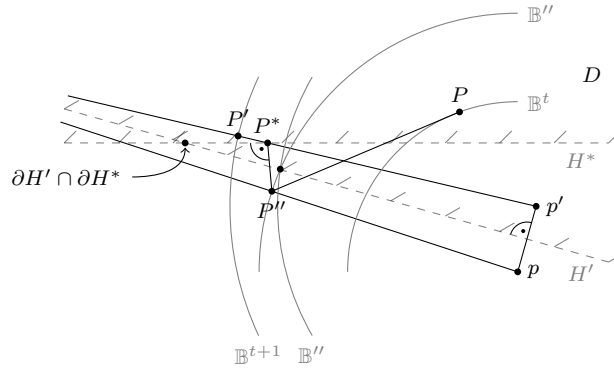
$$d(p, P'')^2 = d(p, P)^2 + d(P, P'')^2 - 2d(p, P)d(P, P'') \cdot \underbrace{\cos \alpha}_{< 0} > d(p, P)^2 + 1$$

Falls  $P'' \notin D$ : Es gilt



$P^* = \text{proj}_D(P'') \in D$ ,  $P'' \notin D$ ,  $E \in D$ . Damit folgt für den Winkel  $\beta = \sphericalangle_{P^*}(E', P'') \geq \frac{\pi}{2}$  und  $d(p, P'') \leq d(p', P^*) \leq d(p', P')$ , der Rest geht weiter wie oben.

2) Setze  $C^t = D \setminus \bigcup_{k \leq N} \mathbb{B}_k^t$ ,  $\mathbb{B}_k^t = \mathbb{B}_{d(p_k^t, P_k^t)}(p_k^t)$ . Behauptung:  $\overline{C^{t+1}} \subseteq C^t$ .



Falls  $p^{t+1} = p' = p = p^t$ : Aus 1) folgt  $\mathbb{B}^{t+1} \supset \mathbb{B}^t$ .

Falls  $p^{t+1} = p' \neq p = p^t$ : i)  $\mathbb{B}^t \subseteq \mathbb{B}''$  und  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}^{t+1}$

ii)  $\mathbb{B}$  und  $\mathbb{B}''$  haben den gleichen Radius und  $\partial \mathbb{B} \cap \partial \mathbb{B}'' \subseteq \partial H'$ . Daraus folgt

$$\mathbb{B}'' \cap H' \subseteq \mathbb{B} \cap H' = \{x \mid d(x, p') \leq d(x, p)\}$$

iii)  $\partial H^* \cap \partial H'$  und  $\partial \mathbb{B}'' \cap \partial H'$  werden durch  $\overline{P''P^*} \cap \partial H'$  „getrennt“, damit folgt  $\mathbb{B}'' \cap H^* \subset H'$ .

Insgesamt folgt aus diesen drei Punkten:

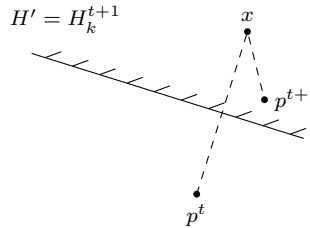
$$\begin{aligned} \mathbb{B}^t \cap D &\stackrel{(i)}{\subset} \mathbb{B}'' \cap D \subseteq \mathbb{B}'' \cap H^* \cap D \stackrel{(iii)}{\subseteq} \mathbb{B}'' \cap H' \cap D \stackrel{(ii)}{\subset} \mathbb{B} \cap H' \cap D \\ &\stackrel{(i)}{\subseteq} \mathbb{B}^{t+1} \cap H' \cap D \subseteq \mathbb{B}^{t+1} \cap D \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\overline{C^{t+1}} \subset C^t$ .

3) Es existiert  $C_1$  so, dass für alle  $x_k \in \mathbb{B}_k^0 \cap D$  gilt  $d(x_k, p_k^t) \leq C_1$ . Wie oben gilt  $x_k \in \mathbb{B}_k^0 \cap D \subseteq \dots \subseteq \mathbb{B}_k^t \cap D$ . Mit den Bezeichnungen wie oben sei  $H_k^{t+1} = H'$  der Halbraum durch den Mittelpunkt von  $p_k^t, p_k^{t+1}$  mit  $H' \perp \overline{p_k^t p_k^{t+1}}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} x_k \in \mathbb{B}_k^t \cap D &\subseteq \mathbb{B}_k'' \cap H_k^* \\ &\subseteq H' = \{x \mid d(x, p^{t+1}) \leq d(x, p)\}. \end{aligned}$$

Also gilt  $d(x_k, p_k^{t+1}) \leq d(x_k, p_k^t)$  und damit ist  $d(x_k, p_k^t)$  uniform beschränkt.

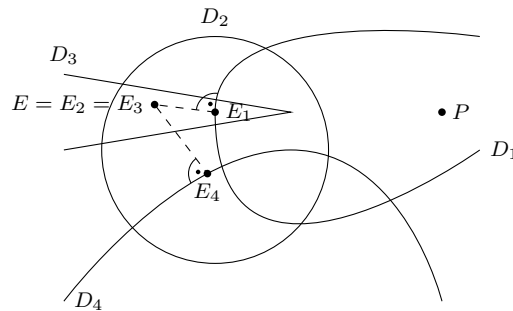


4)  $E^t \in C^t \stackrel{(2)}{\subset} C^0$  ist beschränkt. Damit folgt dass  $d(x_k, E^t)$  uniform beschränkt ist durch  $C_2$ .

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2)^2 &\stackrel{(3)}{\geq} \stackrel{(4)}{(d(x_k, p_k^t) + d(x_k, E^t))^2} \\ &\geq d(p_k, E^t)^2 \\ &\geq d(p_k, P_k^t)^2 \\ &\stackrel{(1)}{\geq} d(p_k^0, P_k^0) + t \end{aligned} \quad (\square)$$

**Anwendung/Verallgemeinerung**

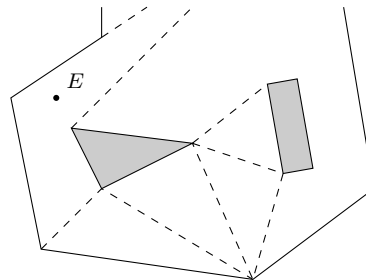
Betrachte Gebiete  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , welche sich als endliche Vereinigung konvexer abgeschlossener  $D_\alpha$  schreiben lassen.



Es seien  $D = \bigcup_\alpha D_\alpha$  eine endliche Vereinigung abgeschlossener konvexer Gebiete  $D_\alpha$ . Für  $E \in D$  bezeichne  $E_\alpha = \text{proj}_{D_\alpha}(E)$ . Eine Konfiguration  $D, E, \{P_k\}$  erfüllt **(EBC)**, falls eine Partition von  $\{P_k\}$  in Mengen  $\{P_{\alpha i} \mid i \leq N_\alpha\} \subset D_\alpha$  existiert, so dass für  $D_\alpha, E_\alpha, \{P_{\alpha i}\}$  (BC) gilt. In diesem Fall existiert eine erfolgreiche Verfolgerstrategie. Die Schrittweite  $\leq 1$  für  $E$  (bezüglich der Längenmetrik von  $D = \bigcup D_\alpha$ ) impliziert  $d(E^t, E^{t+1}) \leq 1$  in der Metrik (jedes)  $\mathbb{R}^{n_\alpha}$ .

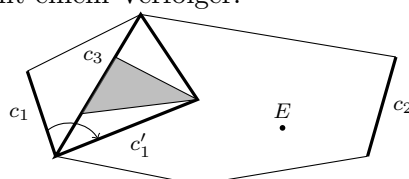
Da jedes  $\text{proj}_{D_\alpha}$  Abstände nicht vergrößert, gilt auch für alle  $E_\alpha$  Schrittweite  $\leq 1$ . In jedem Gebiet  $D_\alpha$  gilt nach endlicher Zeit  $P_{\alpha, i}^t = E_\alpha = \text{proj}_{D_\alpha}(E)$ . Falls  $E_\alpha \neq E$ , setze  $P_{\alpha, i}^T = E_\alpha^T$  für alle  $T \geq t$ . Nach endlicher Zeit gilt dann  $P_{\alpha, i_\alpha}^t = E_\alpha^t$  für alle  $\alpha$  und damit ist  $E^t = E_{\bar{\alpha}}^t$  für ein  $\bar{\alpha}$ , das heißt  $P_{\bar{\alpha}, i_{\bar{\alpha}}}^t = E^t$ .

**Bhadanin-Ister '12:** In jedem einfachen kompakten Polygon mit Hindernissen existiert eine erfolgreiche Verfolgerstrategie.



Bei Polygonen kann man für Hindernisse eine Triangulierung wählen. Der Nachteil dabei ist dass man einen Verfolger pro Gebiet braucht. Dies funktioniert auch, wenn das Gebiet in eine Richtung unbeschränkt ist.

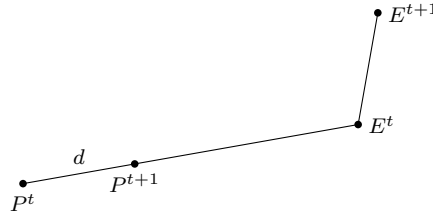
- A) **(Aigner-Fromme '84)** Jedes  $P$  kann ein geodätisches Segment  $c$  „bewachen“, das heißt  $E$  wird gefangen, falls es  $c$  überquert.
- B) **(Ister et al. '05)** in jedem einfach zusammenhängenden Polygon existiert eine erfolgreiche Strategie mit einem Verfolger.



Wähle Kanten(züge)  $c_1 \ni P_1$  und  $c_2 \ni P_2$ . Setzt  $c_3$  so, dass  $D$  in Komponenten zerfällt. Dann ist entweder  $P_1$  oder  $P_2$  frei. Nach endlicher Zeit liegt  $E$  in einem einfach zusammenhängenden Polygon.

## 4 Geometrische Charakterisierung von Flucht- und Verfolgerkurven

Im Folgenden sei das Soiefeld  $D$  ein CAT(0)- (beziehungsweise CAT(1)-) Raum. Alle Resultate beziehen sich auf GREEDY mit der Schrittweite  $d > 0$ , das heißt  $P^{t+1} \in \overline{P^t E^t}$  mit  $d(P^t, P^{t+1}) = d$ .



Wie spiegelt sich der Ausgang eines Spiels in der Geometrie der Kurven  $P^t$ , beziehungsweise  $E^t$ , wider? Dabei verstehen wir die Wege  $P^t$ , beziehungsweise  $E^t$ , als stückweise geodätische Kurven  $P = \bigcup \overline{P^t P^{t+1}}$ . Für  $d = 1$  ist  $P$  beziehungsweise  $E$  nach der Bogenlänge parametrisiert.

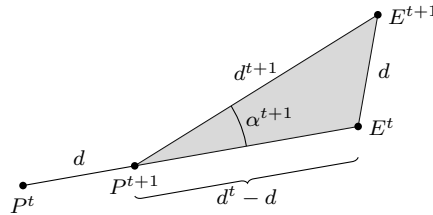
### Satz (Alexander-Bishop-Ghrist 2010)

Ist  $D$  ein CAT(0)-Raum, so ist  $D$  genau dann kompakt, wenn  $P$  stets gewinnt (mit einem Verfolger).

### Beweis

Ist  $D$  nicht kompakt, so existiert ein geodätischer Strahl als Fluchtstrategie.

Angenommen es existiert eine Fluchtstrategie. Für den Verfolgerabstand  $d^t = d(P^t, E^t)$  gilt  $d^{t+1} \leq (d^t - d) + d = d^t$ .



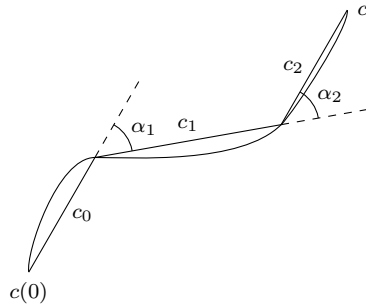
Also konvergiert  $d^t$  monoton fallend gegen ein  $d^\infty > d$ . Betrachtet man den euklidischen Vergleichswinkel  $\bar{\alpha}^t$  zu  $\alpha^t = \sphericalangle_{P^t}(E^{t+1}, E^t)$ , so folgt

$$\begin{aligned} \cos \bar{\alpha}^{t+1} &= \frac{(d^{t+1})^2 + (d^t - d)^2 - d^2}{2d^{t+1}(d^t - d)} \\ &= \frac{(d^{t+1})^2 + (d^t)^2 - 2d^t}{2d^{t+1}(d^t - d)} \\ &\rightarrow \frac{2d^\infty(d^\infty - d)}{2d^\infty(d^\infty - d)} = 1. \end{aligned}$$

Also konvergiert  $\bar{\alpha}^t$  gegen 0. Da für Vergleichswinkel stets  $\alpha^t \leq \bar{\alpha}^t$  gilt, folgt  $\alpha^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . □

**Erinnerung**

Es sei  $c$  eine reguläre ebene Kurve  $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\kappa$  die Krümmung von  $c$ . Dann ist  $\tau_c = \int_0^l \kappa$  die **Totalkrümmung** von  $c$ . Ist  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt  $\kappa = \|\ddot{c}\|$ . Bezeichnet  $\vartheta$  die Drehwinkelfunktion von  $\dot{c}$ , das heißt  $\dot{c}(t) = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t))$ , so gilt  $\|\ddot{c}\| = \|(-\vartheta' \sin \vartheta, \vartheta' \cos \vartheta)\| = |\vartheta'|$ . Damit ist die Totalkrümmung die akkumulierte Winkeländerung von  $c$ .



Ist  $c_1, \dots, c_n$  eine Polynomapproximation von  $c$ , so ist die Summe der Komplementärwinkel  $\alpha_i = \pi - \beta_i = \pi - \sphericalangle(c_{i-1}, c_i)$  eine Approximation der Totalkrümmung von  $c$ .

**Definition (Totalkrümmung)**

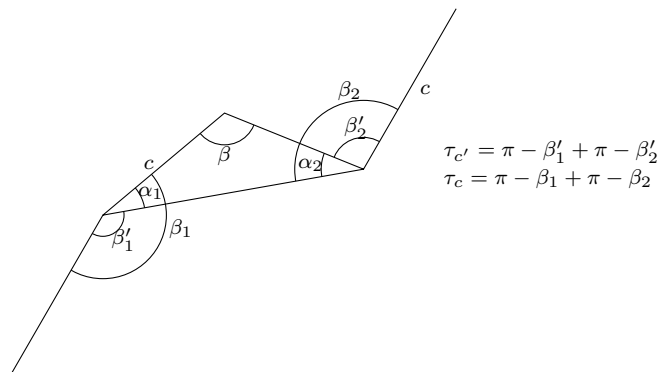
Es sei  $c$  eine stückweise geodätische Kurve in einem  $\text{CAT}(\kappa)$ -Raum. Sind  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = l$  so, dass  $c_i = c|_{[t_{i-1}, t_i]}$  geodätisch Segmente sind, so bezeichne  $\beta_i = \sphericalangle_{c(t_i)}(c_{i-1}, c_i)$  die Innenwinkel. Die **Totalkrümmung** von  $c$  sei  $\tau_c = \sum_i \pi - \beta_i$ . Für eine beliebige Kurve sei

$$\tau_\gamma = \limsup \{ \tau_c \mid c \text{ Polygonapproximation von } \gamma \}$$

$$\tau_\gamma(t) = \tau_\gamma|_{[0, t]}$$

Im Fall von  $\text{CAT}(0)$  gilt Monotonität.

Ist  $c$  eine Verfeinerung einer Polygonapproximation  $c'$  von  $\gamma$ , so gilt  $\tau_{c'} \leq \tau_c$ , wie man an der Zeichnung erkennen kann:



Es gilt

$$\begin{aligned}
 \tau_c &= \pi - \beta_1 + \pi - \beta + \pi - \beta_2 \\
 &\geq \pi - (\beta'_1 + \alpha_1) + \pi - \beta + \pi - (\beta'_2 + \alpha_2) \\
 &= \underbrace{\pi - \beta'_1 + \pi - \beta'_2}_{\tau_{c'}} + \underbrace{\pi - (\beta + \alpha_1 + \alpha_2)}_{\leq \bar{\beta} + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi} \\
 &\geq \tau_{c'}
 \end{aligned}$$

**Definition (Umfang einer Kurve)**

Es sei  $c$  eine Kurve. Der **Umfang**  $R_c$  von  $c$  ist der Radius des kleinsten Balles, der das Bild von  $c$  enthält:

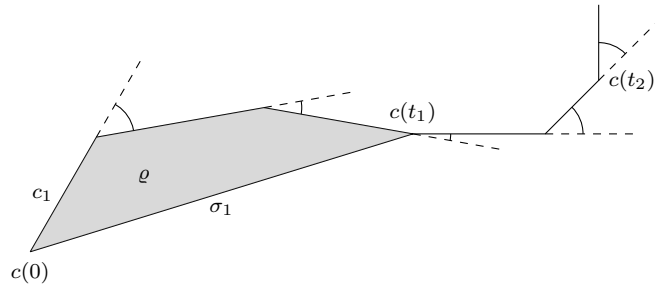
$$R_c(t) = \inf\{R \mid \text{Bild } c|_{[0,t]} \subset \mathbb{B}_R(c(0))\} = \sup_t \{d(c(0), c(t))\}$$

**Satz (Alexander-Bishop-Ghrist 2010)**

Es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in einem CAT(0)-Raum. Dann gilt

- (i) Gilt  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau_c(t)}{t} = 0$ , so folgt dass  $c$  unbeschränkt ist.
- (ii) Falls  $\tau_c(t) \leq \text{const} \cdot t^\lambda$  für ein  $\lambda \in (0, 1)$  gilt (das heißt  $\tau_c \in O(t^\lambda)$ ), so folgt  $R_c(t) \geq \text{const} \cdot t^{1-\lambda}$  für hinreichend große  $t$  (das heißt  $R_c \in \Omega(t^{1-\lambda})$ ).

Man kann  $c|_{[0,t]}$  durch eine hinreichend feine Polynomapproximation ersetzen:



Wähle eine Partitionierung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  so, dass  $c_i = c|_{[t_{i-1}, t_i]}$  eine Totalkrümmung  $\leq \frac{\pi}{2}$  hat mit  $n \leq \frac{\tau_c(t)}{\frac{\pi}{2}} + 1$ . Es bezeichne  $\sigma_i$  die Sekante  $c(t_{i-1})c(t_i)$  und  $\rho_i$  das durch  $c_i$  und  $\sigma_i$  definierte Polygon. Jede Kurve (und insbesondere jedes Polygon) in einem CAT( $\kappa$ )-Raum lässt sich „ausfüllen“.

**Satz (Rechetnyak 1968)**

Es sei  $c$  eine geschlossene Kurve in einem CAT( $\kappa$ )-Raum  $X$  mit  $l(c) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Dann existiert ein konvexes Gebiet  $C \subseteq M_\kappa^2$  und eine Bogenlängenparametrisierung  $\bar{c}$  von  $\partial C$ , sowie eine nicht-expandierende Abbildung  $\varphi : C \rightarrow X$  mit  $\varphi \circ \bar{c} = c$ .

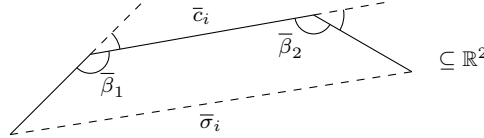
**Beweisskizze**

Man sieht leicht ein, dass falls  $c|_{[a,b]}$  geodätisch ist, so auch  $\bar{c}|_{[a,b]}$  und dass für Winkel  $\beta$ , beziehungsweise  $\bar{\beta}$  solcher aufeinanderfolgender Segmente  $\beta \leq \bar{\beta}$  gilt. (□)

**Beweis (zu Alexander-Bishop-Ghrist 2010)**

- (i) Es existiert zu  $\rho_i$  ein konvexes Polygon  $\bar{\rho}_i$  mit den gleichen Seitenlängen wie  $\rho_i$ . Wie auch  $\rho_i$  besteht  $\bar{\rho}_i$  aus einem konvexen Polygon  $\bar{c}_i$  mit der Totalkrümmung  $\tau_{\bar{c}_i} = \sum \pi - \bar{\beta}_i \leq \sum \pi - \beta_i \leq \frac{\pi}{2}$  und eine Sekante  $\sigma_i$ .





