

# Analysis II

Die Mitarbeiter von <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>

7. August 2018



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>2</b>
<b>I. Vorwort</b>	<b>5</b>
I.1. Über dieses Skriptum . . . . .	5
I.2. Wer . . . . .	5
I.3. Wo . . . . .	5
<b>1. Der Raum <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>7</b>
<b>2. Konvergenz im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>11</b>
<b>3. Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit</b>	<b>15</b>
<b>4. Partielle Ableitungen</b>	<b>19</b>
<b>5. Differentiation</b>	<b>23</b>
<b>6. Differenzierbarkeitseigenschaften reellwertiger Funktionen</b>	<b>29</b>
<b>7. Quadratische Formen</b>	<b>35</b>
<b>8. Extremwerte</b>	<b>39</b>
<b>9. Der Umkehrsatz</b>	<b>41</b>
<b>10. Implizit definierte Funktionen</b>	<b>45</b>
<b>11. Extremwerte unter Nebenbedingungen</b>	<b>47</b>
<b>12. Wege im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>51</b>
<b>13. Wegintegrale</b>	<b>57</b>
<b>14. Stammfunktionen</b>	<b>61</b>
<b>15. Integration von Treppenfunktionen</b>	<b>65</b>
<b>16. Das Lebesguesche Integral</b>	<b>69</b>
<b>17. Quadrierbare Mengen</b>	<b>81</b>
<b>18. Konvergenzsätze</b>	<b>87</b>
<b>19. Messbare Mengen und messbare Funktionen</b>	<b>93</b>
<b>20. Satz von Fubini / Substitutionsregel</b>	<b>95</b>

<b>21. Parameterabhängige Integrale</b>	<b>99</b>
<b>A. Satz um Satz (hüpft der Has)</b>	<b>101</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>104</b>
<b>B. Credits für Analysis II</b>	<b>107</b>

# I. Vorwort

## I.1. Über dieses Skriptum

Dies ist ein erweiterter Mitschrieb der Vorlesung „Analysis II“ von Herrn Schmoeger im Sommersemester 05 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Schmoeger hier veröffentlicht, Herr Schmoeger ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

## I.2. Wer

Gestartet wurde das Projekt von Joachim Breitner. Beteiligt am Mitschrieb sind außer Joachim noch Pascal Maillard, Wenzel Jakob und andere.

## I.3. Wo

Alle Kapitel inklusive  $\text{\LaTeX}$ -Quellen können unter <http://mitschriebwiki.nomeata.de> abgerufen werden. Dort ist ein *Wiki* eingerichtet und von Joachim Breitner um die  $\text{\LaTeX}$ -Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.



# 1. Der Raum $\mathbb{R}^n$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum.

$e_1 := (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ .

## Definition

Seien  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- (1)  $x \cdot y := xy := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  heißt das **Skalar-** oder **Innenprodukt** von  $x$  und  $y$ .
- (2)  $\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$  heißt die **Norm** oder **Länge** von  $x$ .
- (3)  $\|x - y\|$  heißt der **Abstand** von  $x$  und  $y$ .

## Beispiele:

- (1)  $\|e_j\| = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ )
- (2)  $n = 3 : \|(1, 2, 3)\| = (1 + 4 + 9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$

## Beachte:

- (1)  $x \cdot y \in \mathbb{R}$
- (2)  $\|x\|^2 = x \cdot x$

### Satz 1.1 (Rechenregeln zur Norm)

Seien  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$

- (1)  $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$ ,  $x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)$
- (2)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (3)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (4)  $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$  **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (CSU)**
- (5)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (6)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$
- (7)  $|x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$  ( $j = 1, \dots, n$ )

## Beweis

- (1), (2), (3) nachrechnen.

1. Der Raum  $\mathbb{R}^n$

(6) Übung.

$$(4) \text{ O.B.d.A: } y \neq 0 \text{ also } \|y\| > 0. \ a := x \cdot x = \|x\|^2, \ b := xy, \ c := \|y\|^2 = y \cdot y, \ \alpha := \frac{b}{c}. \ 0 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2) = a - 2\alpha b + \alpha^2 c = a - 2\frac{b}{c}b + \frac{b^2}{c^2}c = a - \frac{b^2}{c} \implies 0 \leq ac - b^2 \implies b^2 \leq ac \implies (xy)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

$$(5) \|x+y\|^2 = (x+y)(x+y) \stackrel{(1)}{=} x \cdot x + 2xy + y \cdot y = \|x\|^2 + 2xy + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|x||y| + \|y\|^2 \stackrel{(4)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

$$(7) |x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2 \implies 1. \text{ Ungleichung; } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \stackrel{(5)}{\leq} \|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\| = |x_1| + \dots + |x_n| \quad \blacksquare$$

Seien  $p, q, l \in \mathbb{N}$ . Es sei  $A$  eine reelle  $p \times q$ -Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \quad \|A\| := \left( \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \alpha_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ Norm von } A$$

Sei  $B$  eine reelle  $q \times l$ -Matrix ( $\implies AB$  existiert). **Übung:**  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Sei  $x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ .  $Ax := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$  (**Matrix-Vektorprodukt**).

Es folgt:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

**Definition**

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta > 0$ ,  $A, U \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- (1)  $U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$  heißt  $\delta$ -Umgebung von  $x_0$  oder **offene Kugel** um  $x_0$  mit Radius  $\delta$ .
- (2)  $U$  ist eine **Umgebung** von  $x_0 : \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$ .
- (3)  $A$  heißt **beschränkt** :  $\iff \exists c \geq 0 : \|a\| \leq c \forall a \in A$ .
- (4)  $x_0 \in A$  heißt ein **innerer Punkt** von  $A : \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A$ .  
 $A^\circ := \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$  heißt das **Innere** von  $A$ . Klar:  $A^\circ \subseteq A$ .
- (5)  $A$  heißt **offen** :  $\iff A = A^\circ$ . Zur Übung:  $A^\circ$  ist offen.

**Beispiele:**

- (1) offene Kugeln sind offen,  $\mathbb{R}^n$  ist offen,  $\emptyset$  ist offen.
- (2)  $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ ,  $A^\circ = U_\delta(x_0)$
- (3)  $n = 2$ :  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : x_2 = x_1^2\}$ ,  $A^\circ = \emptyset$

**Definition**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

- (1)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von  $A : \iff \forall \delta > 0 : (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ .  
 $\mathcal{H}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}$ .

- (2)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt ein **Berührungspunkt** (BP) von  $A$  :  $\iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$ .  
 $\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist ein Berührungspunkt von } A\}$  heißt die **Abschließung** von  $A$ . Klar:  
 $A \subseteq \bar{A}$ . Zur Übung:  $\bar{A} = A \cup \mathcal{H}(A)$ .
- (3)  $A$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff A = \bar{A}$ . Zur Übung:  $\bar{A}$  ist abgeschlossen.
- (4)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt ein **Randpunkt** von  $A$  :  $\iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$  und  $U_\delta(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$ .  $\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist ein Randpunkt von } A\}$  heißt der **Rand** von  $A$ . Zur Übung:  $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ .

### Beispiele:

- (1)  $\mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen,  $\emptyset$  ist abgeschlossen;  
 $\bar{A} = U_\delta(\bar{x}_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$  (**abgeschlossene Kugel** um  $x_0$  mit Radius  $\delta$ )
- (2)  $\partial U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \delta\} = \partial U_\delta(\bar{x}_0)$
- (3)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = x_1^2\}$ .  $A = \bar{A} = \partial A$

### Satz 1.2 (Offene und abgeschlossene Mengen)

- (1) Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $A$  ist abgeschlossen :  $\iff \mathbb{R}^n \setminus A$  ist offen.
- (2) Die Vereinigung offener Mengen ist offen.
- (3) Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (4) Sind  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$  offen  $\implies \bigcap_{j=1}^n A_j$  ist offen
- (5) Sind  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen  $\implies \bigcap_{j=1}^n A_j$  ist abgeschlossen

### Beispiel

( $n = 1$ ).  $A_t := (0, 1 + t)$  ( $t > 0$ ). Jedes  $A_t$  ist offen.  $\bigcap_{t>0} A_t = (0, 1]$  ist nicht offen.

### Beweis

- (1) „ $\implies$ “: Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . Annahme:  $\forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \not\subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \implies \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \implies x_0 \in \bar{A} \stackrel{\text{Vor.}}{\subseteq} A$ , Widerspruch  
 „ $\impliedby$ “: Annahme:  $\subset \bar{A} \implies \exists x_0 \in \bar{A} : x_0 \notin A$ ; also  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . Voraussetzung  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \implies U_\delta(x_0) \cap A = \emptyset \implies x_0 \notin \bar{A}$ , Widerspruch!
- (2) Sei  $(A_\lambda)_{\lambda \in M}$  eine Familie offener Mengen und  $V := \bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda$ . Sei  $x_0 \in V \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in A_{\lambda_0}$ .  $A_{\lambda_0}$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq V$
- (3) folgt aus (1) und (2) (Komplemente!)
- (4)  $D := \bigcap_{j=1}^m A_j$ . Sei  $x_0 \in D$ .  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : x_0 \in A_j$ , also existiert  $\delta_j > 0 : U_{\delta_j}(x_0) \subseteq A_j$ .  
 $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\} \implies U_\delta(x_0) \subseteq D$
- (5) folgt aus (1) und (4) ■



## 2. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Sei  $(a^{(k)})$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ , also  $(a^{(k)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$  mit  $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ . Die Begriffe **Teilfolge** und **Umordnung** definiert man wie in Analysis I.  $(a^{(k)})$  heißt beschränkt :  $\iff \exists c \geq 0 : \|a^{(k)}\| \leq c \forall k \in \mathbb{N}$ .

### Definition (Grenzwert und Beschränktheit)

$(a^{(k)})$  heißt **konvergent** :  $\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \|a^{(k)} - a\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$  (  $\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k)} - a\| < \varepsilon \forall k \geq k_0$ ). In diesem Fall heißt  $a$  der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von  $(a^{(k)})$  und schreibt:  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)}$  oder  $a^{(k)} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$

### Beispiel

( $n = 2$ ):  $a^{(k)} = (\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k^n})$  (Erinnerung:  $\frac{1}{n}$  konvergiert gegen 17);  $a := (0, 1)$ ;  $\|a^{(k)} - a\| = \|(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})\| = (\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4})^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \implies a^{(k)} \rightarrow (0, 1)$

### Satz 2.1 (Konvergenz)

Sei  $(a^{(k)})$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Sei  $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$  und  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann:

$$a^{(k)} \rightarrow a (k \rightarrow \infty) \iff a_1^{(k)} \rightarrow a_1, \dots, a_n^{(k)} \rightarrow a_n (k \rightarrow \infty)$$

(2) Der Grenzwert einer konvergenen Folge ist eindeutig bestimmt.

(3) Ist  $(a^{(k)})$  konvergent  $\implies a^{(k)}$  ist beschränkt und jede Teilfolge und jede Umordnung von  $(a^{(k)})$  konvergiert gegen  $\lim a^{(k)}$ .

(4) Sei  $(b^{(k)})$  eine weitere Folge,  $a, b \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Es gelte  $a^{(k)} \rightarrow a, b^{(k)} \rightarrow b$  Dann:

$$\|a^{(k)}\| \rightarrow \|a\|$$

$$a^{(k)} + b^{(k)} \rightarrow a + b$$

$$\alpha a^{(k)} \rightarrow \alpha a$$

$$a^{(k)} \cdot b^{(k)} \rightarrow a \cdot b$$

(5) **Bolzano-Weierstraß**: Ist  $(a^{(k)})$  beschränkt, so enthält  $(a^{(k)})$  eine konvergente Teilfolge.

(6) **Cauchy-Kriterium**:  $(a^{(k)})$  konvergent  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k)} - a^{(l)}\| < \varepsilon \forall k, l \geq k_0$

## 2. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

### Beweis

(1) 1.1(7)  $\implies |a_j^{(k)} - a_j| \leq \|a^{(k)} - a\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i^{(k)} - a_i| \implies$  Behauptung.

(2) und

(3) wie in Analysis I.

(4) folgt aus (1)

(5) Sei  $(a^{(k)})$  beschränkt. O.B.d.A:  $n = 2$ . Also  $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$  1.1(7)  $\implies |a_1^{(k)}|, |a_2^{(k)}| \leq \|a^{(k)}\| \forall k \in \mathbb{N} \implies (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$  sind beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$ . Analysis 1  $\implies (a_1^{(k)})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(a_1^{(k_{j_l})})$ .  $(a_2^{(k_j)})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(a_2^{(k_{j_l})})$ . Analysis 1  $\implies (a_1^{(k_{j_l})})$  ist konvergent  $\xrightarrow{(1)}$   $(a^{(k_{j_l})})$  konvergiert.

(6) „ $\implies$ “: wie in Analysis 1. „ $\Leftarrow$ “: 1.1(7)  $\implies |a_j^{(k)} - a_j^{(l)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(l)}\|$  ( $j = 1, \dots, n$ )  $\implies$  jede Folge  $(a_j^{(k)})$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ , also konvergent  $\xrightarrow{(1)}$   $(a^{(k)})$  konvergiert. ■

### Satz 2.2 (Häufungswerte und konvergente Folgen)

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1)  $x_0 \in H(A) \iff \exists$  Folge  $(x^{(k)})$  in  $A \setminus \{x_0\}$  mit  $x^{(k)} \rightarrow x_0$ .

(2)  $x_0 \in \bar{A} \iff \exists$  Folge  $(x^{(k)})$  in  $A$  mit  $x^{(k)} \rightarrow x_0$ .

(3)  $A$  ist abgeschlossen  $\iff$  der Grenzwert jeder konvergenten Folge in  $A$  gehört zu  $A$ .

(4)  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\iff$  jede Folge in  $A$  enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu  $A$  gehört.

### Beweis

(1) Wie in Analysis 1

(2) Fast wörtlich wie bei (1)

(4) Wörtlich wie in Analysis 1

(3) „ $\implies$ “: Sei  $(a^{(k)})$  eine konvergente Folge in  $A$  und  $x_0 := \lim a^{(k)} \xrightarrow{(2)} x_0 \in \bar{A} \stackrel{\text{Vor.}}{=} A$ . „ $\Leftarrow$ “:  
z.z:  $\bar{A} \subseteq A$ . Sei  $x_0 \in \bar{A} \xrightarrow{(2)} x_0 \in A$ . Also:  $A = \bar{A}$ . ■

### Satz 2.3 (Überdeckungen)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  sei abgeschlossen und beschränkt

(1) Ist  $\varepsilon > 0 \implies \exists a^{(1)}, \dots, a^{(m)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_\varepsilon(a^{(j)})$

(2)  $\exists$  abzählbare Teilmenge  $B$  von  $A : \bar{B} = A$ .

(3) **Überdeckungssatz von Heine-Borel:** Ist  $(G_\lambda)_{\lambda \in M}$  eine Familie offener Mengen mit  $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in M} G_\lambda$ , dann existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in M : A \subseteq \bigcup_{j=1}^m G_{\lambda_j}$ .

**Beweis**

(1) Sei  $\varepsilon > 0$ . Annahme: Die Behauptung ist falsch. Sei  $a^{(1)} \in A$ . Dann:  $A \not\subseteq U_\varepsilon(a^{(1)}) \implies \exists a^{(2)} \in A : a^{(2)} \notin U_\varepsilon(a^{(1)}) \implies \|a^{(2)} - a^{(1)}\| \geq \varepsilon$ .  $A \not\subseteq U_\varepsilon(a^{(1)}) \cup U_\varepsilon(a^{(2)}) \implies \exists a^{(3)} \in A : \|a^{(3)} - a^{(2)}\| \geq \varepsilon, \|a^{(3)} - a^{(1)}\| \geq \varepsilon$  etc.. Wir erhalten so eine Folge  $(a^{(k)})$  in  $A$ :  $\|a^{(k)} - a^{(l)}\| \geq \varepsilon$  für  $k \neq l$ . 2.2(4)  $\implies (a^{(k)})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $\xrightarrow{2.1(6)} \exists j_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k_j)} - a^{(l_j)}\| < \varepsilon \forall j, l \geq j_0$ , Widerspruch!

(2) Sei  $j \in \mathbb{N}$ .  $\varepsilon := \frac{1}{j}$ . (1)  $\implies \exists$  endl. Teilmenge  $B_j$  von  $A$  mit (\*)  $A \subseteq \bigcup_{x \in B_j} U_{\frac{1}{j}}(x)$ .

$B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \implies B \subseteq A$  und  $B$  ist abzählbar. Dann:  $\bar{B} \subseteq \bar{A} \stackrel{\text{Vor.}}{=} A$ . Noch zu zeigen:  $A \subseteq \bar{B}$ . Sei  $x_0 \in A$  und  $\delta > 0$ : zu zeigen:  $U_\delta(x_0) \cap B \neq \emptyset$ . Wähle  $j \in \mathbb{N}$  so, daß  $\frac{1}{j} < \delta$  (\*)  $\implies \exists x \in B_j \subseteq B : x_0 \in U_{\frac{1}{j}}(x) \implies \|x_0 - x\| < \frac{1}{j} < \delta \implies x \in U_\delta(x_0) \implies x \in U_\delta(x_0) \cap B$ .