Es gilt  $\frac{l(\bar{c}_i)}{l(\bar{\sigma}_i)} \leq \sqrt{2}$ , also  $\sqrt{2} \geq \frac{l(\bar{c}_i)}{l(\bar{\sigma}_i)} = \frac{l(c_i)}{l(\sigma_i)} = \frac{t_i - t_{i-1}}{l(\sigma_i)}$ . Damit folgt

$$t = \sum_i t_i - t_{i-1} \leq \sqrt{2} \sum_{i=0}^n l(\sigma_i) \leq \sqrt{2} \left( \frac{\tau_c(t)}{\frac{\pi}{2}} + 1 \right) \sup(\sigma_i)$$

also

$$\frac{\tau_c(t)}{t} \geq \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2} \sup l(\sigma_i)} - \frac{1}{t} \right).$$

Ist  $c$  beschränkt, so folgt  $\frac{\tau_c(t)}{t} \geq \text{const} > 0$ . Sei nun ohne Einschränkung  $c$  eine Polynomapproximation. Zerlege  $c$  in  $n \leq \frac{\tau_c(t)}{\frac{\pi}{2}} + 1$  Teilkurven  $c_i$  mit  $\tau_{c_i} \leq \frac{\pi}{2}$ . Bezeichne  $\sigma_i$  die Sekante der Teilkurve  $c_i$ , so gilt

$$\frac{t_i - t_{i-1}}{l(\sigma_i)} = \frac{l(c_i)}{l(\sigma_i)} \leq \sqrt{2}$$

und es folgt

$$t = \sum t_i - t_{i-1} \leq \sqrt{2} \sum l(\sigma_i) \leq \sqrt{2} \left( \frac{\tau_c(t)}{\frac{\pi}{2}} + 1 \right) \sup l(\sigma_i) \quad (*)$$

und

$$\frac{\tau_c(t)}{t} \geq \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2} \sup l(\sigma_i)} - \frac{1}{t} \right)$$

Wenn  $c$  unbeschränkt ist, so ist  $l(\sigma_i)$  beschränkt. Daraus folgt  $\frac{\tau_c(t)}{t} \geq \text{const} > 0$  für  $t \gg 0$  und damit folgt die Aussage von (i).

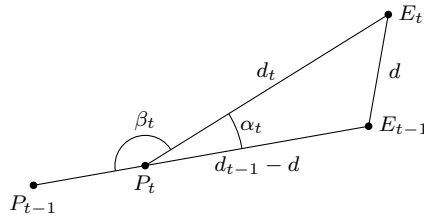
(ii) Gilt  $\tau_c(t) \leq \text{const} \cdot t^\lambda$ , so folgt aus (\*)

$$t \leq \underbrace{\sqrt{2} \left( \frac{\tau_c(t)}{\frac{\pi}{2}} + 1 \right)}_{\leq \text{const} \cdot t^\lambda} \underbrace{\sup l(\sigma_i)}_{\leq 2R_c(t)} \leq \text{const} \cdot t^\lambda \cdot R_c(t)$$

Daraus folgt die Behauptung von (ii) □

### Beweis (zum Beweis des ersten Satzes)

Es wurde bereits gezeigt, dass eine erfolgreiche Flucht gilt:



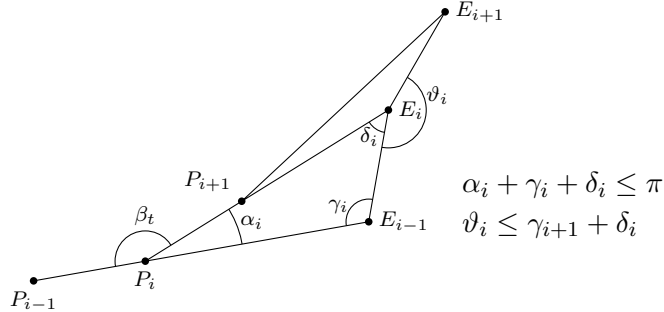
Der Winkel  $\alpha_t = \sphericalangle_{P_t}(E^{t-1}, E^t)$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0. Das liefert  $\frac{\tau(t)}{t} = \frac{1}{t} \sum \pi - \beta_i = \frac{1}{t} \sum \alpha_i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Damit folgt aus Satz (i), dass die Verfolgerkurve  $P$ , und damit  $D$  unbeschränkt ist. □

**Satz (Alexander-Bishop-Ghrist 2010)**

Es sei  $D$  ein  $CAT(0)$ -Raum. Dann gilt  $\tau_P \leq \tau_E + \pi$ .

**Beweis**

Betrachte die folgende Zeichnung:



Es gilt

$$\begin{aligned} \tau_P(nd) &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi - \beta_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \pi - \gamma_i - \delta_i \\ \tau_E(nd) &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi - \vartheta_i \geq \sum_{i=1}^{n-1} \pi - \gamma_{i+1} - \delta_i \\ \tau_P - \tau_E(nd) &= \sum_{i=1}^{n-1} (\pi - \gamma_i - \delta_i) - (\pi - \gamma_{i+1} - \delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{i+1} - \gamma_i = \gamma_n - \gamma_1 \leq \pi \quad \square \end{aligned}$$

## 5 Positive Krümmungsschranken

Im Folgenden Sei  $D$  stets ein  $CAT(1)$ -Raum. Beispiele für solche Räume sind die Einheitssphäre  $S^n$ , die euklidische Ebene mit ausgeschnittenem offenen Ball  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}_1^o$  oder verallgemeinert  $\mathbb{R}^n \setminus \dot{\bigcup} \mathbb{B}_1^o(p_i)$

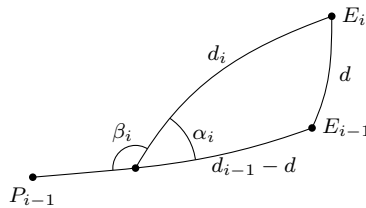
**Satz (Alexander-Bishop-Ghrist 2010)**

Es sei  $D$  ein  $CAT(1)$ -Raum und  $E_t$  eine erfolgreiche Fluchtstrategie mit  $d_0 = d(E_0, P_0) < \pi$ . Dann gilt

$$\tau_p(t) \leq \text{const} \cdot \sqrt{t}.$$

**Beweisskizze**

Betrachte die Zeichnung



Aus der Dreiecksungleichung folgt  $d_i \leq (d_{i-1} - d) + d = d_{i-1}$ , also ist  $d_i$  monoton fallend. Es gilt

$$d_i \leq d_0 < \pi$$

Damit hat jedes Dreieck  $\Delta P_i E_{i-1} E_i$  den Umfang  $< 2\pi$  und besitzt damit ein eindeutiges Vergleichsdreieck in  $S^2$ . Damit gilt für den Vergleichswinkel  $\bar{\alpha}_i$  dass  $\alpha_i \leq \bar{\alpha}_i$  und es gilt

$$\tau_p(t) = \sum \pi - \beta_i \leq \sum \alpha_i \leq \sum \bar{\alpha}_i.$$

Falls  $E_i$  eine erfolgreiche Fluchtstrategie ist, gilt  $d_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} d_i > d$ . Es sei  $\delta_i = d_i - d_{i-1} \geq 0$ . Wendet man den sphärischen Kosinussatz auf das Vergleichsdreieck an, so folgt

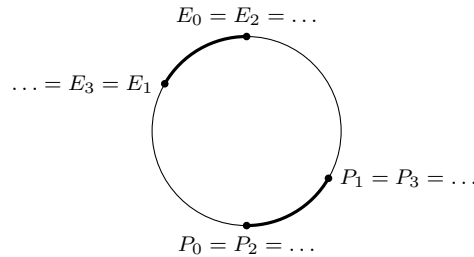
$$\cos d \leq \cos d + \delta_i \sin d - \text{const} \cdot \bar{\alpha}_i^2$$

und daraus folgt  $\bar{\alpha}_i^2 \leq \text{const} \cdot \delta_i \cdot d$ . Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \tau_p(nd) &\leq \sum \bar{\alpha}_i \leq \sqrt{(n-1) \sum \bar{\alpha}_i^2} \\ &\leq \sqrt{(n-1) \cdot \text{const} \cdot d \cdot (d_0 - d_\infty)} \\ &\leq \text{const} \sqrt{nd} \end{aligned} \quad (\square)$$

**Bemerkung (zu  $d_0 < \pi$ )**

Betrachte das folgende Szenario in  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}_{\frac{3}{2}}(0)$



$E$  und  $P$  starten an gegenüberliegenden Polen. Im ersten Schritt läuft  $E$  den Kreis entlang nach links, während  $P$  nach rechts läuft. Da  $P$  jedes mal eine Geodätische wählt und es nun zwei kürzeste Wege gibt kann  $P$  diese ungeschickte Wahl treffen. In zweiten Schritt läuft  $E$  wieder zurück, während  $P$  erneut die unglückliche Wahl trifft und ebenfalls zurückläuft.  $E$  und  $P$  wiederholen diese Prozedur immer wieder und treffen sich niemals, weshalb  $\tau_P(t)$  in diesem Szenario linear wächst.

**Korollar**

Ist  $D$  ein CAT(0)-Raum und  $E_t$  erfolgreich, so gilt  $\tau_P(t) \leq \text{const} \sqrt{t}$ .

**Beweis**

Winkel sind invariant unter Skalierungen. Damit sind die CAT(0) Bedingung und die Totalkrümmung invariant. Sei  $\tilde{d}(\cdot, \cdot) = \frac{\pi}{2d_0} d(\cdot, \cdot)$  die skalierte Metrik, dann ist  $\tilde{d}_0 = \frac{\pi}{2} < \pi$ . Der Rest folgt aus dem Satz.  $\square$

**Korollar**

Unter denselben Voraussetzungen wie in obigem Korollar gilt  $R_E(t) \geq \text{const}$ .

**Beweis**

Es gilt  $R_P(t) \geq \text{const} \sqrt{t}$  nach dem obigen Korollar und Satz (ii). Ferner gilt

$$d(E_0, E_t) \geq d(P_0, P_t) - d(P_t, E_t) - d(E_0, P_0) \geq d(P_0, P_t) - \text{const}$$

Daraus folgt

$$R_E(t) = \sup\{d(E_0, E_t)\} \geq \dots \geq \text{const} \cdot R_P(t) \geq \text{const} \sqrt{t} \quad \square$$

# Kapitel 2

## Bewegungsplanung & Konfigurationsräume

Als Motivation für das folgende Kapitel können wir uns beispielsweise die Bewegungssteuerung gleichartiger Automaten, beziehungsweise Fahrzeuge, in einer Umgebung, etwa in der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  oder der Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \leq k} I_i$  mit Hindernissen, anschauen.

Unser Ziel ist es, bestimmte Positionen oder Zyklen von Bewegungen, zum Beispiel zur Steuerung von Fahrzeugen in einer Lagerhalle, zu finden. Als Einschränkung wählen wir dabei das Umfahren von Hindernissen.

Wir modellieren das Problem, so dass  $x_i$  die Position des  $i$ -ten Automaten mit  $x_i \notin O_i$  beschreibt, und Kollisionsfreiheit, das heißt  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$ . Wir setzen

$$X = \times_{i=1}^n (\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_k O_k) \setminus \Delta \quad \Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_i = x_j, i \neq j\}$$

Wir werden uns auf Graphen beschränken, das ist zum Einen motiviert durch Anwendung (Schienensysteme), und zum Anderen durch Methodik (lokale Kollisionsvermeidung).

Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Die **verallgemeinerte Diagonale** von  $X^n$  ist  $\Delta = \Delta_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \exists i \neq j : x_i = x_j\}$ . Der Raum

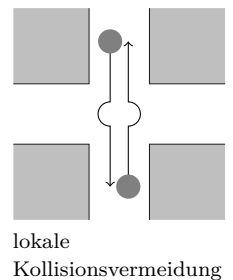
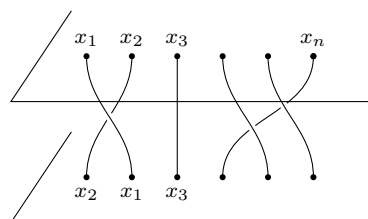
$$F_N X = X^n \setminus \Delta_n(X)$$

heißt der **Konfigurationsraum** von  $X$ .

### Beispiel

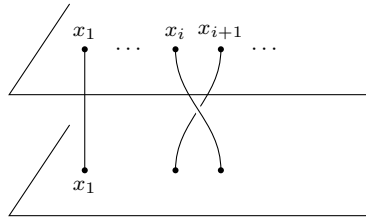
$$F_2 \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3 \times S^1 \text{ (Beweis zur Übung)}$$

Die symmetrische Gruppe  $S_n$  wirkt frei auf  $F_n X$ . Dann heißt der Quotient  $C_n X = F_n X / S_n$  der **(ungeordnete) Konfigurationsraum** von  $X$ . Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(C_n X)$  heißt die  $n$ -te **Zopfgruppe** von  $X$ . Die klassischen Zopfgruppen sind  $B_n = \pi_1(C_n \mathbb{R}^2)$ :



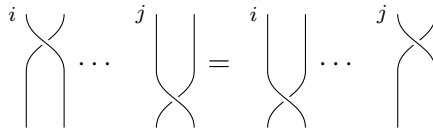
$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [x_2, x_1, \dots, x_n]$$

Darstellung von  $B_1$ :

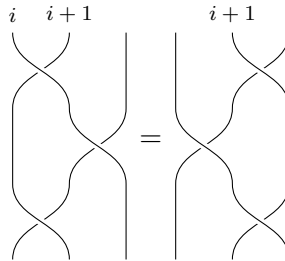


Erzeuger:  $g_i, i \leq n - 1$ , Relationen:

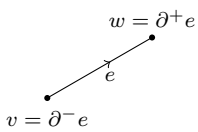
- $g_i g_j = g_j g_i, |i - j| \geq 2$



- $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$



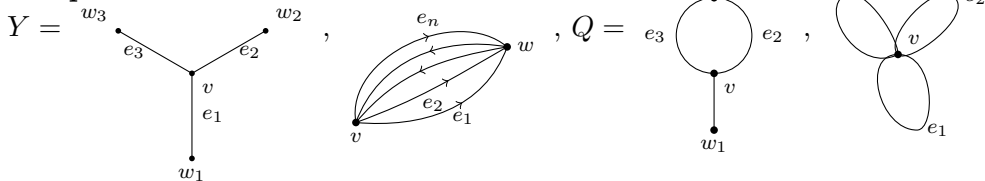
Ein **Graph**  $\mathcal{G}$  besteht aus einer nichtleeren **Eckenmenge**  $\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{G}$ , einer **Kantenmenge**  $\mathcal{E} = \mathcal{G}\mathcal{E}$  und (surjektiven) **Randabbildungen**  $\partial^\pm : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ . Zur Notation der **Kantenorientierung** sei  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times \{+1, -1\}$  mit den Randabbildungen



$$e^+ = (e, 1) \mapsto \partial^+ e \quad \text{und} \quad e^- = (e, -1) \mapsto \partial^- e.$$

Dann gilt für die Kanteninversion  $e^\pm \rightarrow e^\mp$ ,  $\partial^+ e^- = \partial^- e$  und  $\partial^- e^+ = \partial^+ e$ . Es bezeichne  $|e|$  stets die unorientierte Kante  $e$ .

**Beispiel**



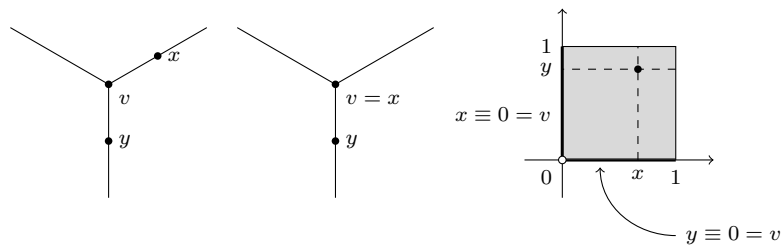
Der **Grad**  $\deg v$  einer Ecke ist die Zahl, wie oft  $v$  als Ecke einer Kante vorkommt. Eine Ecke mit  $\text{Grad} \geq 3$  heißt **essentiell**, mit Grad 1 heißt sie **frei**.

Die geometrische Realisierung  $|\mathcal{G}|$  eines Graphen  $\mathcal{G}$  erhält man durch das Verkleben von (Einheits-) Intervallen zu jeder Kante entsprechender Randabbildungen. Man kann sich, aus topologischer Sicht, auf Graphen beschränken, deren Ecke entweder frei oder essentiell ist. Jede essentielle Ecke  $v$  besitzt eine Umgebung  $U$ , so dass  $U \setminus \{v\}$  in  $\mathcal{G}$  in mindestens drei Zusammenhangskomponenten zerfällt.

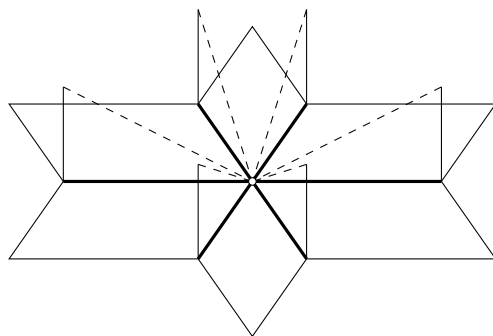
**Beispiel**

Wir betrachten nun speziell  $F_2 Y$ . Die Position zweier Punkte  $x$  und  $y$  auf benachbarten Kanten ist durch ein Einheitsquadrat parametrisiert. Die Achsen sind für

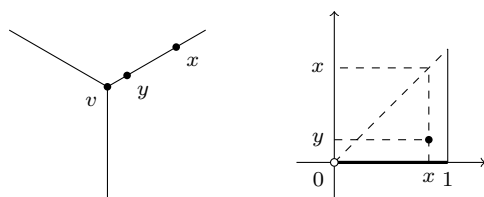
ihre jeweiligen Punkte zugelassene Positionen, solange nicht beide Punkte null sind, da es dann zu einer Kollision käme.



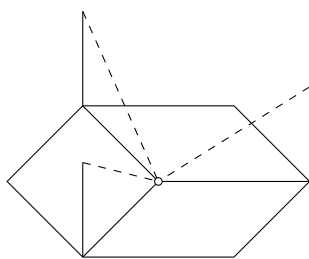
Sechs dieser Parameterbereiche werden entlang der Kanten  $x \equiv 0 = v$  beziehungsweise  $y \equiv 0 = v$  miteinander verklebt



Liegen zwei Punkte  $x$  und  $y$  auf einer Kante, so sind ihre Koordinaten durch ein „halbes“ Quadrat parametrisiert.



Für  $C_2Y$  ergibt sich dann



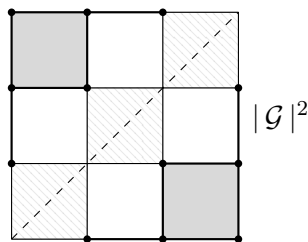
### Satz (Swiatowski 2001)

Es sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher Graph. Dann existiert ein nichtpositiv gekrümmter-Kubenz-Komplex  $K_n \mathcal{G} \hookrightarrow C_n \mathcal{G} = F_n \mathcal{G} / \mathcal{S}_n$ , sodass  $K_n \mathcal{G}$  ein Deformationsretrakt von  $C_n \mathcal{G}$  ist. Es gilt  $\dim K_n \mathcal{G} = \min\{n, b\}$ , wobei  $b$  die Anzahl der essentiellen Ecken von  $\mathcal{G}$  ist.

Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(C_n \mathcal{G})$  enthält eine frei abelsche Untergruppe vom Rang  $\min\{b, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ . Die Konstruktion basiert darauf, die Verteilung von Punkten auf Ecken, beziehungsweise Kanten, beziehungsweise die Übergänge zwischen solchen Zuständen zu beschreiben.

**Ansatz (Abrams 2000)**

Wie erhält man die Zellenstruktur beziehungsweise die Kombinatorik von  $|\mathcal{G}|^n = \{\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \mid \sigma \text{ Zelle von } \mathcal{G}\}$  in  $C_n \mathcal{G}$ ? Man erhält  $F_n \mathcal{G}$  durch das „Löschen“ der verallgemeinerten Diagonale.

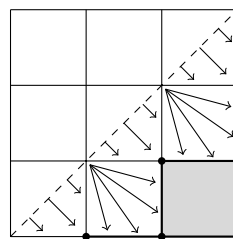
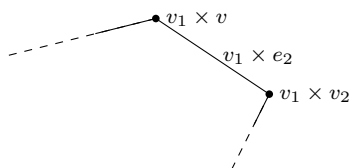
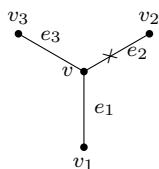


**Analogon**

$|\mathcal{G}|^n$  ist ein Zellkomplex mit Zellen  $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ . Die kombinatorische Diagonale von  $|\mathcal{G}|^n$  besteht aus Zellen der Form  $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$  mit  $\partial\sigma_i \cap \partial\sigma_j \neq \emptyset$  für ein  $i \neq j$ . Betrachten den kombinatorischen Konfigurationsraum mit Zellen  $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$  mit  $\partial\sigma_i \cap \partial\sigma_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ . Dies sind genau die  $n$ -Tupel von Punkten, welche paarweise durch eine (offene) Kante getrennt sind.

**Beispiel**

$\mathcal{G} = Y$ : 1-Zellen der Form  $v \times e$ , wobei  $e$  eine der Ecke  $v$  gegenüberliegende Kante ist.



Anschließend lässt sich der kombinatorische Konfigurationsraum auf  $C_n \mathcal{G}$  retraktieren. Leider erhält man im Allgemeinen *nicht* die Topologie von  $C_n \mathcal{G}$ : Beispiel

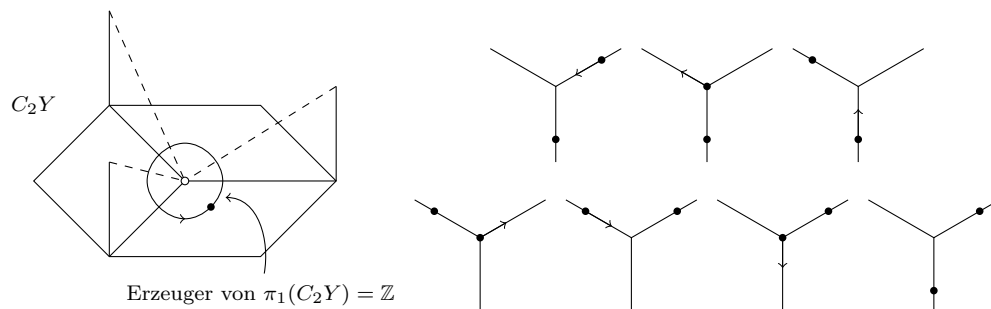
$$v \begin{matrix} \xrightarrow{e_2} \\ \xrightarrow{e_1} \end{matrix} v \rightsquigarrow v \times w. \text{ Es gilt zumindest}$$

**Satz (Abrams 2000)**

Ist  $\mathcal{G}$  ein einfacher Graph, das heißt enthält keine Schleifen der Länge  $\leq 2$ , so ist sein kombinatorischer Konfigurationsraum auf zwei Punkten ein Deformationsretrakt von  $C_2 \mathcal{G}$ .

**Beispiel**

$\pi_1(C_2, Y)$



Erzeuger von  $\pi_1(C_2 Y) = \mathbb{Z}$



**Definition (Swiatowski)**

Es sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher Graph, dessen nichtessentielle Ecken frei sind, mit Kanten  $\mathcal{E}$  und Ecken  $\mathcal{V}$ . Es bezeichne  $\mathcal{B}$  die Menge der essentiellen Ecken. Es sei  $P_n^{(k)} \mathcal{G}$  die Menge der Paare  $(f, S)$  mit

- (i)  $f : \mathcal{E} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Abbildung
- (ii)  $S = \{e_1, \dots, e_k\}$  paarweise verschiedene orientierte Kanten
- (iii)  $v_{e_i} = \partial^+ e_i \in \mathcal{B}$  und  $v_{e_i} \neq v_{e_j}$  für  $i \neq j$
- (iv)  $f(v) \in \{0, 1\}$  für alle  $v \in \mathcal{B}$  und  $f(v_{e_i}) = 0$  für alle  $i \leq k$
- (v)  $\sum_{|a| \in \mathcal{E} \cup \mathcal{B}} f(|a|) = n - k$ .

Es gelte dabei  $(f, S) \prec (g, S \cup \{e\})$  mit  $e \notin S$ , falls entweder

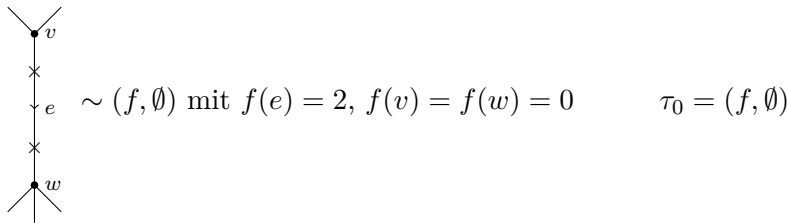
- (a)  $f(v_e) = g(v_e) + 1 (= 1)$  und sonst  $f(a) = g(a)$

oder

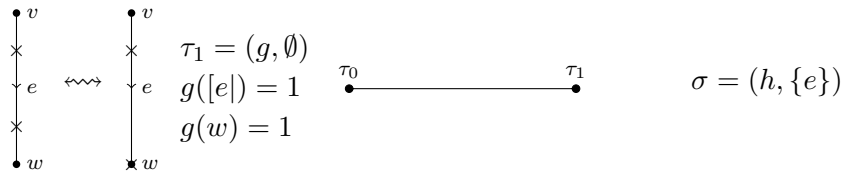
- (b)  $f(|e|) = g(|e|) + 1$  und sonst  $f(a) = g(a)$

gilt. Es bezeichne  $\prec$  die davon erzeugte partielle Ordnung auf  $P_n \mathcal{G} = \dot{\cup} P_n^{(k)} \mathcal{G}$  und  $K_n \mathcal{G}$  seine geometrische Realisierung.

0-Skelett: Paare  $(f, \emptyset)$  mit  $f : \mathcal{E} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{|a| \in \mathcal{E} \cup \mathcal{B}} f(|a|) = n$ ,  $f$  „zählt“ wieviele Punkte auf einer Kante beziehungsweise essentiellen Ecke sitzen.



Zwei solche 0-Zellen sind durch eine Kante (1-Zelle) verbunden, wenn einer der Punkte das Innere einer Kante durch eine essentielle Ecke betritt oder verlässt.



$$h(|e|) = 1 \xrightarrow{(b)} \tau_0 \prec \sigma, h(w) = 0 \xrightarrow{(a)} \tau_1 \prec \sigma \quad (h(v) = 0)$$

Die höherdimensionalen Zellen bestehen aus  $k$ -Tupeln von unabhängigen Zügen wie oben. Ist  $\sigma = (g, \{e_1, \dots, e_k\})$  eine  $k$ -Zelle in  $K_n \mathcal{G}$ , so besitzt  $\sigma$  genau  $2k$  Facetten der Kodimension 1:

$$\partial_{e_i}^\pm \sigma = (g_i^\pm, \{e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k\})$$

mit  $g_i^+(v_{e_i}) = 1$ , beziehungsweise  $g_i^- (|e_i|) = g(|e_i|) + 1$ . Damit ist  $K_n \mathcal{G}$  ein Kubenkomplex: Jede Menge  $\{\tau \mid \tau \prec \sigma\}$  ist ein Würfel.

Wir definieren die Dimension als  $\dim K_n \mathcal{G} = \min\{|\mathcal{B}|, n\}$ . Es gilt dann  $\dim K_n \mathcal{G} = \max\{k \mid P_n^{(k)} \mathcal{G} \neq \emptyset\}$ . Wir beweisen die Aussage:

Aus (ii) und (iii) folgt  $\dim K_n \mathcal{G} \leq |\mathcal{B}|$ . Ist  $k = \min\{|\mathcal{B}|, n\}$ , so existieren paarweise verschiedene essentielle Ecken  $v_1, \dots, v_n$ . Da  $v_i$  essentiell ist, existieren paarweise

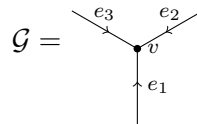
verschiedene Kanten  $e_1, \dots, e_k$  mit  $v_i = v_{e_i}$ . Es sei  $S = \{e_1, \dots, e_k\}$  und

$$f : \mathcal{E} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad |a| \mapsto \begin{cases} n - k & |a| = e_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt  $(f, S) \in P_n^{(k)} \mathcal{G}$ .

**Beispiel**

Betrachte wieder den Graphen  $\mathcal{G} = Y$ , wir suchen  $K_2 Y$  mit  $\mathcal{B} = \{v\}$ ,  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$  und  $\dim K_2 Y = \min\{|\mathcal{B}|, n\} = \min\{2, 1\} = 1$ .



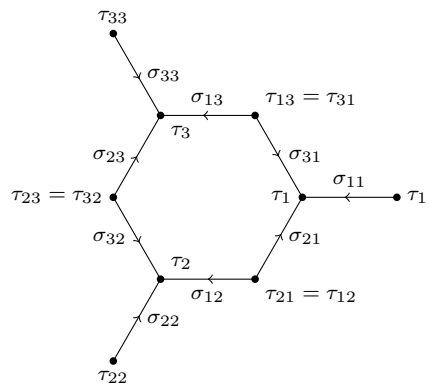
Für die 1-Zellen setze  $\sigma = (g, S)$  mit  $|S| = 1$ , also  $S = \{e_i\}$  für ein  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Dann folgt  $g(v_{e_i}) = g(v) = 0$  nach (iv). Daraus ergibt sich für die Summe

$$\sum_{|a| \in \mathcal{E} \cup \mathcal{B}} g(|a|) = g(|e_1|) + g(|e_2|) + g(|e_3|) + 0 = n - k = 2 - 1 = 1$$

Da alle Summanden positiv sind muss es genau ein  $j$  mit  $g(|e_j|) = 1$  geben, und damit existieren insgesamt genau neun 1-Zellen  $\sigma_{ij} = (|e_j| \mapsto 1, \{e_i\})$  als Ränder. Für die 0-Zellen ergibt sich dann:

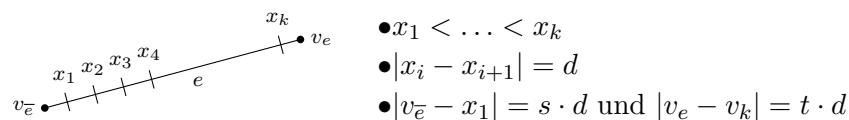
- (a)  $\partial^+ \sigma_{ij} = ( \begin{smallmatrix} v \\ |e_j| \end{smallmatrix} \mapsto \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \emptyset ) = \tau_j$  (deg  $\tau_j = 3$ )
- (b)  $i \neq j$ :  $\partial^- \sigma_{ij} = ( \begin{smallmatrix} |e_i| \\ |e_j| \end{smallmatrix} \mapsto \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \emptyset ) = \tau_{ij} = \tau_{ji}$  (deg  $\tau_{ij} = 2$ )
- $i = j$ :  $\partial^- \sigma_{ii} = (|e_i| \mapsto 2, \emptyset) = \tau_{ii}$  (deg  $\tau_{ii} = 1$ )

Anschaulich ergibt sich schließlich folgendes Bild:



**Einbettung  $\iota : K_n \mathcal{G} \hookrightarrow C_n \mathcal{G}$**

Sei die Verteilung von  $k$  Punkten auf einer Kante  $e$  durch  $D_e(k, (s, t)) \subset C_n \mathcal{G} \cap e$ , mit  $(s, t) \in [0, 1]$ , gegeben mit



als koordinaten auf einem Würfel  $\sigma = (f, S) \in P_n^{(k)}$ . Definiere  $t : \sigma \rightarrow [0, 1]^s$  durch lineare Fortsetzung der Abbildung auf seinen 0-Zellen  $p = (f, \emptyset)$ :

$$t(p) : S \rightarrow [0, 1] \quad e \mapsto 1 - f(e).$$

Für jedes  $x \in \sigma = (g, S) \subset K_n \mathcal{G}$  ist  $t(x)$  eine Abbildung von  $S$  in  $[0, 1]$ . Setze fort

$$t(x) : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1] \quad e \mapsto \begin{cases} t(x)(e) & e \in S \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Daraus erhält man eine Einbettung  $\iota_\sigma : \sigma = (g, S) \rightarrow C_n \mathcal{G}$ ,  $x \mapsto \{v \in \mathcal{B} \mid g(v) = 1\} \cup_{e \in \mathcal{E}} D_e(\tilde{g}(|e|), (t(x)(\bar{e}), t(x)(e)))$ , wobei  $\tilde{g}(|e|) = g(|e|) + \#\{s \in S \mid |s| = e\}$ .

Es sei  $x \in \tau = (f, S) \prec \sigma = (g, S \cup \{e\})$ . Wir beschränken und im Folgenden zunächst nur auf den Fall (a), der Fall (b) folgt dann analog. Sei  $f(v_e) = g(v_e) + 1 = 1$ , also  $t_\sigma(x)(e) = 0$  und  $v_e \in v_\tau(x)$  für  $e \notin S$ . Dann folgt  $t_\tau(x)(e) = 1$ . Aus  $f(|e|) = g(|e|)$  folgt  $\tilde{g}(|e|) = \tilde{f}(|e|) + 1$ .

Es folgt

$$\begin{aligned} & D_e(\underbrace{\tilde{g}(|e|)}_{=f(|e|)+1}, \underbrace{(t_\sigma(x)(\bar{e}), t_\sigma(x)(e))}_{=0}) \\ &= D_e(\tilde{f}(|e|) + 1, (s, 0)) \\ &= \{v_e\} \cup D_e(\tilde{f}(|e|), (s, 1)) \quad \Rightarrow \iota_\sigma(x) = \iota_\tau(x) \end{aligned}$$

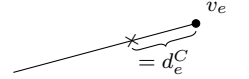


Damit definiert  $\iota = \bigcup_\sigma \iota_\sigma$  eine Einbettung  $K_n \mathcal{G} \hookrightarrow C_n \mathcal{G}$ .

### Retraktion $r : C_n \mathcal{G} \rightarrow K_n \mathcal{G}$

Sei  $C \in C_n \mathcal{G}$  und bezeichne  $n_e^C = \#(C \cap e) \setminus \mathcal{B}$  die Anzahl der Punkt auf  $e$ . Setze

$$d_e^0 = \begin{cases} 1 & n_e^C = 0 \\ \min\{|v_e - x| \mid x \in C \cap e \setminus \mathcal{B}\} & \text{sonst} \end{cases} \quad \delta_e^C = d_e^C (n_e^C + 1)$$



und die mittlere Segmentlänge  $\frac{1}{n_e^C + 1}$ . Setze weiterhin

$$t_e^C = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_e \text{ frei oder } v_e \in C \\ \min\{1, \frac{\delta_e^C}{\min\{\delta_{e'}^C \mid e' \neq e \wedge v_{e'} = v_e\}}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere

$$r : C_n \mathcal{G} \rightarrow \iota(K_n \mathcal{G}) \quad C \mapsto (C \cap \mathcal{B}) \cup \bigcup_e D_e(n_e^C, (t_e^C, t_e^C))$$

### Homotopie $\text{id} \cong r$

Für beliebiges  $C \in C_n \mathcal{G}$  gilt

- $C \cap \mathcal{B} = r(C) \cap \mathcal{B}$
- $\#(C \cap e) \setminus \mathcal{B} = \#(r(C) \cap e) \setminus \mathcal{B}$  für alle  $e \in \mathcal{E}$

Definiere die Homotopie kantenweise, so dass Punkte in die vorgegebene Standardposition bewegt werden.

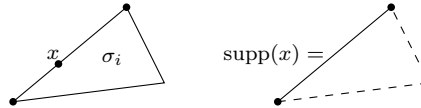
# 1 Geometrie des Kubenkomplexes $K_n \mathcal{G}$

## Definition ( $M_\kappa$ -Komplex)

Es sei  $\sigma_i$ , für  $i \in I$ , eine disjunkte Familie konvexer Polyeder, das heißt  $\sigma_i$  ist eine konvexe Hülle endlich vieler Punkte in  $M_\kappa^{n_i}$ . Es sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\sqcup_{i \in I} \sigma_i$ ,  $X = \sqcup_{i \in I} \sigma_i / \sim$  und  $\pi : \sqcup_{i \in I} \sigma_i \rightarrow X$  die kanonische Projektion.  $X$  heißt  **$M_\kappa$ -Polyederkomplex**, falls gilt:

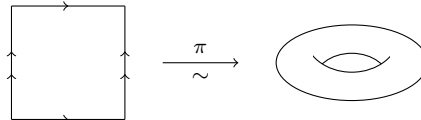
$\hat{\tau}$  offenes Inneres von  $\tau$

- (i) Ist  $\tau \leq \sigma_i$  eine Seite, so ist  $\pi|_{\hat{\tau}}$  injektiv.
- (ii) Sind  $x_1 \in \sigma_1$  und  $x_2 \in \sigma_2$  mit  $\pi|_{\sigma_1}(x_1) = \pi|_{\sigma_2}(x_2)$ , so existiert eine Isometrie  $\varphi : \text{supp}(x_1) \rightarrow \text{supp}(x_2)$  mit  $\pi|_{\sigma_1}(y) = \pi|_{\sigma_2}(\varphi(y))$  für alle  $y \in \text{supp}(x_1)$ ; wobei  $\text{supp}(x_i)$  die eindeutige Seite  $\tau < \sigma_i$  mit  $\hat{\tau} \ni x_i$  ist.



Ein  $M_\kappa$ -Polyederkomplex ist im Allgemeinen *kein* simplizialer Komplex. Betrachte die folgenden beiden Beispiele:

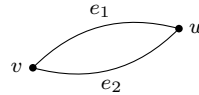
- (1) 2-Torus:



$\sigma = [0, 1]^2$  einziger Polyeder,  $\sim$  Kantenidentifikation (wie üblich)

*Kein* simplizialer Komplex, denn  $\pi|_\sigma$  ist nicht injektiv

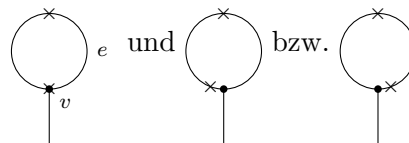
- (2) Digon: zwei (maximale) Polyeder  $e_1 \cong e_2 \cong [0, 1]$ ,  $\sim =$  Identifikation der Randpunkte



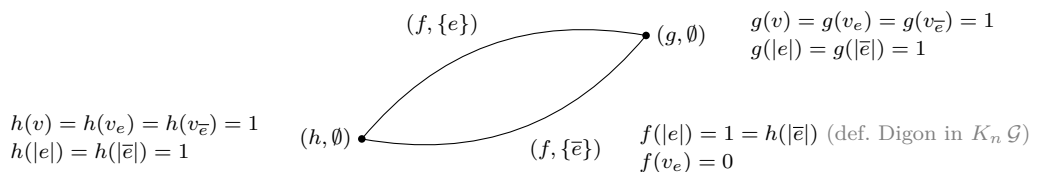
- (i)  $\pi|_{e_i}$  ist injektiv.
- (ii)  $\pi(e_1) \cap \pi(e_2) = \{v, w\}$  ist *nicht* gemeinsame Seite des Polyeders.