(3) Teil 1: Behauptung:  $\exists \varepsilon > 0 : \forall a \in A \exists \lambda \in M : U_\varepsilon(a) \subseteq G_\lambda$ . Beweis: Annahme: Die Behauptung ist falsch.  $\forall k \in \mathbb{N} \exists a^{(k)} \in A : (**) U_{\frac{1}{k}}(a^{(k)}) \not\subseteq G_\lambda \forall \lambda \in M$ . 2.2(4)  $\implies (a^{(k)})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(a^{(k_j)})$  und  $x_0 := \lim_{j \rightarrow \infty} a^{(k_j)} \in A \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in G_{\lambda_0}$ ;  $G_{\lambda_0}$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq G_{\lambda_0}$ .  $a^{(k_j)} \rightarrow x_0 (j \rightarrow \infty) \implies \exists m_0 \in \mathbb{N} : a^{(m_0)} \in U_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$  und  $m_0 \geq \frac{2}{\delta}$ . Sei  $x \in U_{\frac{1}{m_0}}(a^{(m_0)}) \implies \|x - a^{(m_0)}\| = \|x - a^{(m_0)} + a^{(m_0)} - x_0\| \leq \|x - a^{(m_0)}\| + \|a^{(m_0)} - x_0\| \leq \frac{1}{m_0} + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \implies x \in U_\delta(x_0) \implies x \in G_{\lambda_0}$ . Also:  $U_{\frac{1}{m_0}}(a^{(m_0)}) \subseteq G_{\lambda_0}$ , Widerspruch zu (\*\*)!

Teil 2: Sei  $\varepsilon > 0$  wie in Teil 1. (1)  $\implies \exists a^{(1)}, \dots, a^{(m)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_\varepsilon(a^{(j)})$ . Teil 1  $\implies \exists \lambda_j \in M : U_\varepsilon(a^{(j)}) \subseteq G_{\lambda_j} (j = 1, \dots, m) \implies A \subseteq \bigcup_{j=1}^m G_{\lambda_j}$  ■



### 3. Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

**Vereinbarung:** Stets in dem Paragraphen: Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine (**vektorwertige**) Funktion. Für Punkte  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  schreiben wir auch  $(x, y)$ . Für Punkte  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  schreiben wir auch  $(x, y, z)$ . Mit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  hat  $f$  die Form  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ , wobei  $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Kurz:  $f = (f_1, \dots, f_m)$ .

**Beispiele:**

- (1)  $n = 2, m = 3$ .  $f(x, y) = (x + y, xy, xe^y)$ ;  $f_1(x, y) = x + y, f_2(x, y) = xy, f_3(x, y) = xe^y$ .
- (2)  $n = 3, m = 1$ .  $f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$

**Definition**

Sei  $x_0 \in H(D)$ .

- (1) Sei  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 : \iff$  für **jede** Folge  $(x^{(k)})$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x^{(k)} \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x^{(k)}) \rightarrow y_0$ . In diesem Fall schreibt man:  $f(x) \rightarrow y_0 (x \rightarrow x_0)$ .
- (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert :  $\iff \exists y_0 \in \mathbb{R}^m : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .

**Beispiele:**

- (1)  $f(x, y) = (x + y, xy, xe^y)$ ;  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = (2, 1, e)$ , denn: ist  $((x_k, y_k))$  eine Folge mit  $(x, y) \rightarrow (1, 1) \implies (x_k, y_k) \rightarrow (1, 1) \xrightarrow{2.1} x_k \rightarrow 1, y_k \rightarrow 1 \implies x_k + y_k \rightarrow 2, x_k y_k \rightarrow 1, x_k e^{y_k} \rightarrow e \xrightarrow{2.1} (x_k, y_k) \rightarrow (2, 1, e)$ .
- (2)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
 $f(\frac{1}{k}, 0) = 0 \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty), (\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0), f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} (k \rightarrow \infty), (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ , d.h  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existiert nicht! **Aber:**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ .

**Satz 3.1 (Grenzwerte vektorwertiger Funktionen)**

- (1) Ist  $f = (f_1, \dots, f_m)$  und  $y_0 = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ , so gilt:  $f(x) \rightarrow y_0 (x \rightarrow x_0) \iff f_j(x) \rightarrow y_j (x \rightarrow x_0) (j = 1, \dots, m)$
- (2) Die Aussagen des Satzes Ana I, 16.1 und die Aussagen (1) und (2) des Satzes Ana I, 16.2 gelten sinngemäß für Funktionen von mehreren Variablen.

**Beweis**

- (1) folgt aus 2.1
- (2) wie in Ana I ■

**Definition (Stetigkeit vektorwertiger Funktionen)**

- (1) Sei  $x_0 \in D$ .  $f$  heißt **stetig** in  $x_0$  gdw. für jede Folge  $(x^{(k)})$  in  $D$  mit  $(x^{(k)}) \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x^{(k)}) \rightarrow f(x_0)$ . Wie in Ana I: Ist  $x_0 \in D \cap H(D)$ , so gilt:  $f$  ist stetig in  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- (2)  $f$  heißt auf  $D$  stetig gdw.  $f$  in jedem  $x \in D$  stetig ist. In diesem Fall schreibt man:  $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$  ( $C(D) = C(D, \mathbb{R})$ ).
- (3)  $f$  heißt auf  $D$  **gleichmäßig** (glm) stetig gdw. gilt:  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \forall x, y \in D : \|x - y\| < \delta$
- (4)  $f$  heißt auf  $D$  **Lipschitzstetig** gdw. gilt:  
 $\exists L \geq 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in D$ .

**Satz 3.2 (Stetigkeit vektorwertiger Funktionen)**

- (1) Sei  $x_0 \in D$  und  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$  gdw. alle  $f_j$  stetig in  $x_0$  sind. Entsprechendes gilt für „stetig auf  $D$ “, „glm stetig auf  $D$ “, „Lipschitzstetig auf  $D$ “.
- (2) Die Aussagen des Satzes Ana I, 17.1 gelten sinngemäß für Funktionen von mehreren Variablen.
- (3) Sei  $x_0 \in D$ .  $f$  ist stetig in  $x_0$  gdw. zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  existiert mit  $f(U \cap D) \subseteq V$ .
- (4) Sei  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $f(D) \subseteq E$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion,  $f$  stetig in  $x_0 \in D$  und  $g$  stetig in  $f(x_0)$ . Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig in  $x_0$ .

**Beweis**

- (1) folgt aus 2.1
- (2) wie in Ana 1
- (3) Übung
- (4) wie in Ana 1 ■

**Beispiele:**

$$(1) f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (D = \mathbb{R}^2)$$

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0) \implies f \text{ ist in } (0, 0) \text{ nicht stetig.}$$

$$(2) f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{y} \sin(xy), & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Für } y \neq 0 : |f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{1}{|y|} |\sin(xy)| \leq \frac{1}{|y|} |xy| = |x|.$$

Also gilt:  $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x| \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(x, y) \rightarrow f(0, 0) ((x, y) \rightarrow (0, 0)) \implies f$  ist stetig in  $(0, 0)$ .

(3) Sei  $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) = 2$  und  $a \in \mathbb{R}$ .

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\Phi(a(x^2+y^2))}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2}, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist  $f$  stetig in  $(0, 0)$ ?

Fall 1:  $a = 0$

$f(x, y) = 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \implies f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig.

Fall 2:  $a \neq 0$

$r := x^2 + y^2$ .  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff \|(x, y)\| \rightarrow 0 \iff r \rightarrow 0$ , Sei  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Dann gilt:

$$f(x, y) = \frac{\Phi(ar)}{r} = \frac{\Phi(ar) - \Phi(0)}{r - 0} = a \frac{\Phi(ar) - \Phi(0)}{ar - 0} \xrightarrow{r \rightarrow 0} a\Phi'(0) = 2a. \text{ Das heißt: } f(x, y) \rightarrow 2a \text{ ((} (x, y) \rightarrow (0, 0)\text{))}.$$

Daher gilt:  $f$  ist stetig in  $(0, 0) \iff 2a = \frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{4}$ .

### Definition (Beschränktheit einer Funktion)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **beschränkt** (auf  $D$ ) gdw.  $f(D)$  beschränkt ist ( $\iff \exists c \geq 0 : \|f(x)\| \leq c \forall x \in D$ ).

### Satz 3.3 (Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen)

$D$  sei beschränkt und abgeschlossen und es sei  $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$ .

- (1)  $f(D)$  ist beschränkt und abgeschlossen.
- (2)  $f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig.
- (3) Ist  $f$  injektiv auf  $D$ , so gilt:  $f^{-1} \in C(f(D), \mathbb{R}^n)$ .
- (4) Ist  $m = 1$ , so gilt:  $\exists a, b \in D : f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in D$ .

### Beweis

wie in Ana I. ■

### Satz 3.4 (Fortsetzungssatz von Tietze)

Sei  $D$  abgeschlossen und  $f \in C(D, \mathbb{R}) \implies \exists F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : F = f$  auf  $D$ .

### Satz 3.5 (Lineare Funktionen und Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ )

- (1) Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und *linear*, so gilt:  $f$  ist Lipschitzstetig auf  $\mathbb{R}^n$ , insbesondere gilt:  $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .
- (2) Ist  $U$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $U$  abgeschlossen.

**Beweis**

- (1) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es gibt eine  $(m \times n)$ -Matrix  $A$  mit  $f(x) = Ax$ . Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\|f(x) - f(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$
- (2) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es gibt einen UVR  $V$  von  $\mathbb{R}^n$  mit:  $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ . Definiere  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt: zu  $x \in \mathbb{R}^n$  existieren eindeutig bestimmte  $u \in U, v \in V$  mit:  $x = u + v; P(x) := u$ .

Nachrechnen:  $P$  ist linear.

$P(\mathbb{R}^n) = U$  (Kern  $P = V, P^2 = P$ ). Sei  $(u^{(k)})$  eine konvergente Folge in  $U$  und  $x_0 := \lim u^{(k)}$ , z.z.:  $x_0 \in U$ .

Aus (1) folgt:  $P$  ist stetig  $\implies P(u^{(k)}) \rightarrow P(x_0) \implies x_0 = \lim u^{(k)} = \lim P(u^{(k)}) = P(x_0) \in P(\mathbb{R}^n) = U$ . ■

**Definition (Abstand eines Vektor zu einer Menge)**

Sei  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ .  $d(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$  heißt der **Abstand** von  $x$  und  $A$ .

Klar:  $d(a, A) = 0 \forall a \in A$ .

**Satz 3.6 (Eigenschaften des Abstands zwischen Vektor und Menge)**

- (1)  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- (2)  $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$ .

**Beweis**

- (1) Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Sei  $a \in A$ .  $d(x, A) \leq \|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$   
 $\implies d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\| \forall a \in A$   
 $\implies d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$   
 $\implies d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$

Genauso:  $d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\| = \|x - y\| \implies$  Beh.

- (2) „ $\Leftarrow$ “: Sei  $x \in \bar{A} \xrightarrow{2.2} \exists$  Folge  $(a^{(k)})$  in  $A : a^{(k)} \rightarrow x \xrightarrow{(1)} d(a^{(k)}, A) \rightarrow d(x, A) \implies d(x, A) = 0$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $d(x, A) = 0$ .  $\forall k \in \mathbb{N} \exists a^{(k)} \in A : \|a^{(k)} - x\| < \frac{1}{k} \implies a^{(k)} \rightarrow x \xrightarrow{2.2} x \in \bar{A}$ . ■

## 4. Partielle Ableitungen

Stets in diesem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  sei offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion.  $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ . Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$  (fest).

Die Gerade durch  $x_0$  mit der Richtung  $e_j$  ist gegeben durch folgende Menge:  $\{x_0 + te_j : t \in \mathbb{R}\}$ .  $D$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ .  $\|x_0 + te_j - x_0\| = \|te_j\| = |t| \implies x_0 + te_j \in D$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ .  $g(t) := f(x_0 + te_j)$  ( $t \in (-\delta, \delta)$ ) Es ist  $g(t) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)} + t, x_{j+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

### Definition

$f$  heißt in  $x_0$  partiell differenzierbar nach  $x_j : \iff$  es existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t}$$

und ist  $\in \mathbb{R}$ . In diesem Fall heißt obiger Grenzwert die partielle Ableitung von  $f$  in  $x_0$  nach  $x_j$  und man schreibt für diesen Grenzwert:

$$f_{x_j}(x_0) \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

Im Falle  $n = 2$  oder  $n = 3$  schreibt man  $f_x, f_y, f_z$  bzw.  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

### Beispiele:

$$(1) f(x, y, z) = xy + z^2 + e^{x+y}; f_x(x, y, z) = y + e^{x+y} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z). f_x(1, 1, 2) = 1 + e^2.$$

$$f_y(x, y, z) = x + e^{x+y}. f_z(x, y, z) = 2z = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z).$$

$$(2) f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\text{Sei } x \neq 0: f_{x_j}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dots}} 2x_j = \frac{x_j}{\|x\|}$$

Sei  $x = 0$ :  $\frac{f(t, 0, \dots, 0) - f(0, 0, \dots, 0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \implies f$  ist in  $(0, \dots, 0)$  nicht partiell differenzierbar nach  $x_1$ . Analog:  $f$  ist in  $(0, \dots, 0)$  nicht partiell differenzierbar nach  $x_2, \dots, x_n$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ )  $\implies f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar nach  $x$  und  $f_x(0, 0) = 0$ . Analog:  $f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar nach  $y$  und  $f_y(0, 0) = 0$ . Aber:  $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig.

### Definition

(1)  $f$  heißt in  $x_0$  partiell differenzierbar :  $\iff f$  ist in  $x_0$  partiell differenzierbar nach allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$ . In diesem Fall heißt  $\text{grad } f(x_0) := \nabla f(x_0) := (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$  der Gradient von  $f$  in  $x_0$ .

#### 4. Partielle Ableitungen

- (2)  $f$  ist auf  $D$  partiell differenzierbar nach  $x_j$  oder  $f_{x_j}$  ist auf  $D$  vorhanden :  $\iff f$  ist in jedem  $x \in D$  partiell differenzierbar nach  $x_j$ . In diesem Fall wird durch  $x \mapsto f_{x_j}(x)$  eine Funktion  $f_{x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert die partielle Ableitung von  $f$  auf  $D$  nach  $x_j$ .
- (3)  $f$  heißt partiell differenzierbar auf  $D$  :  $\iff f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  sind auf  $D$  vorhanden.
- (4)  $f$  heißt auf  $D$  stetig partiell differenzierbar :  $\iff f$  ist auf  $D$  partiell differenzierbar und  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  sind auf  $D$  stetig. In diesem Fall schreibt man  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ .

#### Beispiele:

- (1) Sei  $f$  wie in obigem Beispiel (3).  $f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar und  $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$
- (2) Sei  $f$  wie in obigem Beispiel (2).  $f$  ist auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  partiell differenzierbar und  $\text{grad } f(x) = \left( \frac{x_1}{\|x\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|} \right) = \frac{1}{\|x\|} x$  ( $x \neq 0$ )

#### Definition

Seien  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  und  $f_{x_j}$  sei auf  $D$  vorhanden. Ist  $f_{x_j}$  in  $x_0 \in D$  partiell differenzierbar nach  $x_k$ , so heißt

$$f_{x_j x_k}(x_0) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) := (f_{x_j})_{x_k}(x_0)$$

die partielle Ableitung zweiter Ordnung von  $f$  in  $x_0$  nach  $x_j$  und  $x_k$ . Ist  $k = j$ , so schreibt man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x_0)$$

Entsprechend definiert man partielle Ableitungen höherer Ordnung (soweit vorhanden).

**Schreibweisen:**  $f_{xxyz} = \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}$ , vergleiche:  $\frac{\partial^{180} f}{\partial x^{179} \partial y}$

#### Beispiele:

- (1)  $f(x, y) = xy + y^2$ ,  $f_x(x, y) = y$ ,  $f_{xx} = 0$ ,  $f_y = x + 2y$ ,  $f_{yy} = 2$ ,  $f_{xy} = 1$ ,  $f_{yx} = 1$ .
- (2)  $f(x, y, z) = xy + z^2 e^x$ ,  $f_x = y + z^2 e^x$ ,  $f_{xy} = 1$ ,  $f_{xyz} = 0$ .  $f_z = 2z e^x$ ,  $f_{zy} = 0$ ,  $f_{zyx} = 0$ .
- (3)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Übungsblatt:  $f_{xy}(0, 0)$ ,  $f_{yx}(0, 0)$  existieren, aber  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

#### Definition

Sei  $m \in \mathbb{N}$ .  $f$  heißt auf  $D$   $m$ -mal stetig partiell differenzierbar :  $\iff$  alle partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq m$  sind auf  $D$  vorhanden und auf  $D$  stetig. In diesem Fall schreibt man:  $f \in C^m(D, \mathbb{R})$

$$C^0(D, \mathbb{R}) := C(D, \mathbb{R}), \quad C^\infty(D, \mathbb{R}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D, \mathbb{R})$$

#### Satz 4.1 (Satz von Schwarz)

Es sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in D$  und  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Dann:  $f_{x_j x_k}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0)$

**Satz 4.2 (Folgerung)**

Ist  $f \in C^m(D, \mathbb{R})$ , so sind die partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq m$  unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

**Beweis**

O.B.d.A:  $n = 2$  und  $x_0 = (0, 0)$ . Zu zeigen:  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ .  $D$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(0, 0) \subseteq D$ . Sei  $(x, y) \in U_\delta(0, 0)$  und  $x \neq 0 \neq y$ .

$$\nabla := f(x, y) - f(x, 0) - (f(0, y) - f(0, 0)), \quad \varphi(t) := f(t, y) - f(t, 0)$$

für  $t$  zwischen 0 und  $x$ .  $\varphi$  ist differenzierbar und  $\varphi'(t) = f_x(t, y) - f_x(t, 0)$ .  $\varphi(x) - \varphi(0) = \nabla$ . MWS, Analysis 1  $\implies \exists \xi = \xi(x, y)$  zwischen 0 und  $x$ :  $\nabla = x\varphi'(\xi) = x(f_x(\xi, y) - f_x(\xi, 0))$ .  $g(s) := f_x(\xi, s)$  für  $s$  zwischen 0 und  $y$ ;  $g$  ist differenzierbar und  $g'(s) = f_{xy}(\xi, s)$ . Es ist  $\nabla = x(g(y) - g(0)) \stackrel{\text{MWS}}{=} xyg'(\eta)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  zwischen 0 und  $y$ .  $\implies \nabla = xyf_{xy}(\xi, \eta)$ . (1)

$\psi(t) := f(x, t) - f(0, t)$ ,  $t$  zwischen 0 und  $y$ .  $\psi'(t) = f_y(x, t) - f_y(0, t)$ .  $\nabla = \psi(y) - \psi(0)$ . Analog:  $\exists \bar{\eta} = \bar{\eta}(x, y)$  und  $\bar{\xi} = \bar{\xi}(x, y)$ ,  $\bar{\eta}$  zwischen 0 und  $y$ ,  $\bar{\xi}$  zwischen 0 und  $x$ .  $\nabla = xyf_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ . (2)

Aus (1), (2) und  $xy \neq 0$  folgt  $f_{xy}(\xi, \eta) = f_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ .  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \implies \xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta} \rightarrow 0 \xrightarrow{f \in C^2} f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$  ■



# 5. Differentiation

**Vereinbarung:** Stets in dem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion, also  $f = (f_1, \dots, f_m)$

**Definition**

- (1) Sei  $k \in \mathbb{N}$ .  $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m) : \iff f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$  ( $j = 1, \dots, m$ )
- (2) Sei  $x_0 \in D$ .  $f$  heißt partiell differenzierbar in  $x_0 : \iff$  jedes  $f_j$  ist in  $x_0$  partiell differenzierbar. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** von  $f$  in  $x_0$ .

**Beachte:** (1)  $J_f(x_0)$  ist eine  $(m \times n)$ -Matrix, (2) Ist  $m = 1 \implies J_f(x_0) = \text{grad } f(x_0)$

**Erinnerung:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0 \in I$ .  $\varphi$  ist in  $x_0$  differenzierbar

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{ANA}^1}{\iff} \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = a \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{h} = 0 \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{|h|} = 0 \end{aligned}$$

**Definition**

- (1) Sei  $x_0 \in D$ .  $f$  heißt **differenzierbar** (db) in  $x_0 : \iff \exists(m \times n)$ -Matrix  $A : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0$  (\*)
- (2)  $f$  heißt differenzierbar auf  $D : \iff f$  ist in jedem  $x \in D$  differenzierbar.

**Bemerkungen:**

- (i)  $f$  ist differenzierbar in  $x_0 \iff \exists(m \times n)$ -Matrix  $A$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

- (ii) Ist  $m = 1$ , so gilt:  $f$  ist differenzierbar in  $x_0$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{\|h\|} = 0 (**)$$

(iii) Aus 2.1 folgt:  $f$  ist differenzierbar in  $x_0 \iff$  jedes  $f_j$  ist differenzierbar in  $x_0$ .

**Satz 5.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)**

$f$  sei in  $x_0 \in D$  differenzierbar

- (1)  $f$  ist in  $x_0$  stetig
- (2)  $f$  ist in  $x_0$  partiell differenzierbar und die Matrix  $A$  in (\*) ist eindeutig bestimmt:  
 $A = J_f(x_0)$ .  $f'(x_0) := A = J_f(x_0)$  (**Ableitung** von  $f$  in  $x_0$ ).

**Beweis**

Sei  $A$  wie in (\*),  $A = (a_{jk})$ ,  $\varrho(h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|}$ , also:  $\varrho(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ). Sei  $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$ . 2.1  $\implies \varrho_j(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) ( $j = 1, \dots, m$ )

$$(1) f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{Ah}_{\xrightarrow{3.5} 0} + \underbrace{\|h\|\varrho(h)}_{\rightarrow 0 \text{ (} h \rightarrow 0 \text{)}} \rightarrow f(x_0) \text{ (} h \rightarrow 0 \text{)}$$

- (2) Sei  $j \in \{1, \dots, m\}$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Zu zeigen:  $f_j$  ist partiell differenzierbar und  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$ .  $\varrho_j(h) = \frac{1}{\|h\|}(f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \cdot h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ). Für  $t \in \mathbb{R}$  sei  $h = te_k \implies \varrho_j(h) = \frac{1}{|t|}(f_j(x_0 + te_k) - a_{jk}t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ )  $\implies \left| \frac{f_j(x_0 + te_k) - f_j(x_0)}{t} - a_{jk} \right| \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ )  $\implies f_j$  ist in  $x_0$  partiell differenzierbar und  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$ . ■

**Beispiele:**

(1)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bekannt:  $f$  ist in  $(0, 0)$  **nicht** stetig, aber partiell differenzierbar und  $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$   
 5.1  $\implies f$  ist in  $(0, 0)$  **nicht** differenzierbar.

(2)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$ :  $|f(x, y)| = (x^2 + y^2) \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq x^2 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$   $f$  ist in  $(0, 0)$  stetig.  $\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t} t^2 \sin \frac{1}{|t|} = t \sin \frac{1}{|t|} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ )  $\implies f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar nach  $x$  und  $f_x(0, 0) = 0$ . Analog:  $f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar nach  $y$  und  $f_y(0, 0) = 0$ .  $\varrho(h) = \frac{1}{\|h\|} f(h) \stackrel{h=(h_1, h_2)}{=} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} (h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{beschränkt}} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ )  $\implies f$  ist differenzierbar in  $(0, 0)$  und  $f'(0, 0) = \text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$

(3)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Übung:  $f$  ist in  $(0, 0)$  stetig.

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^3}{t^2} = 1 \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0). \quad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

$\implies f$  ist in  $(0, 0)$  partiell db und  $\text{grad } f(0, 0) = (1, 0)$ .

$$\text{Für } h = (h_1, h_2) \neq (0, 0) : \rho(h) = \frac{1}{\|h\|} (f(h) - f(0, 0) - \text{grad } f(0, 0) \cdot h) = \frac{1}{\|h\|} \left( \frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1 \right) = \frac{1}{\|h\|} \frac{-h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \frac{-h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}.$$

Für  $h_2 = h_1 > 0 : \rho(h) = \frac{-h_1^3}{(\sqrt{2})^3 h_1^3} = -\frac{1}{(\sqrt{2})^3} \implies \rho(h) \not\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \implies f$  ist in  $(0, 0)$  nicht db.

**Satz 5.2 (Stetigkeit aller partiellen Ableitungen)**

Sei  $x_0 \in D$  und alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$  seien auf  $D$  vorhanden und in  $x_0$  stetig ( $j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$ ). Dann ist  $f$  in  $x_0$  db.

**Beweis**

O.B.d.A:  $m = 1$  und  $x_0 = 0$ . Der Übersicht wegen sei  $n = 2$ .

Für  $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0) :$

$$\rho(h) := \frac{1}{\|h\|} (f(h) - f(0, 0) - \underbrace{(h_1 f_x(0, 0) + h_2 f_y(0, 0))}_{=\text{grad } f(0,0) \cdot h})$$

$$f(h) - f(0) = f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \underbrace{f(h_1, h_2) - f(0, h_2)}_{=:\Delta_1} + \underbrace{f(0, h_2) - f(0, 0)}_{=:\Delta_2}$$

$$\varphi(t) := f(t, h_2), \quad t \text{ zwischen } 0 \text{ und } h_1 \implies \Delta_1 = \varphi(h_1) - \varphi(0), \quad \varphi'(t) = f_x(t, h_2)$$

Aus dem Mittelwertsatz aus Analysis I folgt:  $\exists \xi = \xi(h)$  zw. 0 und  $h_1 : \Delta_1 = h_1 \varphi(\xi) = h_1 f_x(\xi, h_2)$   
 $\exists \eta = \eta(h)$  zw. 0 und  $h_2 : \Delta_2 = h_2 \varphi(\eta) = h_2 f_y(\eta, h_2)$

$$\implies \rho(h) := \frac{1}{\|h\|} (h_1 f_x(\xi, h_2) - h_2 f_y(0, \eta) - (h_1 f_x(0, 0) + h_2 f_y(0, 0))) \\ = \frac{1}{\|h\|} h \underbrace{(f_x(\xi, h_2) - f_x(0, 0), f_y(0, \eta) - f_y(0, 0))}_{=:v(h)} = \frac{1}{\|h\|} h \cdot v(h)$$

$$\implies |\rho(h)| = \frac{1}{\|h\|} |h \cdot v(h)| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{\|h\|} \|h\| \|v(h)\| = \|v(h)\|$$

$f_x, f_y$  sind stetig in  $(0, 0) \implies v(h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \implies \rho(h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$  ■

**Folgerung 5.3**

Ist  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) \implies f$  ist auf  $D$  db.

**Definition**

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$ . Dann heißt  $f$  auf  $D$   $k$ -mal stetig db.

**Beispiele:**

$$(1) f(x, y, z) = (x^2 + y, xyz). J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$$

$$\stackrel{5.3}{\implies} f \text{ ist auf } \mathbb{R}^3 \text{ db und } f'(x, y, z) = J_f(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$(2) \text{ Sei } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ linear, es ex. also eine } (m \times n)\text{-Matrix } A : f(x) = Ax \text{ (} x \in \mathbb{R}^n \text{).}$$

Für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt:

$$\rho(h) = \frac{1}{\|h\|} (f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah) = \frac{1}{\|h\|} (f(x_0) + f(h) - f(x_0) - f(h)) = 0.$$

Also:  $f$  ist auf  $\mathbb{R}^n$  db und  $f'(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Insbesondere ist  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

$$(2.1) \quad n = m \text{ und } f(x) = x = Ix \text{ (} I = (m \times n)\text{-Einheitsmatrix). Dann: } f'(x) = I \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$(2.2) \quad m = 1 : \exists a \in \mathbb{R}^n : f(x) = ax \text{ (} x \in \mathbb{R}^n \text{) (Linearform). } f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(3)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bekannt:  $f$  ist in  $(0, 0)$  db. Übungsblatt:  $f_x, f_y$  sind in  $(0, 0)$  nicht stetig.

$$(4) \text{ Sei } I \subseteq \mathbb{R} \text{ ein Intervall und } g = (g_1, \dots, g_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad g_1, \dots, g_m : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

$g$  ist in  $t_0 \in I$  db  $\iff g_1, \dots, g_m$  sind in  $t_0 \in I$  db. In diesem Fall gilt:  $g'(t_0) = (g'_1(t_0), \dots, g'_m(t_0))$ .

$$(4.1) \quad m = 2 : g(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad g'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

$$(4.2) \text{ Seien } a, b \in \mathbb{R}^m, \quad g(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1], \quad g'(t) = b - a.$$

**Satz 5.4 (Kettenregel)**

$f$  sei in  $x_0 \in D$  db,  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $E$  sei offen,  $f(D) \subseteq E$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^p$  sei db in  $y_0 := f(x_0)$ . Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  db in  $x_0$  und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \text{ (Matrizenprodukt)}$$

**Beweis**

$A := f'(x_0)$ ,  $B := g'(y_0) = g'(f(x_0))$ ,  $h := g \circ f$ .

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0) - B(y - y_0)}{\|y - y_0\|} & , \text{ falls } y \in E \setminus \{y_0\} \\ 0 & , \text{ falls } y = y_0 \end{cases}$$

$g$  ist db in  $y_0 \implies \tilde{g}(y) \rightarrow 0 \text{ (} y \rightarrow y_0 \text{)}$ . Aus Satz 5.1 folgt, dass  $f$  stetig ist in  $x_0 \implies f(x) \rightarrow f(x_0) = y_0 \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)} \implies \tilde{g}(f(x)) \rightarrow 0 \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)}$

Es ist  $g(y) - g(y_0) = \|y - y_0\| \tilde{g}(y) = B(y - y_0) \forall y \in E$ .

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0)}{\|x - x_0\|} &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (g(f(x)) - g(f(x_0)) - BA(x - x_0)) \\ &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (\|f(x) - f(x_0)\| \tilde{g}(f(x)) + B(f(x) - f(x_0)) - BA(x - x_0)) \\ &= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{=: D(x)} \underbrace{\tilde{g}(f(x))}_{\rightarrow 0} + \underbrace{B \left( \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \right)}_{\substack{f \xrightarrow{\text{db}} 0 \\ (x \rightarrow x_0)} \\ \stackrel{3.5}{\rightarrow} 0 \ (x \rightarrow x_0)} \end{aligned}$$

Noch zu zeigen:  $D(x)$  bleibt in der „Nähe“ von  $x_0$  beschränkt.

$$\begin{aligned} 0 \leq D(x) &= \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) + A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\rightarrow 0 \ (x \rightarrow x_0)} + \underbrace{\frac{\|A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\leq \|A\|}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Wichtigster Fall**  $g = g(x_1, \dots, x_m)$  reellwertig,  $h(x) = h(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ .

$$h_{x_j}(x) = g_{x_1}(f(x)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + g_{x_2}(f(x)) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) + \dots + g_{x_m}(f(x)) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)$$

### Beispiel

$$g = g(x, y, z), \quad h(x, y) = g(xy, x^2 + y, x \sin y) = g(f(x, y)).$$

$$h_x(x, y) = g_x(f(x, y))y + g_y(f(x, y))2x + g_z(f(x, y)) \sin y.$$

$$h_y(x, y) = g_x(f(x, y))x + g_y(f(x, y))1 + g_z(f(x, y))x \cos y.$$

### Hilfssatz

Es sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix (reell), es sei  $B$  eine  $(n \times n)$ -Matrix (reell) und es gelte

(i)  $BA = I (= (n \times n)\text{-Einheitsmatrix})$  und

(ii)  $AB = \tilde{I} (= (m \times m)\text{-Einheitsmatrix})$

Dann:  $m = n$ .

### Beweis

$\Phi(x) := Ax (x \in \mathbb{R}^n)$ . Lin. Alg.  $\implies \Phi$  ist linear,  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $\stackrel{(i)}{\implies} \Phi$  ist injektiv, also  $\text{Kern} \Phi = 0$ . (ii) Sei  $z \in \mathbb{R}^m, x := Bz \stackrel{(ii)}{\implies} z = ABz = Ax = \Phi(x) \implies \Phi$  ist surjektiv. Dann:  $n = \dim \mathbb{R}^n \stackrel{\text{LA}}{=} \dim \text{Kern} \Phi + \dim \Phi(\mathbb{R}^n) = m$ .  $\blacksquare$

### Satz 5.5 (Injektivität und Dimensionsgleichheit)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei db auf  $D$ , es sei  $f(D)$  offen,  $f$  injektiv auf  $D$  und  $f^{-1} : f(D) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei db auf  $f(D)$ . Dann:

(1)  $m = n$

$$(2) \forall x \in D : f'(x) \text{ ist eine invertierbare Matrix und } f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$$

**Beachte:**

- (1) Ist  $D$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  db, so muss i. A.  $f(D)$  nicht offen sein. Z.B.:  $f(x) = \sin x, D = \mathbb{R}, f(D) = [-1, 1]$
- (2) Ist  $D$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  db und injektiv, so muss i.A.  $f^{-1}$  nicht db sein. Z.B.:  $f(x) = x^3, D = \mathbb{R}, f^{-1}$  ist in 0 nicht db.

**Beweis**

von 5.5:  $g := f^{-1}; x_0 \in D, z_0 := f(x_0) (\implies x_0 = g(z_0))$  Es gilt:  $g(f(x)) = x \forall x \in D, f(g(z)) = z \forall z \in f(D) \xrightarrow{5.4} g'(f(x)) \cdot f'(x) = I \forall x \in D; f'(g(z)) \cdot g'(z) = \tilde{I} \forall z \in f(D) \implies \underbrace{g'(z_0)}_{=:B} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=:A} = I, f'(x_0) \cdot g'(z_0) = \tilde{I} \xrightarrow{5.5} m = n \text{ und } f'(x_0)^{-1} = g'(z_0) = (f^{-1})'(f(x_0)).$  ■

## 6. Differenzierbarkeitseigenschaften reellwertiger Funktionen

### Definition

- (1) Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ;  $S[a, b] := \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$  heißt **Verbindungsstrecke** von  $a$  und  $b$
- (2)  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konvex** :  $\iff$  aus  $a, b \in M$  folgt stets:  $S[a, b] \subseteq M$
- (3) Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ .  $S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] := \bigcup_{j=1}^k S[x^{(j-1)}, x^{(j)}]$  heißt Streckenzug durch  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$  (in dieser Reihenfolge!)
- (4) Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $G$  heißt **Gebiet**:  $\iff G$  ist offen und aus  $a, b \in G$  folgt:  $\exists x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in G : x^{(0)} = a, x^{(k)} = b$  und  $S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] \subseteq G$ .