Der Kubenkomplex  $K_n \mathcal{G}$  ist ein  $M$ -Polyederkomplex im obigen Sinne.  $K_n \mathcal{G}$  enthält keine Schleifen. Ist  $\sigma \subset K_n \mathcal{G}$  ein 1-Würfel, das heißt  $\sigma = (f, \{e\})$ , so gilt  $\partial^+(f, \{e\}) = \left( \begin{smallmatrix} v_e \mapsto 0 \\ |e| \mapsto f(|e|)+1 \end{smallmatrix}, \emptyset \right) \neq \partial^-(f, \{e\}) = \left( \begin{smallmatrix} v_e \mapsto 1 \\ |e| \mapsto f(|e|) \end{smallmatrix}, \emptyset \right)$ .

Es gibt Digone in  $K_n \mathcal{G}$ : Es gelte  $n \geq 1$  und  $\mathcal{G}$  enthalte eine Schleife. betrachte die folgenden Konfigurationen:



Es gelte  $v_e = v = v_{\bar{e}}$ , damit existieren zwei Intervalle in  $K_n \mathcal{G}$ , welche das Verlassen der orientierten Kante  $e$  parametrisieren:



Jeder höherdimensionale Würfel in  $K_n \mathcal{G}$  ist eindeutig durch seine Kodimension-1-Seiten bestimmt: Es seien  $(g, S)$  und  $(h, T)$  Würfel der Dimension  $\geq 2$  in  $K_n \mathcal{G}$  mit  $\{\partial_i^\pm(g, S)\} = \{\partial_i^\pm(h, T)\}$ . Es gilt

$$2|S| = \#\{\partial_i^\pm(g, S)\} = \#\{\partial_i^\pm(h, T)\} = 2|T|.$$

Daraus folgt  $|S| = |T| \geq 2$ , also  $S = T$ . Man sieht leicht ein, dass dann auch  $g = h$  gilt, also  $(g, S) = (h, T)$ .

### Metrik auf $K_n \mathcal{G}$ (bzw. $M_\kappa$ -Polyederkomplexen)

Es seien  $x, y \in X$ . Ein  $s \in \{x_0, \dots, x_k\}$  mit  $x_0 = x$ ,  $x_k = y$  und  $x_i, x_{i+1} \in \sigma_i$  für einen Würfel (bzw. Polyeder) heißt  **$k$ -Kette**. Mit  $l(s) = \sum_i d_{\sigma_i}(x_i, x_{i+1})$  sei ihre Länge bezeichnet, wobei  $d_{\sigma_i}$  die Metrik auf  $\sigma_i$  ist. Es sei

$$d(x, y) = \inf\{l(s) \mid s \text{ Kette von } x \text{ nach } y\}.$$

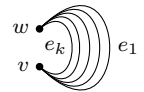
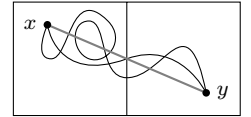
Dies definiert im Allgemeinen *keine* Metrik. Es sei  $X$  der Polyederkomplex aus abzählbar vielen Kanten  $e_k$  der Länge  $\frac{1}{k}$ . Dann gilt

$$d(v, w) \leq \inf\{l(e_k) \mid k \in \mathbb{N}\} = \inf \frac{1}{k} = 0.$$

Auf dem Kubenkomplex  $K_n \mathcal{G}$  definiert  $d$  eine Metrik:  $K_n \mathcal{G}$  ist zusammenhängend, da  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist. Es genügt zu zeigen, dass  $d(x, y) \neq 0$  für  $x \neq y$  gilt: Liegen  $x$  und  $y$  in einem Würfel  $\sigma$ , so ist dies offensichtlich ( $d|_\sigma$  ist eine euklidische Metrik auf diesem Würfel). Andernfalls betrachte für  $x \in \sigma$

$$\varepsilon_\sigma(x) = \inf\{d_\sigma(x, \tau) \mid \tau < \sigma, \tau \not\cong x\}$$

Dies ist in  $K_n \mathcal{G}$  stets positiv. Man kann zeigen, dass  $l(s) \geq \varepsilon_\sigma(x)$  für jede Kette  $s$  von  $x$  nach  $y$  gilt, also  $d(x, y) > 0$ . Man sieht leicht ein, dass  $d$  eine Längenmetrik ist.



### Geodäzität und Vollständigkeit

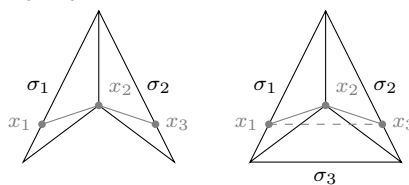
#### Satz (Bridson 1991)

Es sei  $X$  ein zusammenhängender  $M_\kappa$ -Polyederkomplex. Falls in  $X$  nur endlich viele Isometrietypen von Polyedern existieren, so ist  $X$  ein geodätisch vollständiger metrischer Raum.

Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass  $X$  simplizial ist. Betrachte straffe Ketten  $s = \{x_0, \dots, x_k\}$ .

- (i) Kein Tripel  $X_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  liege in einem gemeinsamen Simplex.
- (ii) Gilt  $x_{i-1}x_i \in \sigma_{i-1}$  und  $x_i x_{i+1} \in \sigma_i$ , so sei  $\overline{x_{i-1}x_i} \cup \overline{x_i x_{i+1}}$  geodätisches Segment in  $\sigma_{i-1} \cup \sim \sigma_i$ .

*Beachte:* Das heißt nicht, dass  $\overline{x_{i-1}x_i} \cup \overline{x_i x_{i+1}}$  geodätisch in  $X$  ist, wie man an dieser Zeichnung erkennt:



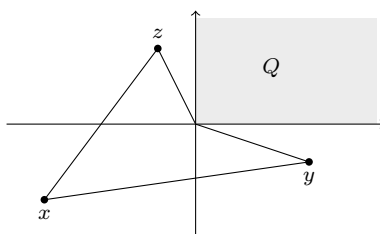
Es gilt  $d(x, y) = \inf\{l(s) \mid s \text{ straffe Kette von } x \text{ nach } y\}$ . Für jede Länge  $l$  existiert eine Schranke  $N$ , abhängig von  $l$  und den Isometrietypen von Simplices, so dass jede straffe Kette der Länge  $l$  höchstens  $N$  Simplices durchläuft.

Für  $x, y \in X$  durchlaufen straffe Ketten hinreichend kleiner Länge nur endlich viele „Modellräume“, welche durch die endlichen Kombinationen der endlich vielen Isometrietypen gegeben sind. Jeder solche „Modellraum“ enthält eine kürzeste Geodätische (Moussong 1988).

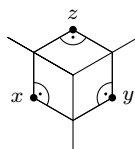
## 2 Nichtpositive Krümmung von Kubenkomplexen

Das Innere der Kuben ist  $CAT(0)$ , da jeder Kubus die euklidische Metrik trägt. Die Krümmung des Komplexes „konzentriert“ sich in den Ecken, das heißt 0-dimensionalen Würfeln.

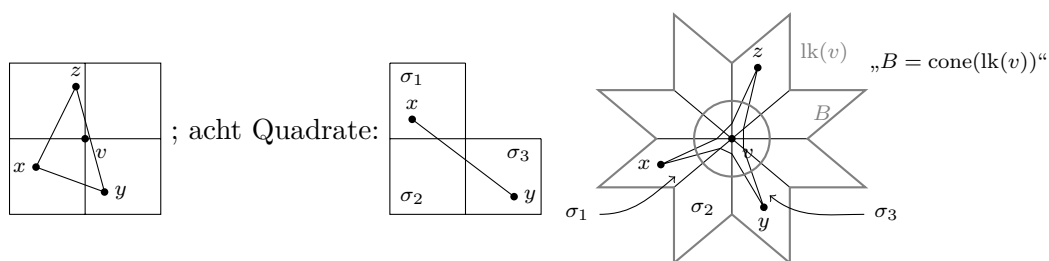
Zur Erinnerung: Das Komplement eines Quadranten in  $\mathbb{R}^2$  ist  $CAT(0)$  und gegeben durch  $\mathbb{R}^2 \setminus Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\}$ .



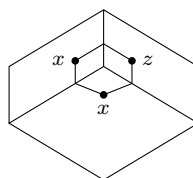
Das Komplement eines Oktanten in  $\mathbb{R}^3$  ist *nicht*  $CAT(0)$ .



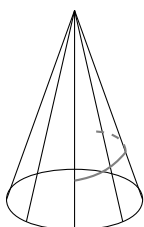
Die folgenden Würfelkomplexe sind euklidisch und  $CAT(0)$ :



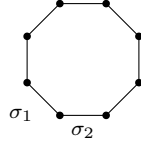
Allerdings ist dies hier nicht mehr  $CAT(0)$ , vergleichbar mit dem Oktanten:



Man kann den Knoten  $v$  als Spitze eines Kegels betrachten und den Link  $lk(v)$  als den Grundkreis. Je größer der Link, umso flacher der Kegel.



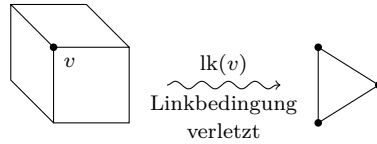
Es sei  $v$  eine Ecke. Der **Link**  $\text{lk}(v)$  ist ein abstrakter simplizialer Komplex mit einem  $k$ -Simplex für jeden  $(k + 1)$ -Würfel, der  $v$  enthält. Für  $K$  sieht der Link  $\text{lk}_K(v)$  folgendermaßen aus:



**Satz (Gromovs Link-Bedingung)**

Es sei  $K$  ein endlichdimensionaler Kubenkomplex.  $K$  ist genau dann nichtpositiv gekrümmt, wenn der Link jeder Ecke ein Fahnenkomplex ist.

Ein **Fahnenkomplex** ist ein simplizialer Komplex, in welchem jede Menge von Ecken, die paarweise durch Kanten verbunden sind, einen Simplex aufspannen. Ein Komplex, welcher maximal unter allen Komplexen mit dem gleichen 1-Skelett ist, ist ein Fahnenkomplex.



**Link-Bedingung in  $K_n \mathcal{G}$**

Es sei  $x \in K_n \mathcal{G}$  eine Ecke, das heißt  $x = (f, \emptyset)$  mit  $f : \mathcal{E} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{a \in \mathcal{E} \cup \mathcal{B}} f(|a|) = n$  und  $f(v) \in \{0, 1\}$  für alle  $v \in \mathcal{B}$ . Es gilt  $\text{lk}(x) = \{\sigma \in K_n \mid (f, \emptyset) \prec \sigma\}$ . Ein  $\sigma = (g, S)$  enthält genau dann  $(f, \emptyset)$ , wenn gilt

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & a \in \mathcal{B} \wedge a \neq v_e, e \in S \\ 0 & a = v_e, e \in S \\ f(a) + \sum_{\substack{s \in S \\ |s|=a}} (f(v_s) - 1) & a \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Solche  $\sigma = (g, S)$  sind eindeutig bestimmt durch Teilmengen  $S \subset \mathcal{E}$ , welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i)  $v_e \in \mathcal{B}$  für alle  $e \in S$
- (ii)  $v_e \neq v_{e'}$  für  $e, e' \in S$
- (iii)  $f(|e|) + f(v_e) \geq 1$  für alle  $e \in S$
- (iv)  $f(|e|) + f(v_e) + f(v_{\bar{e}}) \geq 2$

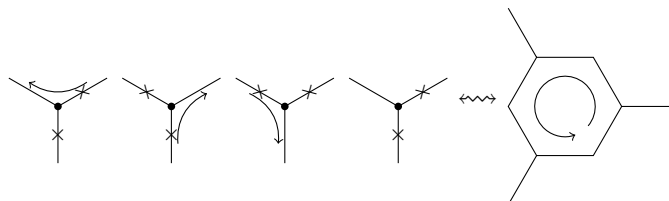
Der Link von  $x$  besteht aus den Teilmengen  $S$ , die (i) bis (iv) erfüllen. Jede solche Teilmenge  $S$  definiert einen  $(|S| - 1)$ -Simplex von  $\text{lk}(x)$ . Die Bedingungen (i) bis (iv) gelten genau dann für eine Teilmenge  $S$ , wenn sie für alle ein- und zweielementigen Teilmengen gelte.

Ist dann  $(g_i, \{e_i\})_{i \leq k}$  eine Menge von Ecken in  $\text{lk}(x)$ , das heißt Kanten in  $K_n \mathcal{G}$ , die  $x$  enthalten, und sind diese alle durch Kanten  $(h_{ij}, \{e_i, e_j\})$  verbunden, so sind (i) - (iv) für  $\{e_i\}$  und  $\{e_i, e_j\}$  erfüllt. Damit gelten die Bedingungen auch für  $S = \{e_1, \dots, e_k\}$  und es existiert ein  $g$  mit  $(g, S) \succ x = (f, \emptyset)$ ; Die Kanten  $(h_{ij}, \{e_i, e_j\})$  in  $\text{lk}(x)$  spannen also einen Simplex auf. Damit ist  $\text{lk}(x)$  ein Fahnenkomplex.

Somit ist nach Gromovs Link-Bedingung  $K_n \mathcal{G}$  nichtpositiv gekrümmt. Das liefert uns

- $\widetilde{K_n \mathcal{G}}$  ist (global) CAT(0)
- $\pi_k(K_n \mathcal{G}) = 0$  für alle  $k \geq 2$
- $K_n \mathcal{G} \hookrightarrow C_n \mathcal{G}$  Deformationsretrakt  $\Rightarrow \pi_*(K_n \mathcal{G}) = \pi_*(C_n \mathcal{G})$
- $\pi_1(C_n \mathcal{G}) = \pi_1(K_n \mathcal{G}), \pi_k(C_n \mathcal{G}) = 0, k \geq 2$

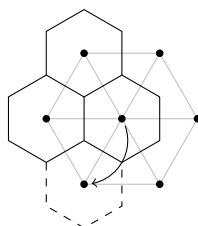
Sei  $k = \min\{|\mathcal{B}|, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ , dann gilt  $\pi_1(C_n \mathcal{G}) \geq \mathbb{Z}^k = \pi_1(T)$ , ein Torus durch die Wirkung  $\pi_1(C_n \mathcal{G}) \curvearrowright K_n \mathcal{G}$ . Finde  $T^k$  in  $K_n \mathcal{G}$ , das heißt „finde  $\mathbb{S}^1$ en in  $K_n \mathcal{G}$ “.



Jede essentielle Ecke  $v \in \mathcal{B}$  in  $\mathcal{G}$  hat  $\deg(v) \geq 3$ . Für jeden Erzeuger einer  $\mathbb{S}^1$  in  $K_n \mathcal{G}$  benötigt man zwei Teilchen und eine essentielle Ecke von  $\mathcal{G}$ .

### 3 Verallgemeinerung: Lokal rekonfigurierbare Räume

Wir betrachten das folgende motivierende Beispiel von Chirikjian aus den 1990er Jahren. In einem zweidimensionalen Modell liegen sechseckige Bausteine, angeheftet an Kanten und drehbar an Ecken.

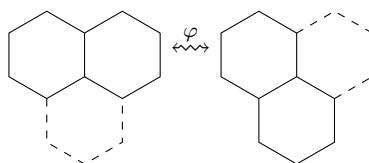


Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph und  $\mathcal{A}$  eine Menge. Ein **Zustand** ist eine „Färbung“ von  $\mathcal{G}$  durch  $\mathcal{A}$ , das heißt  $u : \mathcal{V} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ .

In dem obigen Beispiel ist  $\mathcal{G}$  ein hexagonaler Graph und  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . Ist eine Position  $v \in \mathcal{G}$  durch ein Sechseck besetzt, so sei  $u(v) = 1$ , sonst 0. Ein **Erzeuger**  $\varphi$  besteht aus

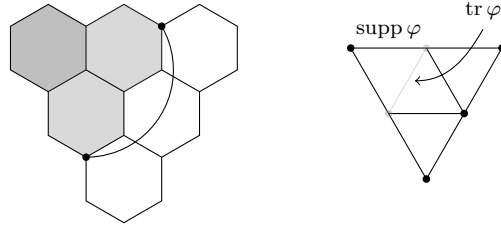
- einem Träger  $\text{supp } \varphi \subseteq \mathcal{G}$ , einem Teilgraph von  $\mathcal{G}$
- seiner Spur  $\text{tr } \varphi \subseteq \text{supp } \varphi$ , einem Teilgraph von  $\text{supp } \varphi$
- einem Paar lokaler Zustände  $u_i^\varphi : \text{supp } \varphi \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $u_0^\varphi|_{\text{supp } \varphi \setminus \text{tr } \varphi} = u_1^\varphi|_{\text{supp } \varphi \setminus \text{tr } \varphi}$

Der Erzeuger gibt uns also Aufschluss über die Drehung



Bei einer Drehung passiert ein Punkt mehrere Sechsecke, daher zählen diese Sechsecke auch zum Träger





Ein Erzeuger heißt **zulässig** auf einem Zustand  $u$ , falls  $u|_{\text{supp } \varphi} = u_0^\varphi$  gilt. Dann sei

$$\varphi.u : \mathcal{V}\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{A} \quad v \mapsto \begin{cases} u(v) & v \notin \text{supp } \varphi \\ u_1^\varphi(v) & v \in \text{supp } \varphi \end{cases}$$

die **Wirkung** von  $\varphi$  auf  $u$ . Ein **lokal rekonfigurierbares System** (LRS) sei eine Menge von Zuständen und Erzeugern, welches abgeschlossen unter dieser Wirkung ist. Ein geeignetes geometrisches Modell von  $C_n \mathcal{G}$  erhielt man aus den unabhängigen Bewegungen von Punkten durch essentielle Ecken.

Eine Familie von Erzeugern  $\{\varphi_i\}$  heißt **kommutativ**, wenn  $\text{tr } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ . Analog zu  $C_n \mathcal{G}$  beziehungsweise  $K_n \mathcal{G}$  erhält man so einen Kubenkomplex, ein geometrisches Modell für den Zustandsraum des LRS.

Es seien  $u$  und  $w$  Zustände und  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  zulässige kommutativ Erzeuger. Die Paare  $(u, \{\varphi_i\})$  und  $(w, \{\varphi_i\})$  heißen **äquivalent**, wenn  $u|_{\mathcal{V}\mathcal{G} \setminus \bigcup_i \text{supp } \varphi_i} = w|_{\mathcal{V}\mathcal{G} \setminus \bigcup_i \text{supp } \varphi_i}$  gilt.

Der **Zustandskomplex** eines LRS besteht aus den Äquivalenzklassen von Zuständen  $u$  und Erzeugern  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ , seinen  $k$ -Kuben  $[u, \{\varphi_i\}]$ , mit den Randabbildungen  $\partial_j^- [u, \{\varphi_i\}] = [u, \{\varphi_i\}_{i \neq j}]$  beziehungsweise  $\partial_j^+ [u, \{\varphi_i\}] = [\varphi.u, \{\varphi_i\}_{i \neq j}]$ . (im Allgemeinen nicht lokal endlich)

### Satz (Ghrist '07?)

Ein lokal endlicher Zustandskomplex eines LRS ist nicht-positiv gekrümmt.

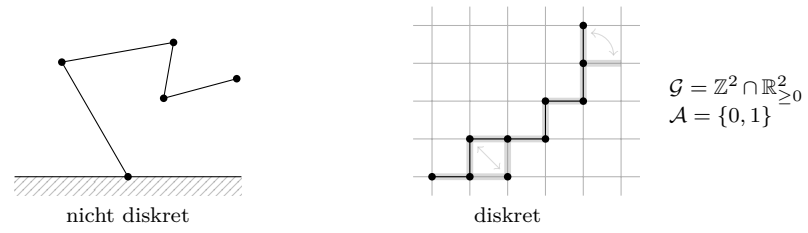
Als Konsequenz ergibt sich daraus, dass  $\mathcal{C}$  ein Eilenberg-McLane-Raum ist, das heißt  $\pi_k(\mathcal{C}) = 0$  für  $k \geq 2$ .

- Jede Homotopieklasse von Wegen besitzt genau einen geodätischen Repräsentanten.
- Die Fundamentalgruppe ist torsionsfrei.
- $\pi(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{C}} = \langle \varphi_i \mid \varphi_i^2 = \text{id}, [\varphi_i, \varphi_j] \rangle$ , rechtwinklige Artin-Gruppe

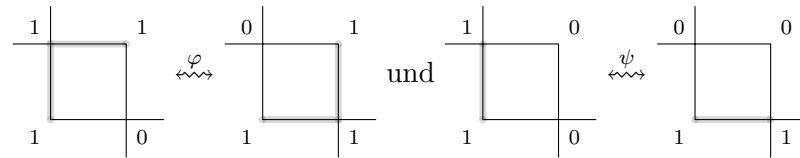
Ein weiteres Beispiel für ein LRS ist ein diskretes Modell für  $C_n \mathcal{G}$ , homöomorph zu  $K_n \mathcal{G}$  (nach eventueller Unterteilung von  $\mathcal{G}$ ). Wir schauen uns nun ein konkretes Beispiel an.

### „Diskreter“ Roboterarm

Um die Bewegungen der Gelenke diskret zu machen legen wir ein Gitter und lassen Bewegungen von entweder  $90^\circ$  oder  $180^\circ$  zu.



Für die Erzeuger gilt



Entsprechend gilt für die Träger und Spuren

$$\text{supp } \varphi = \text{supp } \psi = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ mit } \text{tr } \varphi = \square \text{ und } \text{tr } \psi = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

# Kapitel 3

## „Gestänge“ (Linkages)

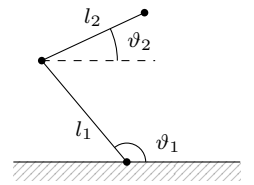
Betrachte einen (stilisierten) Roboterarm mit zwei Gelenken, eines in  $0 \in \mathbb{R}^2$  fixiert, und zwei Stangen fixer Länge  $l_1 > l_2$ , die über das weitere Gelenk miteinander verbunden sind.

Der **Konfigurationsraum**  $C$ , das heißt der Raum aller möglichen Positionen beider Stangen, wird durch ihre Winkel zur  $x$ -Achse parametrisiert, das heißt  $C = T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Sein **Arbeitsbereich**  $W$ , das heißt die Menge der Positionen des Endpunktes, ist ein Annulus mit äußerem Radius  $l_1 + l_2$  und innerem Radius  $l_1 - l_2$ . Das liefert die Parametrisierung

$$\alpha : C = T^2 \rightarrow W \quad (\vartheta_1, \vartheta_2) \mapsto l_1 \cdot \vartheta_1 + l_2 \cdot \vartheta_2$$

### Lemma

Es bezeichne  $\Delta$  die Diagonale in  $T^2$  und  $\Delta^* = \{(\vartheta, -\vartheta) \mid \vartheta \in \mathbb{S}^1\}$ . Das Komplement  $T^2 \setminus \Delta \cup \Delta^*$  besitzt zwei Komponenten, deren jede von  $\alpha$  diffeomorph auf  $W$  abgebildet wird.

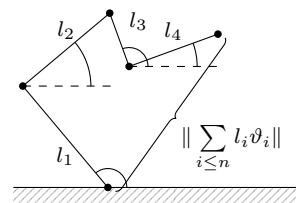


## 1 Abstandsfunktion von Roboterarmen

Zur Untersuchung der Abstandsfunktion  $\|\sum_{i \leq n} l_i \vartheta_i\|$  genügt die Betrachtung des Raumes aller möglichen „Gestalten“ des Armes, seines Modellraumes: Seine „Gestalt“ hängt nicht vom ersten Winkel, beziehungsweise seiner Länge im  $\mathbb{R}^2$  ab. Der Modellraum sei definiert als

$$W = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 / \text{SO}(2).$$

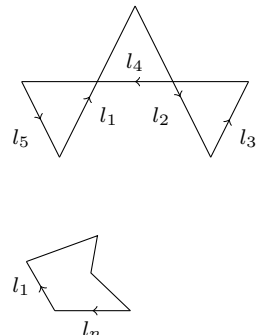
Durch die Abbildung  $[\vartheta_1, \dots, \vartheta_n] \mapsto (1, \vartheta_2 \vartheta_1^{-1}, \dots, \vartheta_n \vartheta_1^{-1})$  erhält man einen Diffeomorphismus  $M \cong T^{n-1}$ . Für jeden festen Abstand  $\|\sum_{i \leq n} l_i \vartheta_i\|$  ist das Urbild der Abstandsfunktion der Raum der geschlossenen Polygone mit Kantenlängen  $l_1, \dots, l_n$ .



## 2 Polygonräume

Jedes geschlossene Polygon ist, bis auf euklidische Bewegungen, durch  $l_1, \dots, l_n$  und die orientierten Winkel zwischen den Kanten charakterisiert. Normalisiert man die letzte Kante auf die  $x$ -Achse mit  $\vartheta_n = -e_1$ , so erhält man als Modulraum  $M_l = \{(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \mid \sum l_i \vartheta_i = 0, \vartheta_n = -e_1\}$ . Jede solche Normalisierung entspricht einer Drehung, also

$$M_l = \{(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \mid \sum l_i \vartheta_i = 0\} / \text{SO}(2)$$

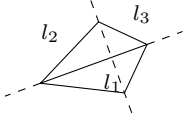


wobei auch hier  $SO(2)$  diagonal auf dem  $n$ -Torus wirkt.

Jede Permutation  $\sigma \in S_n$  induziert einen Diffeomorphismus  $\varphi_\sigma : T^n \rightarrow T^n$  durch  $\varphi_\sigma(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = (\vartheta_{\sigma(1)}, \dots, \vartheta_{\sigma(n)})$ . Da die Summation und  $SO(2)$ -Wirkung invariant unter der Permutation sind, erhält man so einen Diffeomorphismus  $M_l \rightarrow M_{l_\sigma}$ , mit  $\tilde{l} = (l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(n)})$ . Das Diffeomorphismus hängt nicht von der Reihenfolge der Kantenlängen ab.



Im Fall  $n = 3$  nehmen wir  $l_1 \geq l_2 \geq l_3$  an. Falls  $l_1 = l_2 + l_3$  gilt, so ist das Dreieck entartet, es gilt  $M_l = \{*\}$ . Ist die Dreiecksungleichung strikt erfüllt, das heißt  $l_1 < l_2 + l_3$ , so existieren zwei Dreiecke mit genau diesen Kantenlängen, welche sich durch eine Spiegelung unterscheiden. Gilt  $l_1 > l_2 + l_3$ , so existiert kein Dreieck mit diesen Kantenlängen und  $M_l = \emptyset$ .



**Lemma**

Für  $n \geq 3$  gilt genau dann  $M_l = \emptyset$ , wenn  $l_i > l_1 + l_2 + \dots + \hat{l}_i + \dots + l_n$  für ein  $i \leq n$  gilt.

**Beweis**

Offensichtlich ist die Bedingung hinreichend. Es gelte  $l_i = \sum_{j \neq i} l_j$  für alle  $i \leq n$ . Für  $n = 3$  ist die Aussage klar. Für  $n \geq 4$  existiert ein  $i \leq n$ , so dass

$$l_i + l_{i+1} \leq l_1 + \dots + l_{i-1} + l_{i+2} + \dots + l_n$$

gilt, denn wäre dem nicht so, so gälte

$$2(l_i + l_{i+1}) > \sum l_i = \mathcal{L}$$

für alle  $i$  und es folgte

$$4 \cdot \mathcal{L} = \sum_{i \leq n} 2(l_i + l_{i+1}) > n \cdot \mathcal{L}.$$

Nach Induktion existiert ein geschlossenes Polygon mit Kantenlängen  $l_1, l_2, \dots, l_i + l_{i+1} + \dots + l_n$ , das heißt ein  $n$ -gon mit kollinearen Kanten der Längen  $l_i$  und  $l_{i+1}$ . Damit gilt  $M_l \neq \emptyset$ . □

Wann ist  $M_l$  eine Mannigfaltigkeit? Ein **Längenvektor**  $l = (l_1, \dots, l_n)$  heißt **generisch**, wenn es *keine*  $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$  gibt mit  $\sum_{i \leq n} \varepsilon_i l_i = 0$ .

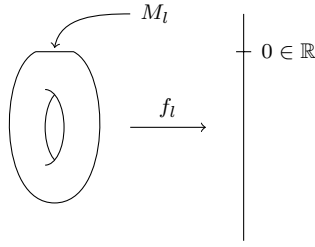
**Satz**

Ist  $l \in \mathbb{R}_{>0}^n$  generisch, so ist  $M_l$  eine kompakte orientierbare  $(n - 3)$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Es sei  $W = T^n / SO(2)$  der Modulraum eines Roboterarmes mit  $n$  Stangen und

$$f_l : W \rightarrow \mathbb{R} \quad [\vartheta_1, \dots, \vartheta_n] \mapsto \left\| \sum_{i \leq n} l_i \vartheta_i \right\|^2$$

die **Höhenfunktion** zum Längenvektor  $l = (l_1, \dots, l_n)$ . Ist  $f_l(p) = 0$ , so ist der Arm geschlossen, das heißt  $p$  bestimmt ein geschlossenes ebenes  $n$ -gon mit Kantenlängen  $l_1, \dots, l_n$ , d. h.  $p \in M_l$ . Der Modulraum liegt als Nullstellenmenge von  $f_l$  in dem  $(n - 1)$ -Torus  $W$ ;  $M$  besteht genau aus den Maximalstellen von  $f_l$ .



Kollineare Konfigurationen sind (topologisch) interessante Punkte in  $W$ .

Eine Teilmenge  $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$  heißt **kurz** (beziehungsweise **lang**), falls  $\sum_{j \in \mathcal{J}} l_j < \sum_{i \notin \mathcal{J}} l_j$  (beziehungsweise  $\dots > \dots$ ) gilt, andernfalls heiße sie **ausgewogen**.  $\mathcal{J}$  ist genau dann ausgewogen, wenn sein Komplement  $\mathcal{J}^c$  ausgewogen ist. Es existiert genau dann ein ausgewogenes  $\mathcal{J}$ , wenn  $l$  nicht generisch ist.

Ist  $\mathcal{J}$  lang oder ausgewogen, so sei  $p_{\mathcal{J}} = [\vartheta_1, \dots, \vartheta_n] \in W$  mit  $\vartheta_i = 1$  für  $i \in \mathcal{J}$  und  $\vartheta_i = -1$  sonst. Insbesondere gilt  $p_{\mathcal{J}} = p_{\mathcal{J}^c}$  für ausgewogenes  $\mathcal{J}$ .

**Lemma**

Die kritischen Punkte von  $f_l : W \setminus M_l \rightarrow \mathbb{R}$  sind genau die Konfigurationen  $p_{\mathcal{J}}$  für lange Teilmengen  $\mathcal{J}$ . Jeder solche Punkt ist nicht-entartet und hat den Morse-Index  $n - |\mathcal{J}|$ .

Bevor wir mit dem eigentliche Beweis beginnen erinnern wir uns noch zunächst an die Vorlesung vom letzten Semester. Die **Hessesche** ist gegeben durch  $H_f = \nabla^2 f$  für ein  $f \in C^\infty(M)$  und es gilt (**ACHTUNG, stimmt nicht mit Kapitel 9.1 der alten VL überein!**)

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= X(df(Y)) - df(\nabla_X f) = X(Y(f)) - (\nabla_X f)(f) \\ &= [X, Y](f) + Y(Xf) - \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)f}_{=[X, Y]f} - \nabla_Y Xf \\ &= Y(Xf) - \nabla_Y Xf = H_f(Y, X) \end{aligned}$$

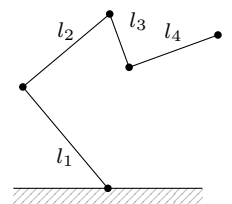
$H_f$  ist im Allgemeinen nicht  $C^\infty$ -linear, aber in kritischen Punkten von  $f$ : Sei  $X_p \in T_p M$ , setze fort zu Vektorfeldern  $X$  und  $\tilde{X}$  auf  $M$ . Dann gilt

$$H_f(\tilde{X}, Y)|_p = \tilde{X}_p(Yf) - (\nabla_{\tilde{X}_p} Y)f = X_p(Yf) - \underbrace{df|_p(\nabla_{\tilde{X}_p} Y)}_{=0} = X_p(Yf).$$

In kritischen Punkten ist  $H_f$   $C^\infty$ -linear und hängt nicht von der Wahl des Zusammenhangs ab. In lokalen Koordinaten sei dann  $X_p = \sum_{i \leq n} \zeta^i \frac{d}{dx^i}$ ,  $Y_p = \sum_{i \leq n} \eta^i \frac{d}{dx^i}$ , und  $\zeta^i, \eta^i$  konstant. Dann folgt

$$\begin{aligned} H_f(X_p, Y_p) &= X_p(Yf) = X_p\left(\sum_{i \leq n} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum_{j \leq n} \zeta^i \left(\underbrace{\frac{\partial \eta^i}{\partial x^i}}_{=0} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) = \sum_{i, j \leq n} \eta^i \zeta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{aligned}$$

Für den beweis des Lemmas setzen wir  $l = (l_1, \dots, l_n)$  und  $f_l : W \setminus M_l \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $[u_1, \dots, u_n] \mapsto \|-\sum l_i u_i\|^2$ . Die kritischen Punkte von  $f_l$  sind genau die (kollinearen) Konfigurationen  $p_{\mathcal{J}}$  für lange Teilmengen  $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$  ( $\sum_{i \in \mathcal{J}} l_i > \sum_{j \notin \mathcal{J}} l_j$  und  $p_{\mathcal{J}} = (u_1, \dots, u_n)$  mit  $u_i = 1$  für  $i \in \mathcal{J}$  und  $u_i = -1$  sonst). Jeder solche kritische Punkt  $p_{\mathcal{J}}$  ist nicht ausgeartet und hat den Morse-Index  $n - |\mathcal{J}|$ .



**Beweis (vom Lemma)**

Wir betrachten die Abbildung

$$f_l : T^n \rightarrow W \xrightarrow{f_l} \mathbb{R} \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto -\left\| \sum l_i u_i \right\|^2$$

und setzen  $u_i = e^{i\vartheta_i} = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f_l(u) &= -\left(\sum l_i \cos \vartheta_i\right)^2 - \left(\sum l_i \sin \vartheta_i\right)^2 \\ &= -\left(\sum_{i \leq n} l_i^2 \cos^2 \vartheta_i + 2 \sum_{i < j} l_i l_j \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j\right) \\ &\quad - \left(\sum_{i \leq n} l_i^2 \sin^2 \vartheta_i + 2 \sum_{i < j} l_i l_j \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j\right) \\ &= -\left(\sum_{i \leq n} l_i^2 (\cos^2 \vartheta_i + \sin^2 \vartheta_i)\right) - 2 \sum_{i < j} l_i l_j \underbrace{(\cos \vartheta_i \cos \vartheta_j + \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j)}_{=\cos(\vartheta_i - \vartheta_j)} \end{aligned}$$

Wie steht es nun um die kritischen Punkte? Es gilt

$$\frac{\partial f_l}{\partial \vartheta_k} = -2l_k \sum_{i \leq n} l_i \sin(\vartheta_i - \vartheta_k) = -2l_k \sum_{i \leq n} l_i (\sin \vartheta_i \cos \vartheta_k - \cos \vartheta_i \sin \vartheta_k) = 0$$

genau dann, wenn

$$\cos \vartheta_k \underbrace{\sum_{i \leq n} l_i \sin \vartheta_i}_{=: y(u)} = \sin \vartheta_k \underbrace{\sum_{i \leq n} l_i \cos \vartheta_i}_{=: x(u)}$$

**1. Fall:**  $x(u) = y(u) = 0 \Leftrightarrow -x^2(u) - y^2(u) = f_l(u) = 0 \Leftrightarrow u \in M_l$

**2. Fall:**  $\tan \vartheta_k \equiv \frac{y(u)}{x(u)} \forall k \leq n \Leftrightarrow \vartheta_i \in \{\vartheta_1, \vartheta_1 + \pi, \vartheta_1 - \pi\} \Leftrightarrow u_i = \pm u_j \forall i, j \Leftrightarrow u$  ist kollineare Konfiguration

Es sei  $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$  eine lange Teilmenge,  $p_{\mathcal{J}} = (u_1, \dots, u_n)$  mit  $u_i = 1$  für  $i \in \mathcal{J}$  und  $u_i = -1$  für  $i \notin \mathcal{J}$ . Dann ist  $\mathcal{L}_{\mathcal{J}} = \sum_{i \leq n} l_i u_i > 0$  und es gilt  $f_l(p_{\mathcal{J}}) = -\mathcal{L}_{\mathcal{J}}^2$ . Die Hessesche von  $f_l$  im Punkt  $p_{\mathcal{J}}$  ist

$$\frac{\partial^2 f_l}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \begin{cases} -2l_i l_j \cos(\vartheta_j - \vartheta_i) & \text{falls } i \neq j \\ 2l_i \sum_{k \neq i} l_k \underbrace{\cos(\vartheta_i - \vartheta_k)}_{=u_i u_k} & \text{falls } i = k \end{cases}$$

Es gilt

$$l_i \sum_{k \neq i} l_k u_i u_k = l_i u_i \sum_{k \neq i} l_k u_k = l_i u_i (\mathcal{L}_{\mathcal{J}} - l_i u_i) = l_i^2 \left( \frac{l_i \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{l_i} - 1 \right) \quad \text{und} \quad d_i = \frac{u_i \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{l_i},$$

also folgt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_l}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \begin{cases} -l_i l_j u_i u_j = (l_i u_i)(l_j u_j)(-1) \\ l^2(d_i - 1) = (l_i u_i)(l_i u_i)(d_i - 1) \end{cases}$$

Wir setzen nun für drei Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} l_1 u_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & l_n u_n \end{pmatrix}$$

und schreiben dann

$$\frac{1}{2}H_f(p_{\mathcal{J}}) = B^T(D - A)B.$$

Es genügt zu zeigen, dass  $D - A$  auf  $T_{[p_{\mathcal{J}}]}W$  nicht ausgeartet mit Signatur  $n - |\mathcal{J}|$  ist:

$$\det(D - A) = \prod_{i \leq n} d_i \left(1 - \sum_{j \leq n} \frac{1}{d_j}\right)$$

Ohne Einschränkung sei  $\mathcal{J} = \{k, k + 1, \dots, n\}$ . Dann gilt  $u_i = 1$  und  $d_i < 0$  für  $i < k$ , dann gilt für die Hauptminoren von Ordnung  $l < k$

$$\det(D - A)_{ll} = \prod_{i \leq n} d_i \underbrace{\left(1 - \sum_{j \leq l} \frac{1}{d_j}\right)}_{\substack{>0 \\ <0}}.$$

Für  $l \geq k$  gilt

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{j \leq l} \frac{1}{d_j} &= 1 - \sum_{j \leq l} \frac{l_{\mathcal{J}}}{u_j \mathcal{L}_{\mathcal{J}}} = \mathcal{L}_{\mathcal{J}}^{-1} \left( \mathcal{L}_{\mathcal{J}} - \sum_{j \leq l} l_j u_j \right) = \mathcal{L}_{\mathcal{J}}^{-1} \left( \sum_{i \leq n} l_i u_i - \sum_{j \leq l} l_j u_j \right) \\ &= \mathcal{L}_{\mathcal{J}}^{-1} \left( \underbrace{\sum_{i > l} l_i u_i}_{\geq 0} \right) \begin{cases} > 0 & \text{für } k \leq l < n \\ = 0 & \text{für } l = n \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\text{sign}(\det(D - A)_{ll}) = \begin{cases} (-1)^l & \text{für } l < k \\ (-1)^{k-1} & \text{für } k \leq l < n \end{cases}$$

und  $D - A$  hat  $n - |\mathcal{J}|$  negative Eigenwert,  $n - k = |\mathcal{J}| - 1$  positive Eigenwerte und genau einen Eigenwert 0. Da  $f_l$  invariant unter der  $\text{SO}(2)$ -Wirkung ist, gilt in  $p_{\mathcal{J}}$  in Richtung der Faser  $H_{f_l}(p_{\mathcal{J}}, p_{\mathcal{J}}) = \frac{d^2}{d\lambda^2} f_l(\lambda p_{\mathcal{J}}) = 0$ . Damit ist  $H_{f_l}$  auf  $W$  in  $[p_{\mathcal{J}}]$  nicht ausgeartet und hat Signatur  $n - |\mathcal{J}|$ .  $\square$

### Satz

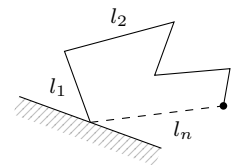
Ist  $l = (l_1, \dots, l_n)$  **generisch**, das heißt gilt  $\sum_{i \leq n} l_i u_i \neq 0$  für alle  $u_i \in \{1, -1\}$ , so ist  $M_l$  eine kompakte orientierbare  $(n - 3)$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand.