**Vereinbarung:** Ab jetzt in diesem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

### Satz 6.1 (Der Mittelwertsatz)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar auf  $D$ , es seien  $a, b \in D$  und  $S[a, b] \subseteq D$ . Dann:

$$\exists \xi \in S[a, b] : f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

### Beweis

Sei  $g(t) := a + t \cdot (b - a)$  für  $t \in [0, 1]$ .  $g([0, 1]) = S[a, b] \subseteq D$ .  $\Phi(t) := f(g(t))$  ( $t \in [0, 1]$ ) 5.4  $\implies \Phi$  ist differenzierbar auf  $[0, 1]$  und  $\Phi'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$ .  
 $f(b) - f(a) = \Phi(1) - \Phi(0) \stackrel{!}{=} \underset{=:S}{MWS, AI} \Phi'(\eta) = f'(a + \eta(b - a)) \cdot (b - a), \eta \in [0, 1]$  ■

### Folgerungen 6.2

Sei  $D$  ein **Gebiet** und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar auf  $D$ .

- (1) Ist  $f'(x) = 0 \forall x \in D \implies f$  ist auf  $D$  konstant.
- (2) Ist  $f'(x) = g'(x) \forall x \in D \implies \exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$  auf  $D$ .

### Beweis

(2) folgt aus (1). (1) Seien  $a, b \in D$ . Z.z.:  $f(a) = f(b)$ .  $\exists x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in D, x^{(0)} = a, x^{(k)} = b : S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] \subseteq D \forall j \in \{1, \dots, k\}$  ex. nach 6.1 ein  $\xi_j \in S[x^{(j-1)}, x^{(j)}] : f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) = \underbrace{f'(\xi_j)}_0 \cdot (x^{(j)} - x^{(j-1)}) = 0 \implies f(x^{(j)}) = f(x^{(j-1)}) \implies f(a) = f(x^{(0)}) = f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = \dots = f(x^{(k)}) = f(b)$ . ■

**Satz 6.3 (Bedingung für Lipschitzstetigkeit)**

$D$  sei konvex und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar auf  $D$ . Weiter sei  $f'$  auf  $D$  beschränkt. Dann ist  $f$  auf  $D$  Lipschitzstetig.

**Beweis**

$\exists L \geq 0 : \|f'(x)\| \leq L \forall x \in D$ . Seien  $u, v \in D$ .  $D$  konvex  $\implies S[u, v] \subseteq D$ . 6.1  $\implies \exists \xi \in S[u, v] : f(u) - f(v) = f'(\xi) \cdot (u - v) \implies |f(u) - f(v)| = |f'(\xi) \cdot (u - v)| \stackrel{CSU}{\leq} \|f'(\xi)\| \|u - v\| \leq L \|u - v\|$ . ■

**Satz 6.4 (Linearität)**

Sei  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion.

$\Phi$  ist linear  $\iff \Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  und  $\Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Beweis**

“ $\implies$ ”: “ $\Leftarrow$ ”: O.B.d.A.:  $m = 1$ . Z.z.:  $\exists a \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = a \cdot x \forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $a := \Phi'(0)\Phi(0) = \Phi(2 \cdot 0) = 2 \cdot \Phi(0) \implies \Phi(0) = 0$ .  $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R} : \Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x) \stackrel{5.4}{\implies} \alpha \Phi'(\alpha x) = \alpha \Phi'(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \Phi'(x) = \Phi'(\alpha x) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \neq 0$ .  $\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0, f \in C^1} \Phi'(x) = \Phi'(0) = a \forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $g(x) := (\Phi(x) - ax)^2$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ),  $g(0) = (\Phi(0) - a \cdot 0)^2 = 0$ . 5.4  $\implies g$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}^n$  und  $g'(x) = 2(\Phi(x) - ax)(\Phi'(x) - a) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ . 6.2(1)  $\implies g(x) = g(0) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \implies \Phi(x) = a \cdot x \forall x \in \mathbb{R}^n$ . ■

**Die Richtungsableitung** Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Ist  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $\|a\| = 1$ , so heißt  $a$  eine **Richtung** (oder ein **Richtungsvektor**).

Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  eine Richtung.  $D$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ . Gerade durch  $x_0$  mit Richtung  $a : \{x_0 + ta : t \in \mathbb{R}\}$ .  $\|x_0 + ta - x_0\| = \|ta\| = |t|$ . Also:  $x_0 + ta \in D$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $g(t) := f(x_0 + ta)$  ( $t \in (-\delta, \delta)$ ).

$f$  heißt **in  $x_0$  in Richtung  $a$  db**, gdw. der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

existiert und  $\in \mathbb{R}$  ist. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

die **Richtungsableitung von  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $a$** .

**Beispiele:**

- (1)  $f$  ist in  $x_0$  partiell db nach  $x_j \iff f$  ist in  $x_0$  db in Richtung  $e_j$ . In diesem Fall gilt:  

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0).$$

(2)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$x_0 = (0, 0)$ . Sei  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  eine Richtung, also  $a_1^2 + a_2^2 = 1$ ;  $\frac{f(ta) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^2 a_1 a_2}{t^2 a_1^2 + t^2 a_2^2} = \frac{a_1 a_2}{t}$ . D.h.:  $\frac{\partial f}{\partial a}(0, 0)$  ex.  $\iff a_1 a_2 = 0 \iff a \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ .

In diesem Fall:  $\frac{\partial f}{\partial a}(0, 0) = 0$ .

(3)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$x_0 = (0, 0)$ . Sei  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$  eine Richtung.  $\frac{f(ta) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^3 a_1 a_2^2}{t^2 a_1^2 + t^4 a_2^4} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + t^2 a_2^4} \xrightarrow{t \rightarrow 0}$

$$\begin{cases} 0 & , \text{ falls } a_1 = 0 \\ \frac{a_2^2}{a_1} & , \text{ falls } a_1 \neq 0 \end{cases}$$

D.h.  $\frac{\partial f}{\partial a}(0, 0)$  existiert für *jede* Richtung  $a \in \mathbb{R}^2$ . Z.B.:  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) : \frac{\partial f}{\partial a}(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \forall x > 0 \implies f$  ist in  $(0, 0)$  *nicht* stetig.

### Satz 6.5 (Richtungsableitungen)

Sei  $x_0 \in D$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  eine Richtung,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

(1)  $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$  existiert  $\iff \frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0)$  existiert. In diesem Fall ist:

$$\frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$$

(2)  $f$  sei in  $x_0$  db. Dann:

(i)  $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$  existiert und

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \text{grad } f(x_0).$$

(ii) Sei  $\text{grad } f(x_0) \neq 0$  und  $a_0 := \|\text{grad } f(x_0)\|^{-1} \cdot \text{grad } f(x_0)$ . Dann:

$$\frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \|\text{grad } f(x_0)\|.$$

Weiter gilt:  $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$ , falls  $a \neq a_0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ , falls  $a \neq -a_0$ .

### Beweis

(1)  $\frac{f(x_0+t(-a))-f(x_0)}{t} = -\frac{f(x_0+(-t)a)-f(x_0)}{-t} \implies$  Beh.

(2) (i)  $g(t) := f(x_0 + ta)$  ( $|t|$  hinreichend klein). Aus Satz 5.4 folgt:  $g$  ist db in  $t = 0$  und  $g'(0) = f'(x_0) \cdot a \implies \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$  existiert und ist  $= g'(0) = \text{grad } f(x_0) \cdot a$

## 6. Differenzierbarkeitseigenschaften reellwertiger Funktionen

$$(ii) \left| \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \right| \stackrel{(i)}{=} |a \cdot \text{grad } f(x_0)| \stackrel{CSU}{\leq} \|a\| \cdot \|\text{grad } f(x_0)\| = \|\text{grad } f(x_0)\| = \frac{1}{\|\text{grad } f(x_0)\|} \text{grad } f(x_0) \cdot \text{grad } f(x_0) = a_0 \cdot \text{grad } f(x_0) \stackrel{(i)}{=} \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) \stackrel{(1)}{=} -\frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \|\text{grad } f(x_0)\|$$

$$\text{Sei } \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \stackrel{(i),(ii)}{\implies} a \cdot \text{grad } f(x_0) = \|\text{grad } f(x_0)\| \implies a \cdot a_0 = 1 \implies \|a - a_0\|^2 = (a - a_0)(a - a_0) = a \cdot a - 2a \cdot a_0 + a_0 \cdot a_0 = 1 - 2 + 1 = 0 \implies a = a_0. \blacksquare$$

**Der Satz von Taylor** Im Folgenden sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zunächst „genügend oft partiell db“,  $x_0 \in D$  und  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ . Wir führen folgenden Formalismus ein.

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \text{ („Nabla“); } \nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad } f; \nabla f(x_0) := \text{grad } f(x_0)$$

$$(h \cdot \nabla) := h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}; (h \cdot \nabla) f := h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = h \cdot \text{grad } f; (h \cdot \nabla) f(x_0) := h \cdot \text{grad } f(x_0)$$

$$(h \cdot \nabla)^{(0)} f(x_0) := f(x_0). \text{ Für } k \in \mathbb{N} : (h \cdot \nabla)^{(k)} := \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k$$

$$(h \cdot \nabla)^{(2)} f(x_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$$

$$(h \cdot \nabla)^{(3)} f(x_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n h_j h_k h_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x_0)$$

### Beispiel

$$(n = 2) : h = (h_1, h_2).$$

$$(h \cdot \nabla)^{(0)} f(x_0) = f(x_0), (h \cdot \nabla)^{(1)} f(x_0) = h \cdot \text{grad } f(x_0) = h_1 f_x(x_0) + h_2 f_y(x_0).$$

$$(h \cdot \nabla)^{(2)} f(x_0) = \left( h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (x_0) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) + h_2 h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0).$$

### Satz 6.6 (Der Satz von Taylor)

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in D$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  und  $S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$ . Dann:

$$f(x_0 + h) = \sum_{j=0}^k \frac{(h \cdot \nabla)^{(j)} f(x_0)}{j!} + \frac{(h \cdot \nabla)^{(k+1)} f(\xi)}{(k+1)!}$$

wobei  $\xi \in S[x_0, x_0 + h]$

### Beweis

$\Phi(t) := f(x_0 + th)$  für  $t \in [0, 1]$ . 5.4  $\implies \Phi \in C^{k+1}[0, 1]$ ,  $\Phi'(t) = f'(x_0 + th) * h = (h * \nabla) f(x_0 + th)$

Induktiv:  $\Phi^{(j)}(t) = (h \cdot \nabla)^{(j)} f(x_0 + th)$  ( $j = 0, \dots, k+1, t \in [0, 1]$ ).  $\Phi(0) = f(x_0)$ ,  $\Phi(1) = f(x_0 + h)$

$$h); \Phi^{(j)}(0) = (h \cdot \nabla)^{(j)} f(x_0). \text{ Analysis 1 (22.2)} \implies \Phi(1) = \sum_{j=0}^k \frac{\Phi^{(j)}(0) f(x_0)}{j!} + \frac{\Phi^{(k+1)} f(\eta)}{(k+1)!},$$

wobei  $\eta \in [0, 1] \implies f(x_0 + h) = \sum_{j=1}^k \frac{(h \cdot \nabla)^{(j)} f(x_0)}{j!} + \frac{(h \cdot \nabla)^{(k+1)} f(x_0 + \eta h)}{(k+1)!}, \xi := x_0 + \eta h \blacksquare$

**Spezialfall 6.7** Sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R}), x_0 \in D, h \in \mathbb{R}^n, S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$ . Dann:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0 + \eta h)$$



## 7. Quadratische Formen

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen sei  $A$  stets eine reelle und symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix, ( $A = A^T$ ). Also:  $A = (a_{jk})$ , dann  $a_{jk} = a_{kj}$  ( $k, j = 1, \dots, n$ )

### Definition

$Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $Q_A(x) := x(Ax^T)$ .  $Q_A$  heißt die zu  $A$  gehörende **quadratische Form**. Für  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$Q_A(x) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k$$

### Beispiel

Sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in D$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$ .

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x_0) \\ f_{x_2 x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_2 x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt die **Hesse-Matrix** von  $f$  in  $x_0$ . 4.1  $\implies$   $H_f(x_0)$  ist symmetrisch. Aus 6.7 folgt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} Q_B(h) \text{ mit } B = H_f(x_0 + \eta h)$$

### Definition

- $A$  heißt **positiv definit** (pd) :  $\iff Q_A(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   
 $A$  heißt **negativ definit** (nd) :  $\iff Q_A(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   
 $A$  heißt **indefinit** (id) :  $\iff \exists u, v \in \mathbb{R}^n : Q_A(u) > 0, Q_A(v) < 0$

### Beispiele:

- (1) ( $n = 2$ ),  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$   
 $Q_A(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2$  ( $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ). Nachrechnen:

$$aQa(x, y) = (ax + by)^2 + (\det A)y^2 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Übung:

- $A$  ist positiv definit  $\iff a > 0, \det A > 0$   
 $A$  ist negativ definit  $\iff a < 0, \det A > 0$   
 $A$  ist indefinit  $\iff \det A < 0$

- (2) ( $n = 3$ ),  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $Q_A(x, y, z) = (x + z)^2 \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .  $Q_A(0, 1, 0) = 0$ .  $A$  ist weder pd, noch id, noch nd.

## 7. Quadratische Formen

- (3) ohne Beweis ( $\rightarrow$  Lineare Algebra).  $A$  symmetrisch  $\implies$  alle **Eigenwerte** (EW) von  $A$  sind  $\in \mathbb{R}$ .
- $A$  ist positiv definit  $\iff$  Alle Eigenwerte von  $A$  sind  $> 0$
- $A$  ist negativ definit  $\iff$  Alle Eigenwerte von  $A$  sind  $< 0$
- $A$  ist indefinit  $\iff \exists$  Eigenwerte  $\lambda, \mu$  von  $A$  mit  $\lambda > 0, \mu < 0$

### Satz 7.1 (Regeln zu definiten Matrizen und quadratischen Formen)

- (1)  $A$  ist positiv definit  $\iff -A$  ist negativ definit
- (2)  $Q_A(\alpha x) = \alpha^2 Q_A(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (3)  $A$  ist positiv definit  $\iff \exists c > 0 : Q_A(x) \geq c \|x\|^2 \forall x \in \mathbb{R}^n$   
 $A$  ist negativ definit  $\iff \exists c > 0 : Q_A(x) \leq -c \|x\|^2 \forall x \in \mathbb{R}^n$

### Beweis

- (1) Klar
- (2)  $Q_A(\alpha x) = (\alpha x)(A(\alpha x)) = \alpha^2 x(Ax) = \alpha^2 Q_A(x)$
- (3) „ $\Leftarrow$ “: Klar. „ $\Rightarrow$ “:  $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial U_1(0)$  ist beschränkt und abgeschlossen.  $Q_A$  ist stetig auf  $K$ . 3.3  $\implies \exists x_0 \in K : Q_A(x_0) \leq Q_A(x) \forall x \in K$ .  $c := Q_A(x_0)$ .  $A$  positiv definit,  $x_0 \neq 0 \implies Q_A(x_0) = c > 0$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ;  $z := \frac{1}{\|x\|}x \implies z \in K \implies Q_A(z) \geq c \implies c \leq Q_A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\|x\|^2} Q_A(x) \implies Q_A(x) \geq c \|x\|^2$  ■

### Satz 7.2 (Störung von definiten Matrizen)

- (1)  $A$  sei positiv definit (*negativ definit*). Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit: Ist  $B = (b_{jk})$  eine weitere symmetrische ( $n \times n$ )-Matrix und gilt: (\*)  $|a_{jk} - b_{jk}| \leq \varepsilon$  ( $j, k = 1, \dots, n$ ), so ist  $B$  positiv definit (*negativ definit*).
- (2)  $A$  sei indefinit. Dann existieren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$  mit: ist  $B = (b_{jk})$  eine weitere symmetrische ( $n \times n$ )-Matrix und gilt: (\*)  $|a_{jk} - b_{jk}| \leq \varepsilon$  ( $j, k = 1, \dots, n$ ), so ist  $Q_B(u) > 0, Q_B(v) < 0$ . Insbesondere:  $B$  ist indefinit.

### Beweis

- (1)  $A$  sei positiv definit  $\stackrel{7.1}{\implies} \exists c > 0 : Q_A(x) \geq c \|x\|^2 \forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $\varepsilon := \frac{c}{2n^2}$ . Sei  $B = (b_{jk})$  eine symmetrische Matrix mit (\*). Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ :  $Q_A(x) - Q_B(x) \leq |Q_A(x) - Q_B(x)| = \left| \sum_{j,k=1}^n (a_{jk} - b_{jk}) x_j x_k \right| \leq \sum_{j,k=1}^n \underbrace{|a_{jk} - b_{jk}|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|} \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|} \leq \varepsilon \|x\|^2 n^2 = \frac{c}{2n^2} \|x\|^2 n^2 = \frac{c}{2} \|x\|^2$
- (2)  $A$  sei indefinit.  $\exists u, v \in \mathbb{R}^n : Q_A(u) > 0, Q_A(v) < 0$ .  $\alpha := \min \left\{ \frac{Q_A(u)}{\|u\|^2}, -\frac{Q_A(v)}{\|v\|^2} \right\} \implies \alpha > 0$ .  $\varepsilon := \frac{\alpha}{2n^2}$ . Sei  $B = (b_{jk})$  eine symmetrische Matrix mit (\*).

$$Q_A(u) - Q_B(u) \stackrel{\text{Wie bei (1)}}{\leq} \varepsilon u^2 \|u\|^2 = \frac{\alpha}{2n^2} n^2 \|u\|^2 = \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{Q_A(u)}{\|u\|^2} \|u\|^2 = \frac{1}{2} Q_A(u) \implies \\ Q_B(u) \geq \frac{1}{2} Q_A(u) > 0. \text{ Analog: } Q_B(v) < 0. \quad \blacksquare$$



# 8. Extremwerte

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$

**Definition**

- (1)  $f$  hat in  $x_0$  ein **lokales Maximum** :  $\iff \exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ .  
 $f$  hat in  $x_0$  ein **lokales Minimum** :  $\iff \exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ .  
**lokales Extremum** = lokales Maximum oder lokales Minimum
- (2) Ist  $D$  offen,  $f$  in  $x_0$  partiell differenzierbar und  $\text{grad } f(x_0) = 0$ , so heißt  $x_0$  ein stationärer Punkt.

**Satz 8.1 (Nullstelle des Gradienten)**  
 Ist  $D$  offen und hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum und ist  $f$  in  $x_0$  partiell differenzierbar, dann ist  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .

**Beweis**

$f$  habe in  $x_0$  ein lokales Maximum. Also  $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$  und  $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in U_\delta(x_0)$ . Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann:  $x_0 + te_j \in U_\delta(x_0)$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ .  $g(t) := f(x_0 + te_j)$  ( $t \in (-\delta, \delta)$ ).  $g$  ist differenzierbar in  $t = 0$  und  $g'(0) = f_{x_j}(x_0)$ .  $g(t) = f(x_0 + te_j) \leq f(x_0) = g(0) \forall t \in (-\delta, \delta)$ . Analysis 1, 21.5  $\implies g'(0) = 0 \implies f_{x_j}(x_0) = 0$  ■

**Satz 8.2 (Definitheit und Extremwerte)**  
 Sei  $D$  offen,  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  und  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .

- (i) Ist  $H_f(x_0)$  positiv definit  $\implies f$  hat in  $x_0$  ein lokales Minimum.
- (ii) Ist  $H_f(x_0)$  negativ definit  $\implies f$  hat in  $x_0$  ein lokales Maximum.
- (iii) Ist  $H_f(x_0)$  indefinit  $\implies f$  hat in  $x_0$  kein lokales Extremum.

**Beweis**

- (i), (ii)  $A := H_f(x_0)$  sei positiv definit oder negativ definit oder indefinit. Sei  $\varepsilon > 0$  wie in 7.2.  $f \in C^2(D, \mathbb{R}) \implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$  und (\*)  $|f_{x_j x_k}(x) - f_{x_j x_k}(x_0)| \leq \varepsilon \forall x \in U_\delta(x_0)$  ( $j, k = 1, \dots, n$ ). Sei  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}, h := x - x_0 \implies x = x_0 + h, h \neq 0$  und  $S[x_0, x_0 + h] \subseteq U_\delta(x_0)$  6.7  $\implies \exists \eta \in [0, 1] : f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{h \cdot \text{grad } f(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2} Q_B(h)$ , wobei  $B = H_f(x_0 + \eta h)$ . Also: (\*\*)  $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q_B(h)$ .
- $A$  sei positiv definit (*negativ definit*)  $\xrightarrow{7.2}$   $B$  ist positiv definit (*negativ definit*).  $\xrightarrow{h \neq 0}$   
 $Q_B(h) \stackrel{(<)}{>} 0 \xrightarrow{(**)} f(x) \stackrel{(<)}{>} f(x_0) \implies f$  hat in  $x_0$  ein lokales Minimum (*Maximum*).

## 8. Extremwerte

- (iii)  $A$  sei indefinit und es seien  $u, v \in \mathbb{R}^n$  wie in 7.2. Wegen 7.1 OBdA:  $\|u\| = \|v\| = 1$ . Dann:  $x_0 + tu, x_0 + tv \in U_\delta(x_0)$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ . Sei  $t \in (-\delta, \delta), t \neq 0$ . Mit  $h := t \binom{v}{u}$  folgt aus 7.2 und (\*\*):  $f(x_0 + t \binom{v}{u}) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q_B(t \binom{v}{u}) = f(x_0) + \frac{t^2}{2} \underbrace{Q_B \binom{v}{u}}_{>0/<0 \text{ (7.2)}} \stackrel{(>)}{<} f(x_0) \implies f$  hat in  $x_0$  kein lokales Extremum. ■

### Beispiele:

- (1)  $D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - 5. f_x = 2x - 2y, f_y = 2y - 2x; \text{grad } f(x, y) = (0, 0) \iff x = y.$  Stationäre:  $(x, x) (x \in \mathbb{R})$ .

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = -2 = f_{yx}, f_{yy} = 2 \implies H_f(x, x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(x, x) = 0 \implies H_f(x, x)$  ist weder pd, noch nd, noch id.

Es ist  $f(x, y) = (x - y)^2 - 5 \geq -5 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $f(x, x) = -5 \forall x \in \mathbb{R}$ .

- (2)  $D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3.$   
 $f_x = 3x^2 - 12y = 3(x^2 - 4y), f_y = -12x + 24y^2 = 12(-x + 2y^2).$   $\text{grad } f(x, y) = (0, 0) \iff x^2 = 4y, x = 2y^2 \implies 4y^4 = 4y \implies y = 0 \text{ oder } y = 1 \implies (x, y) = (0, 0) \text{ oder } (x, y) = (2, 1)$

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -12 = f_{yx}, f_{yy} = 48y. H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0, 0) = -144 < 0 \implies H_f(0, 0)$  ist indefinit  $\implies f$  hat in  $(0, 0)$  kein lokales Extremum.

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$

$12 > 0, \det H_f(2, 1) > 0 \implies H_f(2, 1)$  ist positiv definit  $\implies f$  hat in  $(2, 1)$  ein lokales Minimum.

- (3)  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, y \leq -x + 3\}, f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2.$  Bestimme  $\max f(K), \min f(K).$   $f(x, y) = xy(3 - x - y).$   $K = \partial K \cup K^\circ.$   $K$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\xrightarrow{3.3} \exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K : \max f(K) = f(x_1, y_1), \min f(K) = f(x_2, y_2).$   $f \geq 0$  auf  $K, f = 0$  auf  $\partial K,$  also  $\min f(K) = 0.$   $f$  ist nicht konstant  $\implies f(x_2, y_2) > 0 \implies (x_2, y_2) \in K^\circ \xrightarrow{8.1} \text{grad } f(x_1, x_2) = 0.$  Nachrechnen:  $(x_2, y_2) = (1, 1); f(1, 1) = 1 = \max f(K).$

## 9. Der Umkehrsatz

**Erinnerung:** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $U$  ist eine Umgebung von  $x_0 \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$

### Hilfssatz 9.1 (Offenheit des Bildes)

Sei  $\delta > 0$ ,  $f : U_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $f(0) = 0$  und  $V$  sei eine offene Umgebung von  $f(0) (= 0)$ .  $U := \{x \in U_\delta(0) : f(x) \in V\}$ . Dann ist  $U$  eine offene Umgebung von 0.

### Beweis

Übung ■

**Erinnerung: Cramersche Regel:** Sei  $A$  eine reelle  $(n \times n)$ -Matrix,  $\det A \neq 0$ , und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  hat genau eine Lösung:  $x = (x_1, \dots, x_n) = A^{-1}b$ . Ersetze in  $A$  die  $j$ -te Spalte durch  $b^\top$ . Es entsteht eine Matrix  $A_j$ . Dann:  $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ .

### Satz 9.2 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ .  $f$  sei auf  $D$  injektiv und es sei  $f(D)$  offen. Weiter sei  $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in D$  und  $f^{-1}$  sei auf  $f(D)$  differenzierbar. Dann:  $f^{-1} \in C^1(f(D), \mathbb{R}^n)$ .

### Beweis

Sei  $f^{-1} = g = (g_1, \dots, g_n)$ ,  $g = g(y)$ . Zu zeigen:  $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$  sind stetig auf  $f(D)$ . 5.6  $\implies g'(y) \cdot f'(x) = I$  ( $n \times n$ -Einheitsmatrix), wobei  $y = f(x) \in f(D) \implies$

$$\begin{pmatrix} g'_1(y) \\ \vdots \\ g'_n(y) \end{pmatrix} \cdot f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\implies \text{grad } g_j(y) \cdot f'(x) = e_j \implies f'(x)^\top \cdot \text{grad } g_j(y)^\top = e_j^\top$ . Ersetze in  $f'(x)^\top$  die  $k$ -te Spalte durch  $e_j^\top$ . Es entsteht die Matrix  $A_k(x) = A_k(f^{-1}(y))$ . Cramersche Regel  $\implies \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(y) = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(x)} = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(f^{-1}(y))}$ .  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ ,  $f^{-1}$  stetig  $\implies$  obige Definitionen hängen stetig von  $y$  ab  $\implies \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \in C(f(D), \mathbb{R})$ . ■

### Satz 9.3 (Der Umkehrsatz)

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  sei offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $x_0 \in D$  und  $\det f'(x_0) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  mit:

- (a)  $f$  ist auf  $U$  injektiv,  $f(U) = V$  und  $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in U$
- (b) Für  $f^{-1} : V \rightarrow U$  gilt:  $f^{-1}$  ist stetig differenzierbar auf  $V$  und

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} \forall x \in U$$

**Folgerung 9.4 (Satz von der offenen Abbildung)**

$D$  und  $f$  seien wie in 9.3 und es gelte:  $\det f'(x) \neq 0 \forall x \in D$ . Dann ist  $f(D)$  offen.

**Beweis**

O.B.d.A:  $x_0 = 0$ ,  $f(x_0) = f(0) = 0$  und  $f'(0) = I$  ( $= (n \times n)$ -Einheitsmatrix)

Die Abbildungen  $x \mapsto \det f'(x)$  und  $x \mapsto \|f'(x) - I\|$  sind auf  $D$  stetig,  $\det f'(0) \neq 0$ ,  $\|f'(0) - I\| = 0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$ :  $K := U_\delta(0) \subseteq D$ ,  $\bar{K} = \overline{U_\delta(0)} \subseteq D$  und

$$(1) \det f'(x) \neq 0 \forall x \in \bar{K} \text{ und}$$

$$(2) \|f'(x) - I\| \leq \frac{1}{2n} \forall x \in \bar{K}$$

$$(3) \text{ **Behauptung: } \frac{1}{2}\|u - v\| \leq \|f(u) - f(v)\| \forall u, v \in \bar{K}, \text{ insbesondere ist } f \text{ injektiv auf } \bar{K}**$$

$$(4) f^{-1} \text{ ist stetig auf } f(\bar{K}): \text{ Seien } \xi, \eta \in f(\bar{K}), u := f^{-1}(\xi), v := f^{-1}(\eta) \implies u, v \in \bar{K} \text{ und}$$

$$\|f^{-1}(\xi) - f^{-1}(\eta)\| = \|u - v\| \stackrel{(3)}{\leq} 2\|f(u) - f(v)\| = 2\|\xi - \eta\| \quad \blacksquare$$

Beweis zu (3):  $h(x) := f(x) - x$  ( $x \in D$ )  $\implies h \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  und  $h'(x) = f'(x) - I$ . Sei

$$h = (h_1, \dots, h_n). \text{ Also: } h' = \begin{pmatrix} h'_1 \\ \vdots \\ h'_n \end{pmatrix}. \text{ Seien } u, v \in \bar{K} \text{ und } j \in \{1, \dots, n\}.$$

$$|h_j(u) - h_j(v)| \stackrel{6.1}{=} |h'_j(\xi) \cdot (u - v)| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|h'_j(\xi)\| \|u - v\| \leq \|h'(\xi)\| \|u - v\|, \xi \in S[u, v] \in \bar{K}. (2)$$

$$\implies \leq \frac{1}{2n} \|u - v\|$$

$$\implies \|h(u) - h(v)\| = \left( \sum_{j=1}^n (h_j(u) - h_j(v))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{4n^2} \|u - v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2n} \|u - v\| \sqrt{n} \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \implies \|u - v\| - \|f(u) - f(v)\| \leq \|f(u) - f(v) - (u - v)\| = \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\| \implies (3)$$

$V := U_{\frac{\delta}{4}}(0)$  ist eine offene Umgebung von  $f(0)$  ( $= 0$ ).  $U := \{x \in K : f(x) \in V\}$  Klar:

$U \subseteq K \subseteq \bar{K}$ ,  $0 \in U$ , 9.1  $\implies U$  ist eine offene Umgebung von 0. (3)  $\implies f$  ist auf  $U$  injektiv.

(1)  $\implies \det f'(x) \neq 0 \forall x \in U$ . (4)  $\implies f^{-1}$  ist stetig auf  $f(U)$ . Klar:  $f(U) \subseteq V$ . Für (a) ist noch zu zeigen:  $V \subseteq f(U)$ .

Sei  $y \in V$ .  $w(x) := \|f(x) - y\|^2 = (f(x) - y) \cdot (f(x) - y) \implies w \in C^1(D, \mathbb{R})$  und (nachzurechnen)  $w'(x) = 2(f(x) - y) \cdot f'(x)$ .  $\bar{K}$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\stackrel{3.3}{\implies} \exists x_1 \in \bar{K} : (5) w(x_1) \leq w(x) \forall x \in \bar{K}$ .

**Behauptung:**  $x_1 \in K$ .

Annahme:  $x_1 \notin K \implies x_1 \in \partial K \implies \|x_1\| = \delta$ .  $2\sqrt{w(0)} = 2\|f(0) - y\| = 2\|y\| \leq 2\frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} = \frac{\|x_1\|}{2} = \frac{1}{2}\|x_1 - 0\| \stackrel{(3)}{\leq} \|f(x_1) - f(0)\| = \|f(x_1) - y + y - f(0)\| \leq \|f(x_1) - y\| - \|f(0) - y\| = \sqrt{w(x_1)} + \sqrt{w(0)} \implies \sqrt{w(0)} < \sqrt{w(x_1)} \implies w(0) < w(x_1) \stackrel{(5)}{\leq} w(0)$ , Widerspruch. Also:  $x_1 \in K$

(5)  $\implies w(x_1) \leq w(x) \forall x \in K$ . 8.1  $\implies w'(x_1) = 0 \implies (f(x_1) - y) \cdot f'(x_1) = 0$ ; (1)  $\implies f'(x_1)$  ist invertierbar  $\implies y = f(x_1) \implies x_1 \in U \implies y = f(x_1) \in f(U)$ . Also:  $f(U) = V$ . Damit ist (a) gezeigt.

(b): Wegen 5.5 und 9.2 ist nur zu zeigen:  $f^{-1}$  ist differenzierbar auf  $V$ . Sei  $y_1 \in V$ ,  $y \in V \setminus \{y_1\}$ ,  $x_1 := f^{-1}(y_1)$ ,  $x := f^{-1}(y)$ ;  $L(y) := \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - f'(x_0)^{-1}(y - y_1)}{\|y - y_1\|}$ . zu zeigen:  $L(y) \rightarrow 0$  ( $y \rightarrow y_1$ ).

$\varrho(x) := f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$ .  $f$  ist differenzierbar in  $x_1 \implies \frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|} \rightarrow 0 \ (x \rightarrow x_1)$ .

$$\begin{aligned} f'(x_1)^{-1}\varrho(x) &= f'(x_1)^{-1}(y - y_1) - (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1)) = -\|y - y_1\|L(y) \\ \implies L(y) &= -f'(x_1)^{-1} \frac{\varrho(x)}{\|y - y_1\|} = -f'(x_1)^{-1} \underbrace{\frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|}}_{\rightarrow 0 \ (x \rightarrow x_1)} \cdot \underbrace{\frac{\|x - x_1\|}{\|f(x) - f(x_1)\|}}_{\leq 2, \text{ nach (3)}} \end{aligned}$$

Für  $y \rightarrow y_1$ , gilt (wegen (4))  $x \rightarrow x_1 \implies L(y) \rightarrow 0$ .