### Beweis

Seien  $l' = (l_1, \dots, l_{n-1})$  und  $f_{l'}^{-1} = (-l_n^2) = M_l$ . Betrachte den „Roboterarm“ mit  $(n - 1)$  Segmenten und  $f_{l'} : W = T^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach dem obigen Lemma hat  $f_{l'}$  genau einen kritischen Wert  $-a^2 \neq 0$ , wenn eine kollineare Konfiguration  $(u_1, \dots, u_{n-1})$  existiert mit  $u_i \in \{1, -1\}$ , so dass  $-a^2 = \|\sum_{i \leq n} l_i u_i\|^2 = f_{l'}(u) \Leftrightarrow \pm a + \sum l_i u_i = 0 \Leftrightarrow (l_1, \dots, l_{n-1}, a)$  ist nicht generisch.

Das heißt  $-l_n^2$  ist ein regulärer Wert von  $f_{l'}$  und damit ist  $f_{l'}^{-1}(-l_n^2) = M_l$  eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit in  $W \cong T^{n-2}$  der Kodimension 1.  $\square$

Was ist mit nicht-generischen Längenvektoren? Betrachte die Urbilder von kritischen Punkten.



**Lemma (Morse-Lemma)**

Es sei  $p$  ein nicht-entarteter kritischer Punkt von Index  $k$  einer glatten Funktion  $f$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann existieren lokale Koordinaten  $x = (x^1, \dots, x^n)$  von  $M$  um  $p$  mit

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2$$

**Beweisskizze**

Für  $f(p) = 0$  schreibe

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d(f(tx^1, \dots, tx^n))}{dt} dt = \sum_{i \leq n} x^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) dt}_{=: g_i(x)}$$

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) = 0$$

wobei analog zu  $f$  für entsprechendes  $\tilde{g}_{ij}$

$$g_i(x) = \sum_{j \leq n} x^j \tilde{g}_{ij}(x)$$

$$f(x) = \sum_{i,j} x^i x^j \left( \frac{\tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ji}}{2} \right) = \sum x^i x^j h_{ij}$$

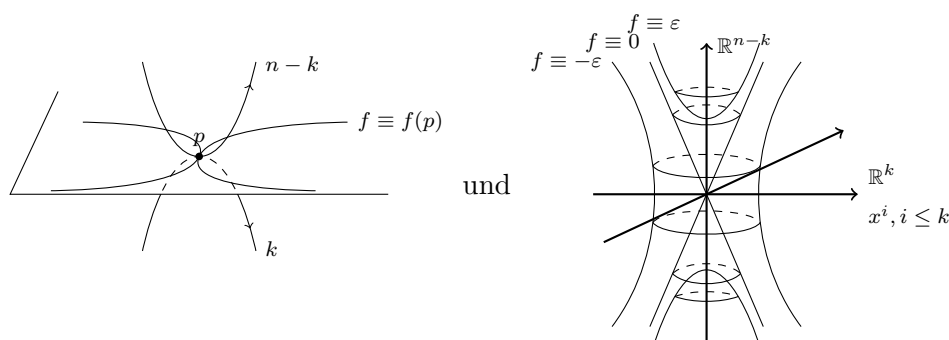
und dementsprechend

$$H_f(0) = (h_{ij})_{ij}.$$

„Verbiege“ nun die Koordinaten so, dass gilt

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \sigma \\ & & & +1 & & \\ & \sigma & & & \ddots & \\ & & & & & +1 \end{pmatrix}$$

Lokal hat  $f$  um  $p$  entlang  $k$  Kurven in linear unabhängige Richtungen Maxima und entsprechend  $n - k$  Minima.



Allgemein gilt  $f(q) = c - (x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2 = c - \sum_{i \leq k} (x^i)^2 + \sum_{i > k} (x^i)^2$ , und mit  $x = (x^1, \dots, x^k)$  und  $y = (y^1, \dots, y^{n-k}) = (x^{k+1}, \dots, x^n)$  schreibe  $f(q) = c - \|x\|^2 + \|y\|^2$ . Es gilt genau dann  $f(q) = c$ , wenn  $\|x\| = \|y\|$ .



Dies ist genau dann der Fall, wenn entweder  $x(q) = y(q) = 0$  gilt, oder  $\zeta \in \mathbb{S}^{k-1}$ ,  $\eta \in \mathbb{S}^{n-k-1}$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  existieren, mit  $x(q) = r\zeta$  und  $y(q) = r\eta$ . Es existiert also eine Umgebung  $U$  von  $p$ , so dass

$$f^-(c) \cap U \cong C(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}) = \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k-1} \times [0, 1] / \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k-1} \times \{0\}$$

und

$$\bar{x}(t\zeta^1, \dots, t\zeta^k, t\eta^1, \dots, t\eta^{n-k}) \leftarrow [\zeta, \eta, t] \quad (\square)$$

Eine weitere Folgerung des Morse-Lemmas ist, dass nicht-entartete kritische Punkte stets isoliert sind. Eine Teilmenge  $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, n\}$  ist genau dann **ausgewogen** bezüglich eines Längenvektors  $(l_1, \dots, l_n)$ , das heißt  $\sum_{i \in \mathcal{J}} l_i = \sum_{i \notin \mathcal{J}} l_i$ , wenn entweder  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$  oder sein Komplement  $\mathcal{J} = \mathcal{J}^c$  eine lange Teilmenge in  $\{1, \dots, n-1\}$  bezüglich  $l' = (l_1, \dots, l_{n-1})$  ist und  $f_{l'} = (p_{\mathcal{J}}) = -l_n^2$ .

In einer Umgebung eines kritischen Punktes ist  $f_{l'}^-( -l_n^2 )$  homöomorph zu einem Kegel über dem Produkt der Spären der Dimensionen

$$\text{ind}(p_{\mathcal{I}}) - 1 = (n-1) - |\mathcal{J}| - 1 = n - |\mathcal{J}| - 2$$

und

$$(n-1) - \text{ind}(p_{\mathcal{J}}) - 1 = |\mathcal{J}| - 2.$$

Damit gilt der folgende Satz:

**Satz**

Ist  $l = (l_1, \dots, l_n)$  ein nicht-generischer Längenvektor, so ist  $M_l$  kompakt und bis auf endlich viele Punkte eine  $(n-3)$ -Mannigfaltigkeit. Eine Umgebung jeder dieser unendlich vielen Singularitäten ist homöomorph zu

$$C(\mathbb{S}^{n-|\mathcal{J}|-2} \times \mathbb{S}^{|\mathcal{J}|-2}),$$

wobei  $\mathcal{J}$  eine bezüglich  $l$  ausgeartete Teilmenge ist.

Der Diffeomorphietyp von  $M_l$  hängt nicht von der Reihenfolge der Längen  $l_1, \dots, l_n$  ab, das heißt  $\sigma \in S_n$  definiert einen Diffeomorphismus von  $M_l$  auf  $M_{\sigma(l)}$ .

$$[M_l \hookrightarrow \mathbb{R}^n]$$

**Satz (Ferber-Schütz)**

Es sei  $l = (l_1, \dots, l_n)$  ein geordneter Längenvektor, das heißt  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n > 0$ , und es bezeichne  $\sigma_k$  (beziehungsweise  $\mu_k$ ) die Anzahl der kurzen (beziehungsweise ausgewogenen) Teilmengen  $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$  mit  $|\mathcal{J}| = k+1$  und  $1 \in \mathcal{J}$ . Dann ist  $H_k(M_l; \mathbb{Z})$  frei abelsch vom Rang  $\sigma_k + \mu_k + \sigma_{(n-3)} - k$ , wobei  $n-3 = \dim M_l$ .

**Beispiel**

Sei  $l = (3, 2, 2, 1, 1)$ ,  $n = 5$  und  $\dim M_l = 2$ . Es existieren keine ausgewogenen Teilmengen, das heißt  $\mu_k = 0$ .

$$\sigma_0 = \# \text{ kurze } \mathcal{J} = \#\{\{1\}\} = 1$$

$$\sigma_1 = \# \text{ kurze } \mathcal{J} = \#\{\{1, 4\}, \{1, 5\}\} = 2$$

$$\sigma_2 = \# \text{ kurze } \mathcal{J} = 0$$

Damit:

$$\underbrace{\chi^{(M_l)}}_{=2-2g} = \sum (-1)^k \beta_k = (1 + 0 + 0) - (2 + 0 + 2) + (0 + 0 + 1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

Also:



### 3 Walkers Vermutung

Welche Invarianten von  $M_l$  bestimmen den Längenvektor von  $l$  (bis auf geeignete Äquivalenz)? Für  $l \in \mathbb{R}_{>0}^n$  und  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt  $M_l \cong M_{tl}$ . Zur Definition der geforderten Äquivalenz betrachtet man zunächst Längenvektoren im Inneren  $A \subset \Delta^{n-1} - \{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid \sum l_i = 1\}$  des Standardsimplex.

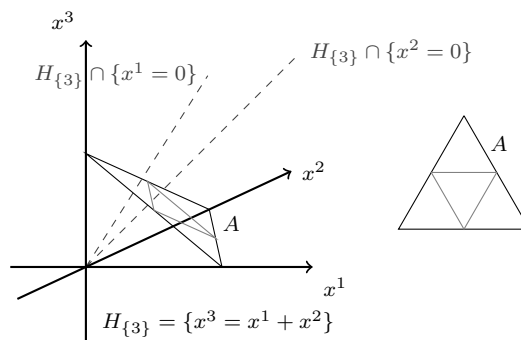
Weiter zerlegt man  $A$  wie folgt in Teilmengen niedrigerer Dimension. Für jedes  $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$  definiert

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} l_i = \sum_{i \notin \mathcal{J}} l_i$$

eine Hyperebene  $H_{\mathcal{J}}$ . Es bezeichnen  $A^{(k)} \subset A$  die Menge der Längenvektoren  $l$ , welche in mindestens  $(n-1) - k$  solcher Hyperebenen  $H_{\mathcal{J}}$  enthalten sind, das heißt

$$A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \dots \subset A^{(n-1)} \subset A.$$

Ein  **$k$ -Stratum** ist eine Zusammenhangskomponente von  $A^{(k)} \setminus A^{(k-1)}$ . Zwei Längenvektoren liegen in demselben Stratum, falls sie die gleichen kurzen Teilmengen besitzen.



Maximale Strata, Zusammenhangskomponenten von  $A^{(n-1)} \setminus A^{(n-2)}$ , heißen **Kammern**. Betrachte die Involution (Spiegelung an der  $x$ -Achse)

$$\tau : M_l \rightarrow M_l \quad [u_1, \dots, u_n] \mapsto [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n]$$

Ist  $n$  ein Fixpunkt von  $\tau$ , so gilt  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $u_i = \pm 1$  für alle  $i \leq n$ , und somit ist jeder Fixpunkt eine kollineare Konfiguration. Insbesondere besitzt  $\tau$  für generische  $l$  keine Fixpunkte.

#### Satz (Hausmann, Rodriguez '04)

Falls  $l$  und  $l'$  in denselben Straten liegen, so sind  $M_l$  und  $M_{l'}$   $\tau$ -äquivariant diffeomorph.

**Walkers Vermutung**

Es seien  $l, l' \in A$  generische Längenvektoren. Falls die ganzzahligen Kohomologieringe von  $M_l$  und  $M_{l'}$  graduiert isomorph sind, so existiert ein  $\sigma \in S_n$  so, dass  $l$  und  $\sigma(l')$  in derselben Kammer liegen.

**Satz (Faber, Hausmann, Schütz '07)**

Es seien  $l, l' \in A$  geordnete Längenvektoren. Falls dann ein Isomorphismus geraduerter Ringe von  $H^*(M_l; \mathbb{Z})$  nach  $H^*(M_{l'}; \mathbb{Z})$  existiert, welcher mit  $\tau^*$  kommutiert, so liegen  $l$  und  $l'$  in demselben Stratum. Insbesondere sind dann  $M_l$  und  $M_{l'}$   $\tau$ -äquivalent diffeomorph.

Betrachte den Modulraum  $N_l$  der geschlossenen Polygone in  $\mathbb{R}^3$  mit Kantenlängen  $l_1, \dots, l_n$ , das heißt

$$N_l = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{S}^2 \times \dots \times \mathbb{S}^2 \mid \sum l_i u_i = 0\} / \text{SO}(3)$$

Hier lässt sich zeigen, dass für generische  $l$   $N_l$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $2(n - 3)$  ist.

**Satz (Faber, Hausmann, Schütz '07)**

Es sei  $n \neq 4$  und es seien  $l, l' \in A$  generische geordnete Längenvektoren. Falls  $H^*(M_l; \mathbb{Z})$  und  $H^*(M_{l'}; \mathbb{Z})$  isomorph (siehe oben) sind, so liegen  $l$  und  $l'$  in derselben Kammer.

Für  $n = 4$  ist die Aussage falsch: Die Längenvektoren  $l = (2, 1, 1, 1)$  und  $l' = (2, 2, 2, 1)$  liegen in unterschiedlichen Kammern. Es gilt

$$M_l \cong \mathbb{S}' \qquad M_{l'} \cong \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \qquad N_l \cong \mathbb{S}^2 \cong N_{l'}$$

Ein Längenvektor heißt **normal**, falls gilt

$$\bigcap_{\substack{|\mathcal{J}|=3 \\ \text{lang und ausgew.}}} \mathcal{J} \neq \emptyset.$$

Eine Kammer heißt **normal**, wenn sie einen normalen Längenvektor enthält; damit sind alle darin normal.

**Satz (Faber, Hausmann, Schütz '07)**

Es seien  $l$  und  $l'$  geordnete Längenvektoren und es gäbe einen Isomorphismus  $H^*(M_l; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(M_{l'}; \mathbb{Z})$ . Falls  $l$  normal ist, so ist  $l'$  normal und  $l$  und  $l'$  liegen in denselben Straten.

Dieser Satz liefert uns

- 1) Die Anzahl der  $S_n$ -Bahnen von normalen Kammern ist höchstens so groß wie die Anzahl der Diffeomorphie Typen von  $M_l$  für generische  $l$ . Diese Anzahl wiederum ist höchstens so groß wie die Anzahl der  $S_n$ -Bahnen von Kammern.

$$\# \begin{matrix} S_n\text{-Bahnen} \\ \text{norm. Kammern} \end{matrix} \leq \# \begin{matrix} \text{Diffeom.-Typen} \\ \text{von } M_l, l \text{ generisch} \end{matrix} \leq \# \begin{matrix} S_n\text{-Bahnen} \\ \text{v. Kammern} \end{matrix}$$

- 2) Die Anzahl der  $S_n$ -Bahnen von normalen Strata ist höchstens so groß wie die Anzahl der Diffeomorphie Typen von  $M_l$ . Diese Anzahl wiederum ist höchstens so groß wie die Anzahl der  $S_n$ -Bahnen von Strata.

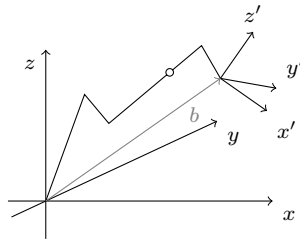
$$\# \begin{matrix} S_n\text{-Bahnen} \\ \text{norm. Strata} \end{matrix} \leq \# \begin{matrix} \text{Diffeom.-Typen} \\ \text{von } M_l \end{matrix} \leq \# \begin{matrix} S_n\text{-Bahnen} \\ \text{v. Strata} \end{matrix}$$

Für große  $n$  existieren wenige nicht-normale Strata: Es sei  $\mathcal{N}_n \subseteq A^{(n-1)}$  die Vereinigung aller normalen Strata. Dann gilt

$$\frac{\text{vol}(A^{(n-1)} \setminus \mathcal{N}_n)}{\text{vol}(A^{(n-1)})} \leq \frac{n^6}{2^n}.$$

# Kapitel 4

## Kinematik



Bewegungen und Zustände eines (idealisierten) Roboterarmes werden durch abstandserhaltende Transformationen, das heißt Isometrien des  $\mathbb{R}^3$ , beschrieben. Jede solche Transformation ist von der Gestalt

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto Ax + b$$

mit  $A \in O(3)$  und  $b \in \mathbb{R}^3$ , wobei  $O(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^T A = \text{id}_{\mathbb{R}^3}\}$  die Menge der skalarprodukterhaltenden linearen Abbildungen bezeichnet, die orthogonale Gruppe. Die Hintereinanderausführung

$$A'(Ax + b) + b' = A'Ax + A'b + b'$$

ist wieder eine Isometrie des  $\mathbb{R}^3$ . Die Gruppe  $E(3)$  der euklidischen Bewegungen ist das semidirekte Produkt  $E(3) = O(3) \times \mathbb{R}^3$  mit der Multiplikation

$$(A', b')(A, b) = (AA', A'b + b').$$

Die orthogonale Gruppe  $O(3)$  besitzt zwei Zusammenhangskomponenten, die orientierungserhaltenden Drehungen mit Determinante 1, also die Spezielle Orthogonale Gruppe oder Drehgruppe  $SO(3)$ , und die (Dreh-)Spiegelungen. Da mechanisch keine Spiegelung realisierbar ist, betrachtet man nur die orientierungserhaltenden euklidischen Bewegungen  $SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ .

Zur Vereinfachung der Notation betrachtet man die 4-dimensional Darstellung

$$SE(3) \hookrightarrow GL_4(\mathbb{R}) \quad (A, b) \mapsto \left( \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

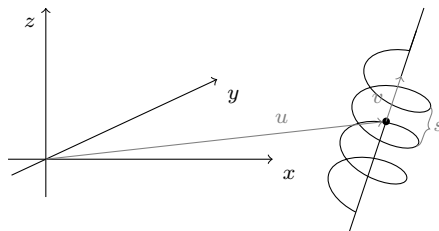
Tatsächlich gilt

$$\left( \begin{array}{c|c} A' & b' \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} AA' & A'b + b' \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

mit Inversem

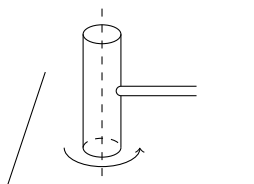
$$\left( \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} A^T & -A^T b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

Nach einem Satz von Chasles (1832):



Jede euklidische Bewegung kann als „Schraubbewegung“ aufgefasst werden: Für alle  $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(3)$  existieren eine Richtung  $v \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , ein Drehwinkel  $\vartheta$ , eine Steigung  $s \in \mathbb{R}$  und ein Translationsvektor  $u \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} R(\vartheta, v) & \frac{\vartheta}{2\pi} s v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{„Schraube“ mit Achse } R \cdot v \text{ und Steigung } s} \begin{pmatrix} \text{id} & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \frac{\vartheta}{2\pi} s v + (\text{id} - R)u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Bestimmte Roboterarme, beziehungsweise Teile davon, können im Allgemeinen nur bestimmte Bewegungen ausführen, zum Beispiel lässt ein Drehgelenk keine Translationen aus  $SE(3)$  zu. Der Konfigurationsraum dieses Drehgelenkes ist anschaulich  $S^1 = SO(2) < SE(3)$ . Es stellt sich also die Frage nach den Untergruppen von  $SE(3)$ : Ist  $G$  eine Untergruppe von  $SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ , so ist auch  $G \cap \mathbb{R}^3 = (\{1\} \times \mathbb{R}^3)$  eine Untergruppe von  $\mathbb{R}^3$ , also  $0, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, r\mathbb{Z}, r\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, r\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2, r\mathbb{Z} \times s\mathbb{Z}, r\mathbb{Z} \times s\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  und  $r\mathbb{Z} \times s\mathbb{Z} \times t\mathbb{Z}$ . Wegen

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & -A^T t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} & A(-A^T b + t) + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} & At \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ „} \in \mathbb{R}^3 \text{“}$$

ist  $\mathbb{R}^3$  ein Normalteiler in  $SE(3)$ , das heißt die Projektion  $SE(3) \rightarrow SE(3)/\mathbb{R}^3 \cong SO(3)$  ist eine Gruppenhomomorphismus und jede Untergruppe  $G < SE(3)$  projiziert auf eine Untergruppe in  $SO(3)$ , also  $SO(3), SO(2)$  oder  $\{1\}$ . Welche „Bausteine“ ergeben Untergruppen von  $SE(3)$ ? Genau jene, für welche der „Faktor“ in  $\mathbb{R}^3$  normal in der Untergruppe liegt.