### Beispiel

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}, \det f'(x, y) = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x$$

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ . Sei  $(\xi, \eta) \in D$  9.3  $\implies \exists$  Umgebung  $U$  von  $(\xi, \eta)$  mit:  $f$  ist auf  $U$  injektiv (\*). z.B.  $(\xi, \eta) = (1, \frac{\pi}{2}) \implies f(1, \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ .  $f'(1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $(f^{-1})(0, 1) = f'(1, \frac{\pi}{2})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Beachte:**  $f$  ist auf  $D$  „lokal“ injektiv (im Sinne von (\*)), aber  $f$  ist auf  $D$  *nicht* injektiv, da  $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi) \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \forall k \in \mathbb{Z}$ .



# 10. Implizit definierte Funktionen

## Beispiele:

(1)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ .  $f(x, y) = 0 \iff y^2 = 1 - x^2 \iff y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ .

Sei  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  mit  $f(x_0, y_0) = 0$  und  $y_0 \stackrel{(<)}{>} 0$ . Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  und genau eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x_0) = y_0$  und  $f(x, g(x)) = 0 \forall x \in U$ , nämlich

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{(\textit{-}\sqrt{\dots})}$$

**Sprechweisen:** „ $g$  ist implizit durch die Gleichung  $f(x, y) = 0$  definiert“ oder „die Gleichung  $f(x, y) = 0$  kann in der Form  $y = g(x)$  aufgelöst werden“

(2)  $f(x, y, z) = y + z + \log(x + z)$ . Wir werden sehen:  $\exists$  Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  von  $(0, 1)$  und genau eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(0, -1) = 1$  und  $f(x, y, g(x, y)) = 0 \forall (x, y) \in U$ .

**Der allgemeine Fall:** Es seien  $p, n \in \mathbb{N}$ ,  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $D$  offen,  $f = (f_1, \dots, f_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$ . Punkte in  $D$  (bzw.  $\mathbb{R}^{n+p}$ ) bezeichnen wir mit  $(x, y)$ , wobei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ , also  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ . Damit:

$$f' = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial x}} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial y} \text{ (} p \times p \text{)-Matrix}} \right); \text{ also } f'(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

### Satz 10.1 (Satz über implizit definierte Funktionen)

Sei  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $f(x_0, y_0) = 0$  und  $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_0$  und genau eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit:

(1)  $(x, g(x)) \in D \forall x \in U$

(2)  $g(x_0) = y_0$

(3)  $f(x, g(x)) = 0 \forall x \in U$

(4)  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$

(5)  $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \forall x \in U$

(6)  $g'(x) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \forall x \in U$

**Beweis**

Definition:  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  durch  $F(x, y) := (x, f(x, y))$ . Dann:  $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+p})$  und

$$F'(x, y) = \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right)$$

Dann:

(I)  $\det F'(x, y) \stackrel{\text{LA}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ), insbesondere:  $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$ . Es ist  $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ . 9.3  $\implies \exists$  eine offene Umgebung  $\mathbb{U}$  von  $(x_0, y_0)$  mit:  $\mathbb{U} \subseteq D, f(\mathbb{U}) = \vartheta$ .  $F$  ist auf  $\mathbb{U}$  injektiv,  $F^{-1} : \vartheta \rightarrow \mathbb{U}$  ist stetig differenzierbar und

(II)  $\det F'(x, y) \stackrel{\text{(I)}}{=} \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{U}$

**Bezeichnungen:** Sei  $(s, t) \in \vartheta$  ( $s \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^p$ ),  $F^{-1}(s, t) := (u(s, t), v(s, t))$ , also  $u : \vartheta \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar,  $v : \vartheta \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig differenzierbar. Dann:  $(s, t) = F(F^{-1}(s, t)) = (u(s, t), f(u(s, t), v(s, t))) \implies u(s, t) = s \implies F^{-1}(s, t) = (s, v(s, t))$ . Für  $(x, y) \in \mathbb{U} : f(x, y) = 0 \iff F(x, y) = (x, 0) \iff (x, y) = F^{-1}(x, 0) = (x, v(x, 0)) \iff y = v(x, 0)$ , insbesondere:  $y_0 = v(x_0, 0)$ .  $U := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in \vartheta\}$ . Es gilt:  $x_0 \in U$ . Übung:  $U$  ist eine offene Umgebung von  $x_0$ .

**Definition:**  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  durch  $g(x) := v(x, 0)$ , für  $x \in U$  gilt:  $(x, 0) \in \vartheta \implies F^{-1}(x, 0) = (x, v(x, 0)) = (x, g(x)) \in \mathbb{U}$ . Dann gelten: (1), (2), (3) und (4). (5) folgt aus (II).

Zu (6): Definition für  $x \in U : \psi(x) := (x, g(x)), \psi \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+p})$ ,

$$\psi'(x) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & & & g'(x) \end{array} \right)$$

(3)  $\implies 0 = f(\psi(x)) \forall x \in U$ . 5.4  $\implies 0 = f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \mid \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right) \cdot \psi'(x) \stackrel{\text{LA}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) \forall x \in U$ . (5)  $\implies \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$  invertierbar, Multiplikation von links mit  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))^{-1}$  liefert (6). ■

**Beispiel**

$f(x, y, z) = y + z + \log(x + z)$ . Zeige:  $\exists$  offene Umgebung  $U$  von  $(0, 1)$  und genau eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(0, -1) = 1$  und  $f(x, y, g(x, y)) = 0 \forall (x, y) \in U$ . Berechne  $g'$  an der Stelle  $(0, -1)$ .

$f(0, -1, 1) = 0, f_z = 1 + \frac{1}{x+z}; f_z(0, -1, 1) = 2 \neq 0$ . Die Behauptung folgt aus dem Satz über impliziert definierte Funktionen. Also:  $0 = y + g(x, y) + \log(x + g(x, y)) \forall (x, y) \in U$ .

Differentiation nach  $x: 0 = g_x(x, y) + \frac{1}{x+g(x, y)}(1+g_x(x, y)) \forall (x, y) \in U \xrightarrow{(x,y)=(0,-1)} 0 = g_x(0, -1) + \frac{1}{1}(g_x(0, -1) + 1) \implies g_x(0, -1) = -\frac{1}{2}$ .

Differentiation nach  $y: 0 = 1 + g_y(x, y) + \frac{1}{x+g(x, y)}g_y(x, y) \forall (x, y) \in U \xrightarrow{(x,y)=(0,-1)} g_y(0, -1) = -\frac{1}{2}$ . Also:  $g'(0, -1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

# 11. Extremwerte unter Nebenbedingungen

## Definition

Seien  $M, N$  Mengen  $\neq \emptyset$ ,  $f : M \rightarrow N$  eine Funktion und  $\emptyset \neq T \subseteq M$ . Die Funktion  $f|_T : T \rightarrow N$ ,  $f|_T(x) := f(x) \forall x \in T$  heißt die **Einschränkung** von  $f$  auf  $T$ .

In diesem Paragraphen gelte stets:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p < n$  und  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$ . Es sei  $T := \{x \in D : \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$ .

## Definition

$f$  hat in  $x_0 \in D$  ein **lokales Extremum unter der Nebenbedingung**  $\varphi = 0 : \iff x_0 \in T$  und  $f|_T$  hat in  $x_0$  ein lokales Extremum.

Wir führen folgende Hilfsfunktion ein: Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  gilt:

$$H(x, \lambda) := f(x) + \lambda \cdot \varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_p \varphi_p(x)$$

Es ist

$$H_{x_j} = f_{x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad H_{\lambda_j} = \varphi_j$$

Für  $x_0 \in D$  und  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  gilt:

$$\begin{aligned} H'(x_0, \lambda_0) = 0 &\iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \text{ und } \varphi(x_0) = 0 \\ &\iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \text{ und } x_0 \in T \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

### Satz 11.1 (Multiplikationsregel von Lagrange)

$f$  habe in  $x_0 \in D$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $\varphi = 0$  und es sei  $\text{Rang } \varphi'(x_0) = p$ . Dann existiert ein  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  mit:  $H'(x_0, \lambda_0) = 0$  ( $\lambda_0$  heißt **Multiplikator**).

### Folgerung 11.2

$T$  sei beschränkt und abgeschlossen. Wegen 3.3 gilt:  $\exists a, b \in T : f(a) = \max f(T)$ ,  $f(b) = \min f(T)$ . Ist  $\text{Rang } \varphi'_b(a) = p \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}^p : H'(a, \lambda_0) = 0$ .

### Beweis

Es ist  $x_0 \in T$  und

$$\varphi'(x_0) = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}}_{=:A} \mid \dots \mid \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \right)$$

## 11. Extremwerte unter Nebenbedingungen

Rang  $\varphi'(x_0) = p \implies$  o.B.d.A.:  $\det A \neq 0$ .

Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  schreiben wir  $x = (y, z)$ , wobei  $y = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $z = (x_{p+1}, \dots, x_n)$ . Insbesondere ist  $x_0 = (y_0, z_0)$ . Damit gilt:  $\varphi(y_0, z_0) = 0$  und  $\det \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0, z_0) \neq 0$ .

Aus 10.1 folgt:  $\exists$  offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$  von  $z_0$ ,  $\exists$  offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  von  $y_0$  und es existiert  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$  mit:

$$(II) \quad g(z_0) = y_0$$

$$(III) \quad \varphi(g(z), z) = 0 \quad \forall z \in U$$

$$(IV) \quad g'(z_0) = - \underbrace{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y}(g(z_0), z_0) \right)^{-1}}_{=x_0} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(g(z_0), z_0)}_{=x_0} \quad \blacksquare$$

(III)  $\implies (g(z), z) \in T \quad \forall z \in U$ . Wir definieren  $h(z)$  durch

$$h(z) := f(g(z), z) \quad (z \in U)$$

Dann hat  $h$  in  $z_0$  ein lokales Extremum (*ohne* Nebenbedingung). Damit gilt nach 8.1:

$$0 = h'(z_0) \stackrel{5.4}{=} f'(g(z_0), z_0) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \mid \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) g'(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)$$

$$\stackrel{(IV)}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) \right)^{-1}}_{=: \lambda_0 \in \mathbb{R}^p} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \implies \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0) = 0 \quad (V)$$

$$\lambda_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) \right)^{-1} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) = 0 \quad (VI)$$

Aus (V), (VI) folgt:  $f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \stackrel{(I)}{\implies} H'(x_0, \lambda_0) = 0$ .

### Beispiel

( $n = 3, p = 2$ )  $f(x, y, z) = x + y + z$ ,  $T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}$ ,  $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2, x + z - 1)$ .

Bestimme  $\max f(T)$ ,  $\min f(T)$ . Übung:  $T$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\stackrel{3.3}{\implies} \exists a, b \in T : f(a) = \max f(T), f(b) = \min f(T)$ .

$$\varphi'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang  $\varphi'(x, y, z) = 1 < p = 2 \iff x = y = 0$ .  $a, b \in T \implies \text{Rang } \varphi'(a) = \text{Rang } \varphi'(b) = 2$

$$H(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

$$H_x = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (1)$$

$$H_y = 1 + 2\lambda_1 y \stackrel{!}{=} 0 \quad (2)$$

$$H_z = 1 + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (3)$$

$$H_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

$$H_{\lambda_2} = x + z - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (5)$$

$$(3) \implies \lambda_2 = -1 \stackrel{(1)}{\implies} 2\lambda_1 x = 0; (2) \implies \lambda_1 \neq 0 \implies x = 0 \stackrel{(5)}{\implies} z = 1; (4) \implies y = \pm\sqrt{2}$$

$$11.2 \implies a, b \in \{(0, \sqrt{2}, 1), (0, -\sqrt{2}, 1)\}$$

$$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2} = \max f(T); f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2} = \min f(T)$$

**Anwendung** Sei  $A$  eine reelle, *symmetrische* ( $n \times n$ )-Matrix. Beh:  $A$  besitzt einen reellen EW.

**Beweis**

$f(x) := x \cdot (Ax) = Q_A(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ),  $T := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial U_1(0)$  ist beschränkt und abgeschlossen.

$$\varphi(x) := \|x\|^2 - 1 = x \cdot x - 1; \varphi'(x) = 2x, f'(x) = 2Ax.$$

$$3.3 \implies \exists x_0 \in T : f(x_0) = \max f(T); \varphi'(x) = 2(x_1, \dots, x_n); x_0 \in T \implies \text{Rang } \varphi'(x_0) = 1 (= p)$$

$$11.2 \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : H'(x_0, \lambda_0) = 0; h(x, \lambda) = f(x) + \lambda\varphi(x); H'(x, \lambda) = 2Ax + 2\lambda x$$

$$\implies 0 = 2(Ax_0 + \lambda_0 x_0) \implies Ax_0 = (-\lambda_0)x_0, x_0 \neq 0 \implies -\lambda_0 \text{ ist ein EW von } A. \quad \blacksquare$$



## 12. Wege im $\mathbb{R}^n$

### Definition

- (1) Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig. Dann heißt  $\gamma$  ein Weg im  $\mathbb{R}^n$
- (2) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg.  $\Gamma_\gamma := \gamma([a, b])$  heißt der zu  $\gamma$  gehörende Bogen,  $\Gamma_\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ . 3.3  $\implies \Gamma_\gamma$  ist beschränkt und abgeschlossen.  $\gamma(a)$  heißt der Anfangspunkt von  $\gamma$ ,  $\gamma(b)$  heißt der Endpunkt von  $\gamma$ .  $[a, b]$  heißt Parameterintervall von  $\gamma$ .
- (3)  $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch  $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$  heißt der zu  $\gamma$  inverse Weg. Beachte:  $\gamma^- \neq \gamma$ , aber  $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma^-}$ .

### Beispiele:

- (1) Sei  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$ ,  $t \in [0, 1]$ .  $\Gamma_\gamma = S[x_0, y_0]$
- (2) Sei  $r > 0$  und  $y(t) := (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$   
 $\Gamma_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} = \partial U_r(0)$   
 $\tilde{\gamma}(t) := (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ .  $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ , aber  $\Gamma_{\tilde{\gamma}} = \Gamma_\gamma$ .

**Erinnerung:**  $\mathfrak{Z}$  ist die Menge aller Zerlegungen von  $[a, b]$

### Definition

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg. Sei  $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$ .

$$L(\gamma, Z) := \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

Übung: Sind  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$  und gilt  $Z_1 \subseteq Z_2 \implies L(\gamma, Z_1) \leq L(\gamma, Z_2)$

$\gamma$  heißt rektifizierbar (rb) :  $\iff \exists M \geq 0 : L(\gamma, Z) \leq M \forall Z \in \mathfrak{Z}$ . In diesem Fall heißt  $L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$  die Länge von  $\gamma$ .

Ist  $n = 1$ , so gilt:  $\gamma$  ist rektifizierbar  $\iff \gamma \in \text{BV}[a, b]$ . In diesem Fall:  $L(\gamma) = V_\gamma([a, b])$ .

### Satz 12.1 (Rektifizierbarkeit und Beschränkte Variation)

Sei  $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg.  $\gamma$  ist rektifizierbar  $\iff \eta_1, \dots, \eta_n \in \text{BV}[a, b]$ .

### Beweis

Sei  $Z = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathfrak{Z}$  und  $J = \{1, \dots, n\}$ .

$|\eta_j(t_k) - \eta_j(t_{k-1})| \stackrel{1.7}{\leq} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \stackrel{1.7}{\leq} \sum_{\nu=1}^n |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})|$ . Summation über  $k \implies V_{\eta_j} \leq L(\gamma, Z) \leq \sum_{k=1}^m \sum_{\nu=1}^n |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})| = \sum_{\nu=1}^n V_{\eta_\nu}(Z) \implies$  Behauptung ■

**Übung:**  $\gamma$  ist rektifizierbar  $\iff \gamma^-$  ist rektifizierbar. In diesem Fall:  $L(\gamma) = L(\gamma^-)$

**Summe von Wege:** Gegeben:  $a_0, a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_c$  und Wege  $\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $k = 1, \dots, l$ ) mit  $\gamma_k(a_k) = \gamma_{k+1}(a_k)$  ( $k = 1, \dots, l-1$ ). Definiere  $\gamma : [a_0, a_l] \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\gamma(t) := \gamma_k(t)$ , falls  $t \in [a_{k-1}, a_k]$ .  $\gamma$  ist ein Weg im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma_1} \cup \Gamma_{\gamma_2} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_l}$ .  $\gamma$  heißt die Summe der Wege  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  und wird mit  $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_l$  bezeichnet.

**Bemerkung:** Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg und  $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$  und  $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  ( $k = 1, \dots, m$ )  $\implies \gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$ . Aus Analysis I, 25.1(7) und 12.1 folgt:

**Satz 12.2 (Summe von Wegen)**

Ist  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$ , so gilt:  $\gamma$  ist rektifizierbar  $\iff \gamma_1, \dots, \gamma_m$  sind rektifizierbar. In diesem Fall:  $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m)$

**Definition**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein rektifizierbarer Weg. Sei  $t \in (a, b]$ . Dann:  $\gamma|_{[a, t]}$  ist rektifizierbar (12.2).

$$s(t) := \begin{cases} L(\gamma|_{[a, t]}), & \text{falls } t \in (a, b] \\ 0, & \text{falls } t = a \end{cases}$$

heißt die zu  $\gamma$  gehörende **Weglängenfunktion**.

**Satz 12.3 (Eigenschaften der Weglängenfunktion)**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein rektifizierbarer Weg. Dann:

- (1)  $s \in C[a, b]$
- (2)  $s$  ist wachsend.

**Beweis**

(1) In der großen Übung

(2) Sei  $t_1, t_2 \in [a, b]$  und  $t_1 < t_2$ .  $\gamma_1 := \gamma|_{[a, t_1]}$ ,  $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$ ,  $\gamma_3 := \gamma|_{[a, t_2]}$ . Dann  $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ .  
 12.2  $\implies \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sind rektifizierbar und  $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t_2)} = \underbrace{L(\gamma_1)}_{s(t_1)} + \underbrace{L(\gamma_2)}_{\geq 0} \implies s(t_2) \geq s(t_1)$ . ■

**Satz 12.4 (Rechenregeln für Wegintegrale)**

Sei  $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $f_1, \dots, f_n \in R[a, b]$ .

$$\int_a^b f(t) dt := \left( \int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right) \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

Dann:

(1)

$$x \cdot \int_a^b f(t) dt = \int_a^b (x \cdot f(t)) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(2)

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

### Beweis

(1) Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \implies$

$$x \cdot \int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_a^b f_j(t) dt = \int_a^b \left( \sum_{j=1}^n x_j f_j(t) \right) dt = \int_a^b (x \cdot f(t)) dt$$

(2)  $y := \int_a^b f(t) dt$ . O.B.d.A:  $y \neq 0$ .  $x := \frac{1}{\|y\|} y \implies \|x\| = 1, y = \|y\| x. \|y\|^2 = y \cdot y = \|y\| \cdot \|y\| < \|x \cdot y\|$   
 $y = \|y\| \left( x \cdot \int_a^b f(t) dt \right) = \|y\| \int_a^b (x \cdot f(t)) dt \leq \|y\| \int_a^b \underbrace{|x \cdot f(t)|}_{\leq \|y\| \|f(t)\| = \|f(t)\|} dt \leq \|y\| \int_a^b \|f(t)\| dt$

■

### Satz 12.5 (Eigenschaften stetig differenzierbarer Wege)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein stetig differenzierbarer Weg. Dann:

(1)  $\gamma$  ist rektifizierbar

(2) Ist  $s$  die zu  $\gamma$  gehörende Weglängenfunktion, so ist  $s \in C^1[a, b]$  und  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \quad \forall t \in [a, b]$

(3)  $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

### Beweis

(1)  $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n), \eta_j \in C^1[a, b] \xrightarrow{A1,25.1} \eta_j \in BV[a, b] \xrightarrow{12.1} \gamma$  ist rektifizierbar.

(2) Sei  $t_0 \in [a, b]$ . Wir zeigen:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \rightarrow \|\gamma'(t_0)\| \quad (t \rightarrow t_0+0). \quad (\text{analog zeigt man: } \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \rightarrow \|\gamma'(t_0)\| \quad (t \rightarrow t_0-0)).$$

Sei  $t \in (t_0, b]$ ;  $\gamma_1 := \gamma|_{[a, t_0]}, \gamma_2 := \gamma|_{[t_0, t]}, \gamma_3 := \gamma|_{[a, t]}$ . Dann:  $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$  und  $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t)} =$

$$\underbrace{L(\gamma_1)}_{=s(t_0)} + L(\gamma_2) \implies s(t) - s(t_0) = L(\gamma_2) \quad (I).$$

$\tilde{Z} := \{t_0, t\}$  ist eine Zerlegung von  $[t_0, t] \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$

**Definition:**  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $F(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$ . 2.Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung  $\implies F$  ist differenzierbar und  $F'(t) = \|\gamma'(t)\| \quad \forall t \in [a, b]$ . Sei

12. Wege im  $\mathbb{R}^n$

$Z = \{\tau_0, \dots, \tau_m\}$  eine beliebige Zerlegung von  $[t_0, t]$ .

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \gamma'(\tau) d\tau = \left( \dots, \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \eta'_k(\tau) d\tau, \dots \right) \stackrel{A1}{=} (\dots, \eta_k(\tau_j) - \eta_k(\tau_{j-1}), \dots) = \gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})$$

$$\implies \|\gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})\| \stackrel{12.4}{\leq} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \|\gamma'(\tau)\| d\tau. \text{ Summation } \implies L(\gamma_2, Z) \leq \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = F(t) - F(t_0) \implies L(\gamma_2) \leq F(t) - F(t_0) \text{ (III).}$$

$$(I), (II), (III) \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \stackrel{(II)}{\leq} L(\gamma_2) \stackrel{(I)}{=} s(t) - s(t_0) \stackrel{(III)}{\leq} F(t) - F(t_0)$$

$$\implies \underbrace{\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} \|\gamma'(t_0)\|} \leq \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leq \underbrace{\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} F'(t_0) = \|\gamma'(t_0)\|}$$

$$(3) L(\gamma) = s(b) - s(a) \stackrel{AI}{=} \int_a^b s'(t) dt \stackrel{(2)}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \blacksquare$$

**Beispiele:**

(1)  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0) \ (t \in [0, 1]). \ \gamma'(t) = y_0 - x_0 \implies L(\gamma) = \int_0^1 \|y_0 - x_0\| dt = \|y_0 - x_0\|.$

(2) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\gamma(t) := (t, f(t)), t \in [a, b]. \ \gamma$  ist ein Weg im  $\mathbb{R}^2. \ \gamma$  ist rektifizierbar  $\iff f \in BV[a, b]. \ \Gamma_\gamma = \text{Graph von } f. \text{ Jetzt sei } f \in C^1[a, b] \xrightarrow{12.5} L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt.$

(3)  $\gamma(t) := (\cos t, \sin t) \ (t \in [0, 2\pi]). \ \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t). \ \|\gamma'(t)\| = 1 \ \forall t \in [0, 2\pi] \xrightarrow{12.5} s'(t) = 1 \ \forall t \in [0, 2\pi] \implies s(t) = t \ \forall t \in [0, 2\pi] \text{ (Bogenma\ss). Winkelma\ss: } \varphi := \frac{180}{\pi} t. L(\gamma) = 2\pi.$

**Definition**

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein Weg.

(1)  $\gamma$  hei\ss t **st\uckweise stetig differenzierbar** :  $\iff \exists z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$  mit:  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  sind stetig differenzierbar ( $k = 1, \dots, m$ )  $\iff \exists$  stetig differenzierbare Wege  $\gamma_1, \dots, \gamma_l : \gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_l.$

(2)  $\gamma$  hei\ss t **glatt** :  $\iff \gamma$  ist stetig differenzierbar und  $\|\gamma'(t)\| > 0 \ \forall t \in [a, b].$

(3)  $\gamma$  hei\ss t **st\uckweise glatt** :  $\iff \exists$  glatte Wege  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_l$

Aus 12.2 und 12.5 folgt:

**Satz 12.6 (Rektifizierbarkeit von Wegsummen)**

Ist  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_l$  st\uckweise stetig differenzierbar, mit stetig differenzierbaren Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_l \implies \gamma$  ist rektifizierbar und  $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_l).$

### Definition

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg.  $\gamma$  heißt eine **Parameterdarstellung** von  $\Gamma_\gamma$ .

### Beispiele:

- (1)  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma_1(t) := x_0 + t(y_0 - x_0) \ t \in [0, 1], \gamma_2(t) := \gamma_1^{-1}(t) \ t \in [0, 1], \gamma_3(t) := x_0 + 7t(y_0 - x_0) \ t \in [0, \frac{1}{7}]$ .  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sind Parameterdarstellungen von  $S[x_0, y_0]$ .
- (2)  $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), (t \in [0, 2\pi]), \gamma_2(t) := (\cos t, \sin t), (t \in [0, 4\pi])$ .  $\gamma_1, \gamma_2$  sind Parameterdarstellungen von  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

### Definition

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien Wege.

$\gamma_1$  und  $\gamma_2$  heißen **äquivalent**, in Zeichen  $\gamma_1 \sim \gamma_2 : \iff \exists h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  stetig und streng wachsend,  $h(a) = \alpha, h(b) = \beta$  und  $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t)) \ \forall t \in [a, b]$  (also  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$ ).  $h$  heißt eine **Parametertransformation** (PTF). Analysis 1  $\implies h([a, b]) = [\alpha, \beta] \implies \Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_{\gamma_2}$ . Es gilt:  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h^{-1} \implies \gamma_2 \sim \gamma_1$ . „ $\sim$ “ ist eine Äquivalenzrelation.

### Beispiele:

- (1)  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  seien wie in obigem Beispiel (1).  $\gamma_1 \sim \gamma_3, \gamma_1 \approx \gamma_2$ .
- (2)  $\gamma_1, \gamma_2$  seien wie in obigem Beispiel (2).  $\gamma_1 \approx \gamma_2$ , denn  $L(\gamma_1) = 2\pi \neq 4\pi = L(\gamma_2)$

### Satz 12.7 (Eigenschaften der Parametertransformation)

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien äquivalente Wege und  $h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  eine Parametertransformation.

- (1)  $\gamma_1$  ist rektifizierbar  $\iff \gamma_2$  ist rektifizierbar. In diesem Falle:  $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$
- (2) Sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  glatt  $\implies h \in C^1[a, b]$  und  $h' > 0$ .

### Beweis

(2) In den großen Übungen.

- (1) Es genügt zu zeigen: Aus  $\gamma_2$  rektifizierbar folgt:  $\gamma_1$  ist rektifizierbar und  $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$ . Sei  $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z} \implies \tilde{Z} := \{h(t_0), \dots, h(t_m)\}$  ist eine Zerlegung von  $[\alpha, \beta]$ .

$$L(\gamma_1, Z) = \sum_{j=1}^m \|\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^m \|\gamma_2(h(t_j)) - \gamma_2(h(t_{j-1}))\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$$

$\implies \gamma_1$  ist rektifizierbar und  $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$ . ■

**Weglänge als Parameter** Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein glatter Weg. 12.5  $\implies \gamma$  ist rb.  $L := L(\gamma)$ . 12.5  $\implies s \in C^1[a, b]$  und  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \ \forall t \in [a, b]$ .  $s$  ist also *streng wachsend*. Dann gilt:  $s([a, b]) = [0, L], s^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$  ist streng wachsend und stetig db.  $(s^{-1})'(\sigma) = \frac{1}{s'(t)}$  für  $\sigma \in [0, L], s(t) = \sigma$ .

## 12. Wege im $\mathbb{R}^n$

### Definition

$\tilde{\gamma}[0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\tilde{\gamma}(\sigma) := \gamma(s^{-1}(\sigma))$ , also  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ ;  $\tilde{\gamma}$  ist ein Weg im  $\mathbb{R}^n$  und  $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ ;  $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$ .

12.7  $\implies \tilde{\gamma}$  ist rb,  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) = L$ ,  $\tilde{\gamma}$  ist stetig db.  $\tilde{\gamma}$  heißt Parameterdarstellung von  $\Gamma_\gamma$  mit der Weglänge als Parameter. Warum?

Darum: Sei  $\tilde{s}$  die zu  $\tilde{\gamma}$  gehörende Weglängenfunktion.  $\forall \sigma \in [0, L] : \tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma))$ . Sei  $\sigma \in [0, L]$ ,  $t := s^{-1}(\sigma) \in [a, b]$ ,  $s(t) = \sigma$ .

$$\tilde{\gamma}'(\sigma) = (s^{-1})'(\sigma) \cdot \gamma'(s^{-1}(\sigma)) = \frac{1}{s'(t)} \gamma'(t) \stackrel{12.5}{=} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) \implies \|\tilde{\gamma}'(\sigma)\| = 1 \quad (\implies \tilde{\gamma} \text{ ist glatt}).$$

$$\tilde{s}'(\gamma) \stackrel{12.5}{=} \|\tilde{\gamma}'(\sigma)\| = 1 \stackrel{\tilde{s}(0)=0}{\implies} \tilde{s}(\sigma) = \sigma.$$

Also:  $\|\tilde{\gamma}'(\sigma)\| = 1$ ,  $\tilde{s}(\sigma) = \sigma \quad \forall \sigma \in [0, L]$ .

### Beispiel

$\gamma(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ;  $\gamma$  ist stetig db; Nachrechnen:  $\|\gamma'(t)\| = e^t \quad \forall t \in [0, 1] \implies \gamma$  ist glatt.

$$s'(t) \stackrel{12.5}{=} \|\gamma'(t)\| = e^t \implies s(t) = e^t + c \implies 0 = s(0) = 1 + c \implies c = -1, \quad s(t) = e^t - 1 \quad (t \in [0, 1]) \implies L = L(\gamma) = s(1) = e - 1. \quad e^t = 1 + s(t), \quad t = \log(1 + s(t)).$$

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma)) = \gamma(\log(1 + \sigma)) = \frac{1+\sigma}{\sqrt{2}}(\cos(\log(1 + \sigma)), \sin(\log(1 + \sigma))), \quad \sigma \in [0, e - 1].$$

# 13. Wegintegrale

## Definition

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei ein *rektifizierbarer* Weg,  $\Gamma := \Gamma_\gamma$  und  $f = (f_1, \dots, f_n) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei *stetig*. Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ ;  $\gamma_j \in BV[a, b]$  (12.1).  $f_j \circ \gamma$  ist *stetig*. Ana I, 26.6  $\implies f_j \circ \gamma \in R_{\gamma_j}[a, b]$ .

$$\int_\gamma f_j(x) dx_j := \int_a^b f_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x) \cdot dx &:= \int_\gamma f_1(x) dx_1 + \dots + f_n(x) dx_n := \int_\gamma f_1(x) dx_1 + \dots + \int_\gamma f_n(x) dx_n \\ &= \int_a^b f_1(\gamma(t)) d\gamma_1(t) + \dots + \int_a^b f_n(\gamma(t)) d\gamma_n(t). \end{aligned}$$

**Wegintegral** von  $f$  längs  $\gamma$ .

Aus Ana I, 26.3 folgt:

### Satz 13.1 (Berechnung des Wegintegrals)

$\gamma, \Gamma$  und  $f$  seien wie oben.  $\gamma$  sei stetig differenzierbar. Dann:

$$\int_\gamma f_j(x) dx_j = \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \quad (j = 1, \dots, n)$$

und

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

### Beispiel

$f(x, y, z) := (z, y, x)$ ,  $\gamma(t) = (t, t^2, 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .  $f(\gamma(t)) = (3t, t^2, t)$ ,  $\gamma'(t) = (1, 2t, 3)$ ,  $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 3t + 2t^3 + 3t = 6t + 2t^3$ .

$$\int_\gamma f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) = \int_0^1 (6t + 2t^3) dt = \frac{7}{2}.$$

### Satz 13.2 (Rechnen mit Wegintegralen)

$\gamma, \Gamma, f$  seien wie oben,  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig,  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei rektifizierbar und  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ .

$$(1) \int_{\gamma} (\xi f(x) + \eta g(x)) \cdot dx = \xi \int_{\gamma} f(x) \cdot dx + \eta \int_{\gamma} g(x) \cdot dx$$

$$(2) \text{ Ist } \gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma^{(1)}} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma^{(2)}} f(x) \cdot dx$$

$$(3) \int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = - \int_{\gamma} f(x) \cdot dx$$

$$(4) \left| \int_{\gamma} f(x) \cdot dx \right| \leq L(\gamma) \cdot \max\{\|f(x)\| : x \in \Gamma\}$$

$$(5) \text{ Ist } \hat{\gamma} \sim \gamma \implies \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx.$$

**Beweis**

(1) klar

(2) Ana I, 26.1(3)

(3) nur für  $\gamma$  stetig differenzierbar.  $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$ ,  $t \in [a, b]$ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx &= \int_a^b f(\gamma(b + a - t)) \cdot \gamma'(b + a - t)(-1) dt = (\text{subst. } \tau = b + a - t, d\tau = dt) \\ &= \int_b^a f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = - \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = - \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

(4) Übung

(5) Sei  $\hat{\gamma} = \gamma \circ h$ ,  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  stetig und streng wachsend.  $h(\alpha) = a$ ,  $h(\beta) = b$ . Nur für  $\gamma$  und  $h$  stetig db. Dann ist  $\hat{\gamma}$  stetig db.

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(h(t))) \cdot \gamma'(h(t)) \cdot h'(t) dt = (\text{subst. } \tau = h(t), d\tau = h'(t) dt) = \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definition**

$\gamma, \Gamma$  seien wie immer in diesem Paragraphen.  $s$  sei die zu  $\gamma$  gehörende Weglängenfunktion und  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. 12.4  $\implies s$  ist wachsend  $\xrightarrow{\text{Ana I}} s \in BV[a, b]$ ;  $g \circ \gamma$  stetig  $\xrightarrow{\text{Ana I, 26.6}} g \circ \gamma \in R_s[a, b]$ .

$$\int_{\gamma} g(x) ds := \int_a^b g(\gamma(t)) ds(t)$$

**Integral bzgl. der Weglänge.****Satz 13.3 (Rechnen mit Integralen bezgl. der Weglänge)**Seien  $\gamma, g$  wie oben.

$$(1) \int_{\gamma^-} g(x) ds = \int_{\gamma} g(x) ds$$

$$(2) \text{ Ist } \gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_{\gamma} g(x) ds = \int_{\gamma^{(1)}} g(x) ds + \int_{\gamma^{(2)}} g(x) ds.$$

$$(3) \text{ Ist } \gamma \text{ stetig db } \implies \int_{\gamma} g(x) ds = \int_a^b g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

### Beispiel

$$g(x, y) = (1 + x^2 + 3y)^{1/2}, \quad \gamma(t) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1].$$

$$g(\gamma(t)) = (1 + t^2 + 3t^2)^{1/2} = (1 + 4t^2)^{1/2}, \quad \gamma'(t) = (1 + 2t), \quad \|\gamma'(t)\| = (1 + 4t^2)^{1/2} \implies \int_{\gamma} g(x, y) ds = \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = \frac{7}{3}$$

**Gegeben:**  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  rektifizierbare Wege,  $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3), \dots, \gamma_{m-1}(b_{m-1}) = \gamma_m(a_m)$ .  $\Gamma := \Gamma_{\gamma_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_m}$ .