- $G/\mathbb{R}^3 \cong SO(3)$ : •  $G \cap \mathbb{R}^3 = \{0\}$   
 •  $G \cap \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ , denn  $SO(3)$  ist transitiv auf  $S^2$ .
- $G/\mathbb{R}^3 \cong SO(2)$ : •  $G \cap \mathbb{R}^3 = \{0\} \Rightarrow G \cong SO(2)$   
 •  $G \cap \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3, G \cong SO(2) \times \mathbb{R}^3 = SE(2) \times \mathbb{R}$   
 •  $G \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3, G \cong SO(2) \times \mathbb{R}^2 = SE(2)$   
 •  $G \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^3, G \cong SO(2) \times \mathbb{R}$   
 •  $G \cap \mathbb{R}^3 = s\mathbb{Z}$

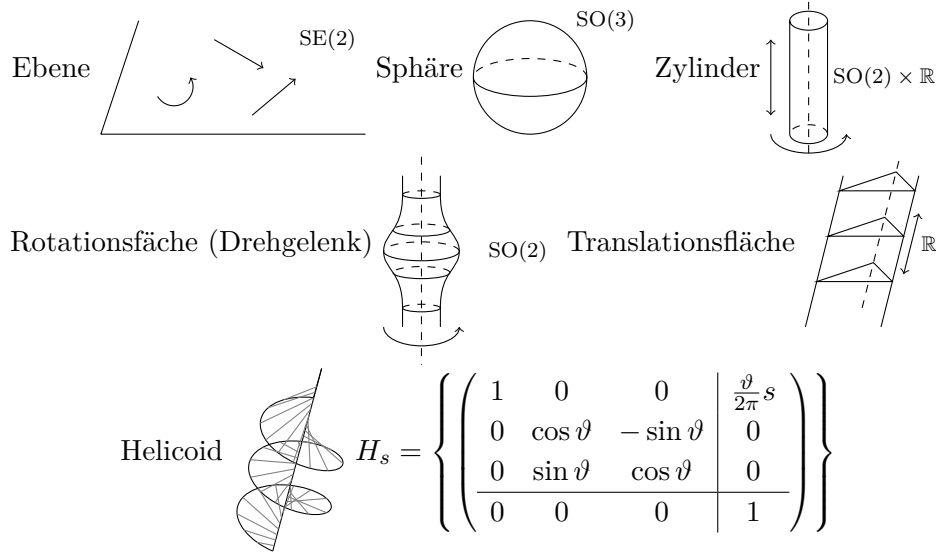
$$G = \left\{ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\vartheta}{2\pi} s \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\} = H_s \cong \mathbb{R}$$

„Schraube“ durch die  $x$ -Achse mit Steigung  $s \in \mathbb{R}$ . Alle diese  $H_s$  sind nicht zu  $\mathbb{R} \hookrightarrow \text{SE}(3)$  konjugiert.

- $G \cap \mathbb{R}^3 = s\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \Rightarrow G = H_s \times \mathbb{R}^2$

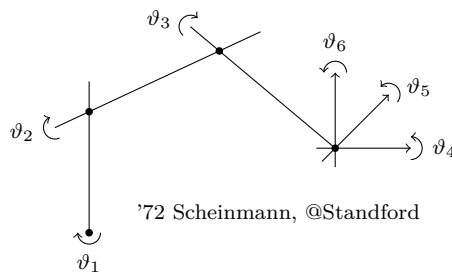
### Reuleux-Paare (1875)

Bewegungen, welche durch das gegeneinander Verschieben oder Verdrehen zweier gleicher Flächen(-stücke) im  $\mathbb{R}^3$  entstehen. Diese entsprechen den Orbits von ein- und zweidimensionalen Untergruppen von  $\text{SE}(3)$ .



### 1 Vorwärtstransformation

Wie berechnet man zu gegebenen Winkeln, beziehungsweise Translationen, die Endpositionen eines Roboters? Man kann sich diese Frage etwa am PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly) veranschaulichen:



Jedes Gelenk bestimmt eine Ein-Paramter-Untergruppe in  $\text{SE}(3)$ ,  $\vartheta \mapsto A_i(\vartheta)$ , wobei  $A_i(\vartheta)$  eine Schraube in obigem Sinne ist, zum Beispiel

$$A_i(\vartheta) = \begin{pmatrix} \text{id} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta & | & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta & | & 0 \\ \hline & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$A_i(\vartheta) = \left( \begin{array}{c|c} \text{id} & \frac{\vartheta_s}{2\pi} \cdot v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

für eine Translation in Richtung  $v$ . Nach Wahl einer Ausgangsposition des Roboters, welche den Winkeln  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_k = 0$  entspricht, erhält man die Endposition, beziehungsweise die **Gestalt**, durch Anwenden der Transformation  $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k)$ .

$$K(\vartheta) = A_1(\vartheta_1)A_2(\vartheta_2) \dots A_k(\vartheta_k) \quad \mathbb{T}^k \rightarrow \text{SE}(3)$$

Es bleiben immer noch einige Fragen offen:

- Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, etc.
- Effizienz
- Umkehrbarkeit der Abbildung
- Geometrie, insbesondere in singulären Punkten

## 2 Linarisierung (d.h. Tangentialräume)

Die Geschwindigkeit eines Werkzeugs ist gegeben durch die erste Ableitung (nach der Zeit) des Positionvektors  $p(t)$  des Roboterarmes. Es gilt  $p(t) = K(\vartheta_t)p_0$ . Da jede Gestalt durch eine Transformation  $g = K(\vartheta)$  beschrieben ist, genügt es, die durch Wege  $t \mapsto g_t(gp_0)$ , mit  $g_0 = \text{id}$ , zu beschreiben. Dann gilt

$$\dot{p}(t) = \dot{g}_t(gp_0).$$

Die Gruppe  $\text{SE}(3) = \text{so}(3) \times \mathbb{R}^3$  ist eine Lie-Gruppe, das heißt eine Glatte Mannigfaltigkeit und die Gruppenoperationen sind glatt bezüglich dieser differenzierbaren Struktur.

Als Untermannigfaltigkeit von  $\text{GL}(3)$  ist  $\text{SO}(3)$  durch die Gleichung  $A^T A = \text{id}$  bestimmt. Ist  $g_t = A(t)$  ein glatter Weg durch  $\text{id} \in \text{SO}(3)$ , so gilt

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{id} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A(t)^T A(t)) = A'(0)^T \underbrace{A(0)}_{=\text{id}} + \underbrace{A(0)^T}_{=\text{id}} A'(0) = A'(0)^T + A'(0).$$

Also gilt  $A'(0) = -A'(0)^T$ , das heißt der Tangentialraum in 1 von  $\text{SO}(3)$ ,  $\text{T}_1 \text{SO}(3) = \text{so}(3)$ , besteht aus schiefsymmetrischen Matrizen. Ist  $g_t = \begin{pmatrix} A_t & b_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ein glatter Weg in  $\text{SE}(3)$  mit  $g_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^4}$ , das heißt  $A_0 = \text{id}$ ,  $b_0 = 0$ , dann gilt

$$g'_0 = \left( \begin{array}{c|c} A'_0 & b'_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \Omega & v \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

wobei

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

eine schiefe Matrix ist und  $v \in \mathbb{R}^3$ . Für einen durch  $x_t = g_t \cdot x_0$  parametrisierten Weg in  $\mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\dot{x}_0 = \Omega x_0 + v = \omega \times x_0 + v,$$



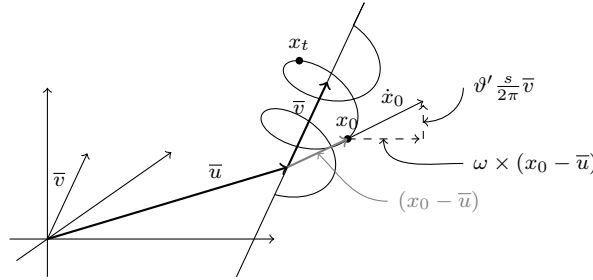
wobei  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ . Ist  $g_t$  eine Schraubbewegung, das heißt existieren  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$  und  $s \in \mathbb{R}$  mit

$$g_t = \left( \begin{array}{c|c} R(\vartheta_t, \bar{v}) & \frac{\vartheta_t s}{2\pi} \bar{v} + (\text{id} - R(\vartheta_t, \bar{v})) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \Omega &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R(\vartheta_t, \bar{v})) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \\ v &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \frac{\vartheta_t s}{2\pi} \bar{v} + (\text{id} \cdot R_t) \bar{u} \right) = \vartheta'_0 \cdot \frac{s}{2\pi} \bar{v} - \Omega \bar{u} \\ \dot{x}_0 &= \Omega x_0 + \vartheta'_0 \frac{s}{2\pi} \bar{v} - \Omega \bar{u} = \underbrace{\omega \times (x_0 - \bar{u})}_{\text{Rotationsgeschwindigkeit}} + \underbrace{\vartheta'_0 \frac{s}{2\pi} \bar{v}}_{\text{„Vortrieb“ der Schraube}} \end{aligned}$$

wobei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit ist.



### 3 Adjungierte Darstellung

Im Allgemeinen ist

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \quad \text{Ad}(g) : (h \mapsto ghg^{-1})_{*e} : T_e G \cong \mathfrak{g} \rightarrow T_e G = \mathfrak{g}.$$

Für die Gruppe  $SO(3)$ , beziehungsweise die Lie-Algebra  $so(3)$ , ist die Konjugation von Metriken gegeben durch

$$\Omega' = \text{Ad}(R)\Omega = R\Omega R^T.$$

Für  $SO(3)$  existiert eine Orthonormalbasis  $r_1, r_2, r_3$  von  $\mathbb{R}^3$  mit  $R^T = (r_1|r_2|r_3)$ . Ist dann

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = \omega \times (\cdot),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \Omega' &= R\Omega R^T = R(\omega \times r_1 | \omega \times r_2 | \omega \times r_3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \langle r_1, \omega \times r_2 \rangle & \langle r_1, \omega \times r_3 \rangle \\ \langle r_2, \omega \times r_1 \rangle & 0 & \langle r_2, \omega \times r_3 \rangle \\ \langle r_3, \omega \times r_1 \rangle & \langle r_3, \omega \times r_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & -\langle r_3, \omega \rangle & \langle r_2, \omega \rangle \\ \langle r_3, \omega \rangle & 0 & -\langle r_1, \omega \rangle \\ -\langle r_2, \omega \rangle & \langle r_1, \omega \rangle & 0 \end{pmatrix} = R\omega \times (\cdot) \end{aligned}$$

In SE(3) gilt damit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Omega' & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \text{Ad} \begin{pmatrix} R & \bar{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \bar{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & \bar{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} R & \bar{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & -R^T \bar{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R\Omega R^T & Rv - R\Omega R^T \bar{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da  $R\Omega R^T \bar{v} = (R\omega) \times \bar{v}$  gilt, folgt für

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ :

$$Vx = -x \times \bar{v} = \bar{v} \times x,$$

das heißt

$$-R\Omega R^T \bar{v} = -(R\omega) \times \bar{v} = VR\omega.$$

Stellt man ein Lie-Algebra-Element  $\begin{pmatrix} \Omega & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  durch  $\begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$  dar, so gilt

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ v \end{pmatrix} = \text{Ad} \begin{pmatrix} R & \bar{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ VR & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix}$$

### Adjungierte Darstellung der Lie-Algebren $\mathfrak{so}(3)$ und $\mathfrak{se}(3)$

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) & (g^{-1}(\cdot)g)_* &= \text{Ad}(g) \\ \text{Ad}_{*e} &= \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) & \text{ad}(X)Y = [X, Y] \end{aligned}$$

Die Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  von  $\text{SO}(3)$  besteht aus den schiefssymmetrischen Matrizen  $\Omega$  wie sie im letzten Abschnitt definiert wurden. Die Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von  $\text{SO}(3)$ . Nun gilt

$$\text{ad}(X)Y = XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$$

$$\text{ad}(Y)Z = YZ - ZY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X$$

$$\text{ad}(Z)X = ZX - XZ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y,$$

wobei man leicht sieht, dass  $\text{ad}(X)Y = [X, Y] = -[Y, X] = -\text{ad}(Y)X$ , und entsprechend für die übrigen Matrizen. In der Basis gilt dann

$$\text{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = X \quad \text{ad}(Y) = Y \quad \text{ad}(Z) = Z.$$

Zu  $\text{se}(3)$  betrachte die Basis

$$\begin{aligned} \omega_i &= \left( \begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) & \omega_j &= \left( \begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) & \omega_k &= \left( \begin{array}{c|c} Z & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \\ v_i &= \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & v_j &= \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & v_k &= \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wie oben berechnet man mit den Kommutatoren der Basiselementen

$$\begin{aligned} \text{ad}(\omega_i) &= \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} & \text{ad}(\omega_j) &= \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} & \text{ad}(\omega_k) &= \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \\ \text{ad}(v_i) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} & \text{ad}(v_j) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix} & \text{ad}(v_k) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in der obigen Basis.

## 4 Exponentialabbildung

Die gewöhnliche Exponentialabbildung für Matrizen

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

stimmt für Matrixgruppen wie  $\text{SO}(3)$  und  $\text{SE}(3)$ , beziehungsweise ihre Lie-Algebren  $\text{so}(3)$  und  $\text{se}(3)$ , mit der Exponentialabbildung des Zusammenhanges welcher durch Paralleltransport durch die Linksmultiplikation definiert ist, überein.

Bezüglich dieses Zusammenhanges sind die Integralkurven von linksinvarianten Vektorfeldern Geodätische, das heißt  $g_t = \exp(tX)$  löst  $\dot{g}_t = g_t X$ . Es sei  $\Omega \in \text{so}(3)$  wie im letzten Abschnitt und  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ . Wie berechnet man  $\exp(\Omega)$ ? Zerlege  $\Omega$  (und  $\text{id}$ ) in orthogonale Idempotente:

$$\begin{aligned} \Omega^3 x &= \omega \times (\omega \times (\omega \times x)) \\ &= \langle \omega, \omega \times x \rangle \omega - \langle \omega, \omega \rangle \omega \times x \\ &= 0 - \|\omega\|^2 \omega \times x \\ &= -\|\omega\|^2 \Omega x \end{aligned}$$

Also gilt  $\Omega^3 + \|\omega\|^2 \Omega = 0$ . Setzt man

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\|\omega\|^2} (\Omega + i\|\omega\| \text{id}) (\Omega - i\|\omega\| \text{id}) \\ P_+ &= \frac{-1}{2\|\omega\|^2} (\Omega - i\|\omega\| \text{id}) \\ P_- &= \frac{-1}{2\|\omega\|^2} (\Omega + i\|\omega\| \text{id}) \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} P_0 P_+ &= P_0 P_- = P_+ P_- = 0 \\ P_0 + P_+ + P_- &= \text{id} \\ P_0^2 &= P_0, P_+^2 = P_+, P_-^2 = P_- \\ \Omega &= i\|\omega\|(P_- - P_+). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\Omega^n = (i\|\omega\|)^n P_- + (-i\|\omega\|)^n P_+$$

und

$$\begin{aligned} \exp(\Omega) &= \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Omega^n \\ &= P_0 + P_- + P_+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} ((i\|\omega\|)^n P_- + (-i\|\omega\|)^n P_+) \\ &= P_0 + e^{i\|\omega\|} P_- + e^{-i\|\omega\|} P_+ \\ &= \dots \\ &= \text{id} + \frac{1}{2\|\omega\|} (e^{-i\|\omega\|} - e^{i\|\omega\|}) \Omega - \frac{1}{2\|\omega\|} (e^{i\|\omega\|} - e^{-i\|\omega\|} - 2) \Omega^2 \\ &= \text{id} + \frac{1}{\|\omega\|} \sin \|\omega\| \Omega + \frac{1}{\|\omega\|^2} (1 - \cos \|\omega\|) \Omega^2. \end{aligned}$$

Mit  $\vartheta = \|\omega\|$  und  $v = \frac{\omega}{\|\omega\|}$  erhält man die sogenannte **Rodrigues-Formel** für die Drehung um die Achse  $\mathbb{R} \cdot v$  mit dem Winkel  $\vartheta$ :

$$R(\vartheta, v)x = e^{\vartheta v} x = x + \sin \vartheta (v \times x) + (1 - \cos \vartheta) v \times (v \times x)$$

Analog erhält man in der Darstellung von  $\text{se}(3)$

$$S = \left( \begin{array}{c|c} \Omega & v \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

eine Gleichung vierten Grades

$$S^4 + \|\omega\|^2 S = 0.$$

Wie oben zerlegt man  $S$  und  $\text{id}$  in Idempotente und ein Nilpotent und erhält

$$\exp(S) = \text{id} + \frac{1}{\|\omega\|} \sin \|\omega\| S + \frac{1}{\|\omega\|^2} (1 - \cos \|\omega\|) S^2.$$

In bestimmten Fällen lässt sich damit die Kinematik eines Roboters lösen. Zum Beispiel findet man damit für Roboter mit drei Gelenken (generisch) für einen Ausgangspunkt  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  und einen Zielpunkt  $p \in \mathbb{R}^3$  Elemente  $S_1, S_2$  und  $S_3$  in  $\text{se}(3)$ , so dass

$$e^{\vartheta_1 S_1} e^{\vartheta_2 S_2} e^{\vartheta_3 S_3} \begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 5 Clifford Algebren

Eine (reelle) **Clifford-Algebra** ist bestimmt durch die Wahl einer Basis  $e_1, \dots, e_n \in V \cong \mathbb{R}^n$  und die Relationen

- $e_i e_j + e_j e_i = 0$  für  $i \neq j$
- $e_i^2 \in \{0, +1, -1\}$

Eine Clifford Algebra ist eindeutig bestimmt durch die Anzahlen der Basiselemente, deren Quadrate 1,  $-1$  oder 0 ergeben. Man schreibt sie dann als  $\text{Cl}(p, q, r)$

### Beispiel

Die Clifford-Algebra  $\text{Cl}(0, 1, 0)$  wird erzeugt von  $e_1$  und  $\mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} e_1^2 &= -1 & (x + ye_1)(z + we_1) &= xz + ywe_1^2 + yze_1 + xwe_1 \\ & & &= (xz - yw) + (yz + xw)e_1 \end{aligned}$$

Mit einem Isomorphismus, der die Abbildungen  $e_1 \mapsto i$  und  $1 \mapsto 1$  enthält ist die Algebra isomorph zu den komplexen Zahlen, also  $\text{Cl}(0, 1, 0) \cong \mathbb{C}$

Jedes Monom von Erzeugern  $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$  kann als Produkt von Erzeugern  $e_{j_1}, \dots, e_{j_l}$  mit  $j_1 < j_2 < \dots < j_l$  (für  $l \leq k$ ) geschrieben werden. Diese Elemente bilden eine Vektorraum-Basis von  $\text{Cl}(p, q, r)$ , man erhält eine direkte Zerlegung

$$\text{Cl}(p, q, r) = \bigoplus_{k=0}^n V_k.$$

Insbesondere gilt  $\dim \text{Cl}(p, q, r) = 2^{(p+q+r)}$ . Diese Vektorraum-Graduierung hängt im Allgemeinen von der Wahl der Basis ab, allerdings ist die Zerlegung

$$\text{Cl}(p, q, r) = \text{Cl}(p, q, r)^- \oplus \text{Cl}(p, q, r)^+$$

in Produkte mit einer ungeraden beziehungsweise geraden Anzahl abhängig von der Wahl der Basis. Das ist eine Involution von  $\text{Cl}$  mit  $e_i \mapsto e_i^* = -e_i$  und  $(ab)^* = b^* a^*$ .

### Wo ist $\text{SO}(3)$ (euklidische Bewegungen)

Betrachte die Clifford-Algebra  $\text{Cl}(0, n, 0)$ . Dann liegt  $\mathbb{R}^n$  in  $\text{Cl}(0, n, 0)$  durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} &\mapsto x^1 e_1 + \dots + x^n e_n & \langle x, y \rangle &= - \sum_{i,j \leq n} x^i y^j (-\delta_{ij}) \\ & & &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j \leq n} x^i y^j (e_i e_j + e_j e_i) \\ & & &= \frac{1}{2} (xy^* + yx^*) \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

Kronecker-Delta

Betrachte die Gruppe

$$\text{Pin}(n) = \{g \in \text{Cl}(0, n, 0) \mid gg^* = 1, (-1)^{|g|} g \times g \in \mathbb{R}^n \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \subseteq \text{Cl}\}$$

Die oben beschriebene Wirkung  $\text{Pin}(n) \curvearrowright \mathbb{R}$  erhält das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( ((-1)^{|g|} g x g^*) ((-1)^{|g|} g y g^*)^* + ((-1)^{|g|} g y g^*) ((-1)^{|g|} g x g^*)^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (-1)^{|g|} g x \underbrace{(g^* g)}_{=1} y^* (-1)^{|g|} g^* + \dots \right) \\ &= g \left( \frac{1}{2} (x y^* + y x^*) \right) g^* \\ &= g g^* \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Damit existiert ein Homomorphismus von  $\text{Pin}(n)$  nach  $O(n)$ . Man kann zeigen, dass dieser surjektiv ist und  $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  als Kern hat. Es gilt  $\text{Pin}(n) \cap \mathbb{R}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ , denn

$$1 = v v^* = \frac{1}{2} (v v^* + v v^*) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

und man rechnet schnell nach, dass  $-v w v^* \in \mathbb{R}^n$  für alle  $w \in \mathbb{R}^n$ . Jedes solche  $v$  wirkt als Spiegelung an der Hyperebene  $v^\perp$ :

$$(-1)^{|v|} v (\lambda v) v^* = -\lambda v v v^* = -\lambda v$$

Ist  $w \in v^\perp$ , so gilt

$$0 = \langle w, v \rangle = \frac{1}{2} (w v^* + v w^*),$$

also

$$w v^* = -v w^* = v w$$

und es folgt

$$(-1)^{|v|} v w v^* = -v v w = v^* v w = w.$$

Fasst man Drehungen in  $\mathbb{R}^n$  als Verkettung von Spiegelungen auf, so ist klar, dass die von geraden Elemente erzeugte Untergruppe

$$\text{Spin}(n) = \{g \in \text{Cl}^+(0, n, 0) \mid g g^* = 1 \text{ und } (-1)^{|g|} g x g^* \in \mathbb{R}^n \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}$$

gerade die zweifache Überlagerung von  $\text{SO}(n)$  ist. Wir werden uns nun im Folgenden auf den Fall  $n = 3$  beschränken. Sei  $g \in \text{Cl}^+(0, 3, 0)$  mit

$$g = a_0 + a_1 e_2 e_3 + a_2 e_3 e_1 + a_3 e_1 e_2$$

und

$$\begin{aligned} g^* &= a_0 + a_1 (e_2 e_3)^* + a_2 (e_3 e_1)^* + a_3 (e_1 e_2)^* \\ &= a_0 + a_1 e_3^* e_2^* + a_2 e_1^* e_3^* + a_3 e_2^* e_1^* \\ &= a_0 + a_1 (-e_3)(-e_2) + a_2 (-e_1)(-e_3) + a_3 (-e_2)(-e_1) \\ &= a_0 - a_1 e_2 e_3 - a_2 e_3 e_1 - a_3 e_1 e_2 \end{aligned}$$

und damit

$$g g^* = \dots = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

und man rechnet leicht nach, dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  schon  $(-1)^{|g|} g x g^* \in \mathbb{R}^n$  gilt, Damit gilt

$$\text{Spin}(3) \subseteq \mathbb{S}^3 \subseteq \text{Cl}^+(0, 3, 0) = [e_2^i e_3^j, e_3^j e_1^k, e_1^k e_2^i] = \mathbb{H}$$

**Beispiel**

Die Drehung um den Winkel  $\vartheta$  um die Achse  $e_k$  wird definiert durch

$$g = \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} e_i e_j,$$

wobei  $k \notin \{i, j\}$  für  $i \neq j$  gelte. Damit erhält man

$$\begin{aligned} g e_k g^* &= \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} e_i e_j \right) e_k \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} e_i e_j \right) \\ &= \cos^2 \frac{\vartheta}{2} e_k + \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} e_i e_j e_k - \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} e_k e_i e_j + \sin^2 \frac{\vartheta}{2} e_i e_j e_k e_i e_j \\ &= \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) e_k = e_k \\ g e_j g^* &= \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} e_i e_j \right) e_k \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} e_i e_j \right) \\ &= \dots = \left( \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) e_j - 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} e_i \\ &= \cos \vartheta e_j - \sin \vartheta e_i \end{aligned}$$

Betracht  $\text{Spin}(n) \times \mathbb{R}^n = \{ „g + t“ \}$ . Betrachte  $\text{Cl}(0, n, 1)$  mit den Erzeugern  $e_1, \dots, e_n$  mit  $e_i^2 = -1$ , sowie  $e$  mit  $e^2 = 0$ .  $\text{Cl}(0, n, 1)$  enthält mit  $(x^1, \dots, x^n)^T \mapsto 1 + (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) e$  einen  $\mathbb{R}^n$ , und die Gruppe

$$\text{Spin}(n) \times \mathbb{R}^n = \left\{ \left( g + \frac{1}{2} t g e \right) \in \text{Cl}(0, n, 1) \mid g \in \text{Spin}(n), t = t^1 e_1 + \dots + t^n e_n \right\}$$

wirkt durch

$$\left( g + \frac{1}{2} t g e \right) (1 + x e) \left( g - \frac{1}{2} t g e \right)^* = \dots = 1 + (g x g^* + t) e.$$

Das sind unsere gesuchten euklidischen Bewegungen.

**Beispiel**

Ist  $h = \left( g + \frac{1}{2} t g e \right)$  eine reine Drehung, also  $t = 0$ , so gilt

$$h(1 + x e)h^* = g(1 + x e)g^* = g g^* + g x e g^* = 1 + (g x g^*) e$$

Die letzte Gleichheit kommt daher, dass  $g$  gerade ist. Ist  $h = \left( 1 + \frac{1}{2} t e \right)$  eine reine Translation, so gilt

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{2} t e \right) (1 + x e) \left( 1 - \frac{1}{2} t e \right)^* &= \left( 1 + \frac{1}{2} t e + x e + \frac{1}{2} t e x e \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} t e \right)^* \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} t e + x e \right) \left( 1 - \frac{1}{2} t e \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} t e + x e - \frac{1}{2} t e - \frac{1}{4} t e^2 t - \frac{1}{2} x e^2 t \\ &= 1 + t e + x e = 1 + (x + t) e \end{aligned}$$

### Wo ist die „Geometrie“?

Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  sind mit einer Einheitsnormalen  $n \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  und einem „Abstand“  $d$  gegeben durch

$$H_{n,d} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n, x \rangle = d\}.$$

Ist  $(R, v)$  eine euklidische Bewegung, so gilt

$$(R, v)H_{n,d} = \{x \mid d = \langle n, R^T x - R^T v \rangle = \langle Rn, x \rangle - \langle Rn, v \rangle\} = H_{Rn, d + \langle Rn, v \rangle}.$$

Betrachte Elemente vom Grad 1 in  $\text{Cl}(0, 3, 1)$ , also  $\pi = n_x e_1 + n_y e_2 + n_z e_3 + de$ . Für  $n = (n_x, n_y, n_z)^T$  gilt genau dann  $\|n\| = 1$ , falls  $\pi\pi^* = 1$ . Ist  $h = g + \frac{1}{2}tge$  eine euklidische Bewegung, so gilt

$$\begin{aligned} h\pi h^* &= \left(g + \frac{1}{2}tge\right) (n + de) \left(g - \frac{1}{2}tge\right)^* = \dots \\ &= gng^* + \left(d - \frac{1}{2}(gng^*t + tgn g^*)\right) e, = " - \langle Rn, v \rangle. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den vorangehenden Betrachtungen werden jetzt „geometrische“ **Punkte** nicht als Grad 1 Elemente in  $\text{Cl}(0, 3, 1)$  modelliert, sondern wie folgt: Ein Punkt ist von der Form

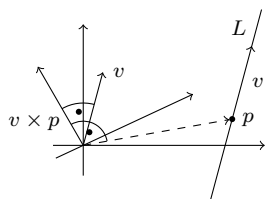
$$p = e_1 e_2 e_3 + x e_2 e_3 e + y e_3 e_1 e + z e_1 e_2 e.$$

Die ist äquivalent (bis auf Vorzeichen) zu  $pp^* = 1$ . Die Wirkung von  $\text{Spin}(3) \times \mathbb{R}^3$  (beziehungsweise  $\text{SE}(3)$ ) ist wieder gegeben durch

$$\left(g + \frac{1}{2}tge\right)p\left(g - \frac{1}{2}tge\right).$$

Im  $\mathbb{R}^3$  ist eine **Gerade**  $L$  durch einen Punkt  $p \in L$  und eine Richtung  $v \in \mathbb{R}^3$  gegeben. In  $\text{Cl}(0, 3, 1)$  ist dann die entsprechende Gerade gegeben durch

$$L = (v_x e_2 e_3 + v_y e_3 e_1 + v_z e_1 e_2) + (u_x e_1 e + u_y e_2 e + u_z e_3 e)$$



mit  $u = (u_x, u_y, u_z)^T = p \times v$ . Dies ist äquivalent zu  $ll^* = 1$ . Die Wirkung ist durch Konjugation gegeben.

Durch die Relation  $x \wedge y = -y \wedge x$  für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  erhält man die äußere Algebra  $\wedge \mathbb{R}^n$  über  $\mathbb{R}^n$ . Diese findet sich wie folgt in der Clifford Algebra wieder: Sind  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \text{Cl}$ , so sind

$$x \wedge c = \frac{1}{2}(xc + (-1)^{|c|}cx) \quad c \wedge x = \frac{1}{2}(cx + (-1)^{|c|}xc).$$

Die  $\mathbb{R}$ -lineare und assoziative Einbettung ergibt ein (weites) Produkt in  $\text{Cl}$ . Für Basiselemente  $e_i, e_j \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$e_i \wedge e_j = \frac{1}{2}(e_i e_j - e_j e_i) = \begin{cases} 0 & i = j \\ -e_j \wedge e_i & i \neq j \end{cases}.$$



Damit erhält Cl die äußere Algebra. Für  $i \neq j$  gilt ferner

$$e_i \wedge e_j = \frac{1}{2}(e_i e_j - e_j e_i) = \frac{1}{2}(e_i e_j + e_i e_j) = e_i e_j.$$

Betrachte das äußere Produkt eines Punktes  $p = e_1 e_2 e_3 + x e_2 e_3 e + y e_3 e_1 e + z e_1 e_2 e$  und einer Ebene  $\pi = n_x e_1 + n_y e_2 + n_z e_3 + de$ . Dann gilt

$$\pi \wedge p = \frac{1}{2}(\pi p - p \pi) = (x n_x + y n_y + z n_z - d) e_1 e_2 e_3 e.$$

Damit liegt genau dann der Punkt  $p$  in der Ebene  $\pi$ , wenn  $\pi \wedge p = 0$  gilt. Analog zeigt man, dass eine Gerade  $l$  genau dann in einer Ebene  $\pi$  liegt, wenn  $\pi \wedge l = 0$  gilt. Der Ausdruck  $l \wedge p$  verschwindet (formal), da  $\text{Grad } l \wedge p > 4$ . Ein Punkt  $p$  liegt jedoch genau dann auf einer Geraden  $l$ , wenn  $p l^* + l p^* = 0$  gilt.

Allgemeiner lässt sich der Schnitt zweier geometrischer Objekte mit Hilfe des äußeren Produktes charakterisieren: Es seien  $\pi_1$  und  $\pi_2$  zwei Ebenen. Dann ist jedenfalls  $\pi_1 \wedge \pi_2$  ein Grad 2 Element. Es bleibt zu zeigen, dass das eine Gerade definiert, also die Bedingung  $l l^* = 1$  erfüllt ist. Es gilt

$$(\pi_1 \wedge \pi_2) = \frac{1}{2}(\pi_1 \pi_2 + (-1)^{|\pi_2|} \pi_2 \pi_1) = \frac{1}{2}(\pi_1 \pi_2 - \pi_2 \pi_1),$$

also

$$\begin{aligned} (\pi_1 \wedge \pi_2)(\pi_1 \wedge \pi_2)^* &= \frac{1}{4}(\pi_1 \pi_2 - \pi_2 \pi_1)(\pi_1 \pi_2 - \pi_2 \pi_1)^* \\ &= \frac{1}{4}(\pi_1 \pi_2 - \pi_2 \pi_1)(\pi_2 \pi_1 - \pi_1 \pi_2) \\ &= \frac{1}{4}(\pi_1 \pi_2 \pi_2 \pi_1 + \pi_2 \pi_1 \pi_1 \pi_2 - \pi_2 \pi_1 \pi_2 \pi_1 - \pi_1 \pi_2 \pi_1 \pi_2) \\ &= \frac{1}{4}(2 - \pi_2 \pi_1 \pi_2 \pi_1 - \pi_1 \pi_2 \pi_1 \pi_2) \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass sich alle Grad 4 Terme aufheben, und dass keine Grad 1 oder Grad 2 Terme auftreten, da  $(\pi_1 \wedge \pi_2)(\pi_1 \wedge \pi_2)^*$  selbstadjungiert ist. Damit ist

$$l = \frac{\pi_1 \wedge \pi_2}{\sqrt{\pm(\pi_1 \wedge \pi_2)(\pi_1 \wedge \pi_2)^*}}$$

eine Gerade. Wegen  $\pi_1 \wedge (\pi_1 \wedge \pi_2) = 0 = \pi_2 \wedge (\pi_1 \wedge \pi_2)$  ist  $l$  in  $\pi_1$  und  $\pi_2$  enthalten. Analog zeigt man, dass sowohl das äußere Produkt  $p$  einer Geraden  $l$  und einer Ebene  $\pi$  mit

$$p = \frac{l \wedge \pi}{\sqrt{\pm(l \wedge \pi)(l \wedge \pi)^*}},$$

als auch das äußere Produkt dreier Ebenen  $p = \frac{1}{(\dots)} \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3$  einen Punkt ergeben.

## Anwendung

Die inverse Kinematik eines Roboters mit sechs Gelenken ist lösbar, falls drei aufeinanderfolgende Drehachsen entweder einen gemeinsamen Schnittpunkt haben (Piper 1968) oder parallel sind (Duffy 1980). Die inverse Kinematik ist gegeben durch

$$k(\vartheta) = a_1(\vartheta_1) a_2(\vartheta_2) \dots a_6(\vartheta_6),$$

wobei jedes Drehgelenk durch den Drehwinkel  $\vartheta_i$  eines Elementes

$$a_i(\vartheta_i) = \cos \frac{\vartheta_i}{2} + \sin \frac{\vartheta_i}{2} l_i$$

parametrisiert wird.

**Beweisskizze**

Angenommen die Achsen  $l_2, l_3$  und  $l_4$  seien parallel. Dann ist eine Ebene  $\pi$  orthogonal zu den Richtungsvektoren aller drei Geraden  $l_2, l_3$  und  $l_4$  und invariant unter  $a_2, a_3$  und  $a_4$ , das heißt  $\pi = a_2 a_3 a_4 \pi a_4^* a_3^* a_2^*$ . Stellt man die direkte Kinematik um, so folgt  $a_1^* k a_6^* a_5^* = a_2 a_3 a_4$ , und mit der obigen Gleichung  $\pi = a_1^* k a_6^* a_5^* \pi a_5 a_6 k^* a_1$ . Es gilt also die folgenden Gleichungen zu lösen:

$$k^* a_1 \pi a_1^* k = a_6^* \underbrace{a_5^* \pi a_5}_{=\pi'} a_6 \tag{1}$$

$$a_2 a_3 a_4 = a_1^* k a_6^* a_5^* = k' \tag{2}$$

Lösungen zu (2) lassen sich auf die klassische Art finden. Zu (1), der Schnittpunkt  $l_6 \wedge (a_5^* \pi a_5)$  ist invariant unter der Drehung um  $l_6$ . Damit gilt

$$l_6 \wedge (k^* a_1 \pi a_1^* k) = l_6 \wedge (a_6^* a_5^* \pi a_5 a_6) = l_6 \wedge (a_5^* \pi a_5).$$

Dies liefert Lösungen für  $\sin \vartheta_1, \cos \vartheta_1, \sin \vartheta_5, \cos \vartheta_5$ , beziehungsweise für  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_5$ . Damit erhält man direkt eine Lösung für  $\vartheta_6$  durch (1). (□)

# Stichwortverzeichnis

- Arbeitsbereich, 43
- ausgewogen, 45
- ausgewogene Teilmenge, 49
- (BC), 18
- CAT( $\kappa$ )-Ungleichung, 8
- Clifford-Algebra, 61
- Diagonale
  - verallgemeinerte, 29
- Dreieck
  - geodatisches, 8
- (EBC), 21
- Ecke, 30
  - essentielle, 30
  - freie, 30
- Erzeuger, 40
  - kommuntativer, 41
  - zulässiger, 41
- Fahnenkomplex, 39
- generisch, 47
- Geodätische
  - minimierende, 7
- gerümmt
  - nicht-positiv, 9
- Gerade, 64
- Gestalt, 56
- Grad
  - einer Ecke, 30
- Graph, 30
- GREEDY, 12
- Höhenfunktion, 44
- Hessesche, 45
- $k$ -Kette, 37
- Kammer, 50
  - normale, 51
- Kante, 30
  - Orientierung, 30
- Konfigurationsraum, 29, 43
  - ungeordneter, 29
- konvex, 10
- kurz, 45
- Längenvektor, 44
  - generischer, 44
  - normaler, 51
- lang, 45
- Link, 39
- LION AND MAN, 15
- lokal rekonfigurierbares System, 41
  - äquivalentes, 41
- Metrik
  - innere, 7
- $M_\kappa$ -Polyederkomplex, 36
- PLANES, 13
- Puma
  - PUMA, 55
- Punkt, 64
  - Vergleichs-, 8
- Randabbildung, 30
- Raum
  - $R$ -geodätischer, 7
  - CAT( $\kappa$ )-, 9
  - geodätischer, 7
  - Längen-, 7
- Rodrigues-Formel, 60
- ROTATING SPHERES, 18
- SPHERES, 15
- Stratum, 50
- Totalkrümmung, 23
- Umfang, 24

vollständig  
geodätisch, 8

Weg  
rektifizierbarer, 7

Wirkung, 41

Zopfgruppe, 29

Zusatandskomplex, 41

Zustand, 40