$\text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) := \{\gamma : \gamma \text{ ist ein rektifizierbarer Weg im } \mathbb{R}^n \text{ mit: } \Gamma_{\gamma} = \Gamma, L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m) \text{ und } \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx + \dots + \int_{\gamma_m} f(x) \cdot dx \text{ f\u00fcr jedes stetige } f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ .

Ist  $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ , so sagt man  $\gamma$  entsteht durch **Aneinanderh\u00e4ngen** der Wege  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ .

### Satz 13.4 (Stetige Differenzierbarkeit der Aneinanderh\u00e4ngung)

$\gamma_1, \dots, \gamma_m$  seien wie oben. Dann:  $\text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \neq \emptyset$ .

Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  stetig differenzierbar, so existiert ein st\u00fcckweise stetig differenzierbarer Weg  $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ .

### Beweis

O.B.d.A:  $m = 2$ .

Def.  $h : [b_1, c] \rightarrow [a_2, b_2]$  linear wie folgt:  $h(x) = px + q, h(b_1) = a_2, h(c) = b_2$ .  $\hat{\gamma}_2 := \gamma_2 \circ h$ .  
Dann:  $\gamma_2 \sim \hat{\gamma}_2$ .  $\gamma := \gamma_1 \oplus \hat{\gamma}_2$ . 12.2, 12.7, 13.2  $\implies \gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$ . ■

### Beispiel

In allen Beispielen sei  $f(x, y) = (y, x - y)$  und  $t \in [0, 1]$ .

$$(1) \gamma_1(t) = (t, 0), \gamma_2(t) = (1, t).$$

Sei  $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$ . Anfangspunkt von  $\gamma$  ist  $(0,0)$ , Endpunkt von  $\gamma$  ist  $(1,1)$ . Nachrechnen:  
 $\int_{\gamma_1} f(x, y) \cdot d(x, y) = 0, \int_{\gamma_2} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$ . Also:  $\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

$$(2) \gamma_1(t) = (0, t), \gamma_2(t) = (t, 1).$$

Sei  $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$ , Anfangspunkt von  $\gamma$  ist  $(0,0)$ , Endpunkt von  $\gamma$  ist  $(1,1)$ . Nachrechnen:  
 $\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

### 13. Wegintegrale

- (3)  $\gamma(t) = (t, t^3)$ . Anfangspunkt von  $\gamma$  ist  $(0,0)$ , Endpunkt von  $\gamma$  ist  $(1,1)$ . Nachrechnen:  
$$\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$$

# 14. Stammfunktionen

In diesem Paragraphen sei stets:  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $G$  ein Gebiet und  $f = (f_1, \dots, f_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig.

## Definition

Eine Funktion  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Stammfunktion (SF) von  $f$  auf  $G$**  :  $\iff \varphi$  ist auf  $G$  partiell differenzierbar und  $\text{grad } \varphi = f$  auf  $G$ . Also:  $f_{x_j} = f_j$  auf  $G$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

## Bemerkung:

- (1) Ist  $\varphi$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $G \implies \text{grad } \varphi = f \implies \varphi \in C^1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{5.3} \varphi$  ist auf  $G$  differenzierbar und  $\varphi' = f$  auf  $G$ .
- (2) Sind  $\varphi_1, \varphi_2$  Stammfunktionen von  $f$  auf  $G \xrightarrow{(1)} \varphi'_1 = \varphi'_2$  auf  $G \xrightarrow{6.2} \exists c \in \mathbb{R} : \varphi_1 = \varphi_2 + c$  auf  $G$
- (3) Ist  $n = 1 \implies G$  ist ein offenes Intervall. AI, 23.14  $\implies$  jedes stetige  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt auf  $G$  eine Stammfunktion! Im Falle  $n \geq 2$  ist dies *nicht* so.

## Beispiele:

- (1)  $G = \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (y, -x)$ .

Annahme:  $f$  besitzt auf  $\mathbb{R}^2$  die Stammfunktion  $\varphi$ . Dann:  $\varphi_x = y$ ,  $\varphi_y = -x$  auf  $G \implies \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und  $\varphi_{xy} = 1 \neq -1 = \varphi_{yx}$ . Widerspruch zu 4.1. Also:  $f$  besitzt auf  $\mathbb{R}^2$  keine Stammfunktion.

- (2)  $G = \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (y, x - y)$ .

Ansatz für eine Stammfunktion  $\varphi$  von  $f$ :  $\varphi_x = y \implies \varphi = xy + c(y)$ ,  $c$  differenzierbar,  $\implies \varphi_y \stackrel{!}{=} x + c'(y) = x - y \implies c'(y) = -y$ , etwa  $c(y) = -\frac{1}{2}y^2$ . Also:  $\varphi(x, y) = xy - \frac{1}{2}y^2$ . Probe:  $\varphi_x = y$ ,  $\varphi_y = x - y$ , also:  $\text{grad } \varphi = f$ .  $\varphi$  ist also eine Stammfunktion von  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

### Satz 14.1 (Hauptsatz der mehrdimensionalen Integralrechnung)

$f$  besitzt auf  $G$  die Stammfunktion  $\varphi$ ;  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit  $\Gamma_\gamma \subseteq G$ . Dann:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Das heißt:  $\int_\gamma f(x) \cdot dx$  hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von  $\gamma$  ab.

Ist  $\gamma$  geschlossen, das heißt  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , dann gilt  $\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0$ .

**Beweis**

O.B.d.A.:  $\gamma$  ist stetig differenzierbar.  $\Phi(t) := \varphi(\gamma(t))$ ,  $t \in [a, b]$ .  $\Phi$  ist stetig differenzierbar und  $\Phi'(t) = \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ . Dann:  $\int_{\gamma} f(x) \cdot dx \stackrel{13.1}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \Phi'(t) dt \stackrel{AI}{=} \Phi(b) - \Phi(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$ . ■

**Hilfssatz 14.2**

Es seien  $x_0, y_0 \in G$ . Dann existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg  $\gamma$  mit:  $\Gamma_{\gamma} \subseteq G$  und Anfangspunkt von  $\gamma = x_0$  und Endpunkt von  $\gamma = y_0$ .

**Beweis**

$G$  Gebiet  $\implies \exists z_0, z_1, \dots, z_m \in G : S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G, z_0 = x_0, z_m = y_0$ .

$\gamma_j(t) := z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1})$ , ( $t \in [0, 1]$ ), ( $j = 1, \dots, n$ ). Dann:  $\Gamma_{\gamma_j} = S[z_{j-1}, z_j] \implies \Gamma_{\gamma_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_m} = S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G$ . 13.4  $\implies \exists \gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  stückweise stetig differenzierbar  $\implies \Gamma_{\gamma} = S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G$ . ■

**Definition**

$\int f(x) \cdot dx$  heißt in  $G$  **wegunabhängig** (wu) :  $\iff$  für je zwei Punkte  $x_0, y_0 \in G$  gilt: für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\Gamma_{\gamma} \subseteq G$ ,  $\gamma(a) = x_0$  und  $\gamma(b) = y_0$  hat das Integral  $\int_{\gamma} f(x) \cdot dx$  stets denselben Wert. In diesem Fall:  $\int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot dx := \int_{\gamma} f(x) \cdot dx$ .

**14.4 lautet dann:** besitzt  $f$  auf  $G$  die Stammfunktion  $\varphi \implies \int f(x) \cdot dx$  ist in  $G$  wegunabhängig und  $\int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot dx = \varphi(y_0) - \varphi(x_0)$  (Verallgemeinerung von Analysis 1, 23.5).

**Satz 14.3 (Wegunabhängigkeit, Existenz von Stammfunktionen)**  
 $f$  besitzt auf  $G$  eine Stammfunktion  $\iff \int f(x) \cdot dx$  ist in  $G$  wegunabhängig.  
 In diesem Fall: ist  $x_0 \in G$  und  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch:

$$\varphi(z) = \int_{x_0}^z f(x) \cdot dx \quad (z \in G) \quad (*)$$

Dann ist  $\varphi$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $G$ .

**Beweis**

„ $\implies$ “: 14.1 „ $\Leftarrow$ “: Sei  $x_0 \in G$  und  $\varphi$  wie in (\*). Zu zeigen:  $\varphi$  ist auf  $G$  differenzierbar und  $\varphi' = f$  auf  $G$ . Sei  $z_0 \in G, h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$  und  $\|h\|$  so klein, dass  $z_0 + th \in G \forall t \in [0, 1]$ .  $\gamma(t) := z_0 + th$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $\Gamma_{\gamma} = S[z_0, z_0 + h] \subseteq G$ .  $\rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) - f(z_0) \cdot h)$ . Zu zeigen:  $\rho(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ). 14.2  $\implies$  es existieren stückweise stetig differenzierbare Wege  $\gamma_1, \gamma_2$  mit:  $\Gamma_{\gamma_1}, \Gamma_{\gamma_2} \subseteq G$ . Anfangspunkt von  $\gamma_1 = x_0 =$  Anfangspunkt von  $\gamma_2$ . Endpunkt von  $\gamma_1 = z_0$ , Endpunkt von  $\gamma_2 = z_0 + h$ . Sei  $\gamma_3 \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$  stückweise stetig differenzierbar (13.4!). Dann:

$$\underbrace{\int_{\gamma_3} f(x) \cdot dx}_{=\varphi(z_0+h)} = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx}_{=\varphi(z_0)} + \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx$$

$\int f(x) \cdot dx$  ist wegunabhängig in  $G \implies$

$$\int_{\gamma_3} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx = \varphi(z_0 + h) \implies \varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z_0) \cdot dx &= \int_0^1 f(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=h} dt = f(z_0) \cdot h \\ \implies \rho(h) &= \frac{1}{\|h\|} \int_{\gamma} (f(x) - f(z_0)) dx \\ \implies |\rho(h)| &= \frac{1}{\|h\|} \left| \int_{\gamma} f(x) - f(z_0) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\|h\|} \underbrace{L(\gamma)}_{=\|h\|} \underbrace{\max\{\|f(x) - f(z_0)\| : x \in \Gamma_{\gamma}\}}_{=\|f(x_n) - f(z_0)\|} \end{aligned}$$

wobei  $x_n \in \Gamma_{\gamma} = S[z_0, z_0 + h] \implies |\rho(h)| \leq \|f(x_n) - f(z_0)\|$ . Für  $h \rightarrow 0 : x_n \rightarrow z_0 \xrightarrow{\text{f stetig}} \|f(x_n) - f(z_0)\| \rightarrow 0 \implies \rho(h) \rightarrow 0$ . ■

#### Satz 14.4 (Integrabilitätsbedingungen)

Sei  $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ . Besitzt  $f$  auf  $G$  die Stammfunktion  $\varphi \implies$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf } G \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

(**Integrabilitätsbedingungen (IB)**). Warnung: Die Umkehrung von 14.4 gilt im Allgemeinen **nicht** ( $\rightarrow$  Übungen!).

#### Beweis

Sei  $\varphi$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $G \implies \varphi$  ist differenzierbar auf  $G$  und  $\varphi_{x_j} = f_j$  auf  $G$  ( $j = 1, \dots, n$ ).  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n) \implies \varphi \in C^2(G, \mathbb{R})$

$$\implies \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \varphi_{x_j x_k} \stackrel{4.7}{=} \varphi_{x_k x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf } G.$$

#### Definition

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $M$  heißt **sternförmig** :  $\iff \exists x_0 \in M : S[x_0, x] \subseteq M \forall x \in M$ .

#### Beachte:

- (1) Ist  $M$  konvex  $\implies M$  ist sternförmig
- (2) Ist  $M$  offen und sternförmig  $\implies M$  ist ein Gebiet

#### Satz 14.5 (Kriterium zur Existenz von Stammfunktionen)

Sei  $G$  sternförmig und  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ . Dann:  $f$  besitzt auf  $G$  eine Stammfunktion :  $\iff f$  erfüllt auf  $G$  die Integrabilitätsbedingungen

**Beweis**

„ $\implies$ “: 14.1 „ $\Leftarrow$ “:  $G$  sternförmig  $\implies \exists x_0 \in G : S[x_0, x] \subseteq G \forall x \in G$ . OBdA:  $x_0 = 0$ .

Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$  sei  $\gamma_x(t) = tx, t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= \int_{\gamma_x} f(z) \cdot dz \quad (x \in G) \\ &= \int_0^1 f(tx) \cdot x dt \\ &= \int_0^1 (f_1(tx) \cdot x_1 + f_2(tx) \cdot x_2 + \dots + f_n(tx) \cdot x_n) dt\end{aligned}$$

Zu zeigen:  $\varphi$  ist auf  $G$  partiell differenzierbar nach  $x_j$  und  $\varphi_{x_j} = f_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). OBdA:  $j = 1$ .  
Später (in 21.3) zeigen wir:  $\varphi$  ist partiell differenzierbar nach  $x_1$  und:

$$\varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f_1(tx)x_1 + \dots + f_n(tx) \cdot x_n) dt$$

Für  $k = 1, \dots, n$ :  $g_k(x) = f_k(tx) \cdot x_k$ .

$k = 1$ :  $g_1(x) = f_1(tx)x_1 \implies \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) = f_1(tx) + t \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1$

$k \geq 2$ :  $g_k(x) = f_k(tx)x_k \implies \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) = t \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(tx)x_k \implies$

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1}(x) &= \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(tx)x_n)) dt \\ &\stackrel{\text{IB}}{=} \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx)x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(tx)x_n)) dt \\ &= \int_0^1 (f_1(tx) + t f_1'(tx) \cdot x) dt\end{aligned}$$

Sei  $x \in G$  (fest),  $h(t) := t \cdot f_1(tx)$  ( $t \in [0, 1]$ ).  $h$  ist stetig differenzierbar und  $h'(t) = f_1(tx) + t f_1'(tx) \cdot x \implies \varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 h'(t) dt \stackrel{\text{A1}}{=} h(1) - h(0) = f_1(x)$ . ■

# 15. Integration von Treppenfunktionen

## Definition

- (1)  $\mathfrak{M} := \{I : I \text{ ist ein beschränktes Intervall in } \mathbb{R}\}$ . Also:  $I \in \mathfrak{M} : \iff \exists a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b : I = [a, b]$  oder  $I = (a, b)$  oder  $I = [a, b)$  oder  $I = (a, b]$  oder  $I = \{a\}$ .

In den ersten 4 Fällen setzt man  $|I| := b - a$  und  $|\{a\}| := 0$  (Intervalllänge).

- (2) Sei  $n \in \mathbb{R}$  und es seien  $I_1, I_2, \dots, I_n \in \mathfrak{M}$ . Dann heißt  $Q := I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$  ein **Quader** im  $\mathbb{R}^n$  und  $v_n(Q) := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \dots \cdot |I_n|$  das ( $n$ -dim.) **Volumen von  $Q$** .

## Beispiel

( $n = 2$ )

(i)  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ,  $v_2(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ .

(ii)  $Q = [a_1, b_1] \times \{a\}$ ,  $v_2(Q) = 0$ .

- (3) Eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Treppenfunktion** im  $\mathbb{R}^n$  :  $\iff \exists$  Quader  $Q_1, \dots, Q_m$  im  $\mathbb{R}^n$  mit:

(i)  $Q_j \cap Q_k = \emptyset$  ( $j \neq k$ )

(ii)  $\varphi$  ist auf jedem  $Q_j$  konstant

(iii)  $\varphi = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_m)$

$\mathcal{T}_n =$  Menge aller Treppenfunktionen in  $\mathbb{R}^n$ .

Der nächste Satz wird hier nicht bewiesen:

### Satz 15.1 (Disjunkte Quaderzerlegung und Treppenfunktionsraum)

- (1) Es seien  $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_k$  Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Dann ex. Quader  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  im  $\mathbb{R}^n$  :  $Q'_1 \cup Q'_2 \cup \dots \cup Q'_k = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$  und  $Q_j \cap Q_k = \emptyset$  ( $j \neq k$ ).

*Beachte:*  $Q_1, \dots, Q_m$  sind nicht eindeutig bestimmt.

(2)  $\mathcal{T}_n$  ist ein reeller Vektorraum.

(3) Aus  $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_n$  folgt:  $|\varphi|, \varphi \cdot \psi \in \mathcal{T}_n$ .

## Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in A \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

## 15. Integration von Treppenfunktionen

$1_A$  heißt die **charakteristische Funktion von  $A$** .

Aus 15.1 folgt:

Ist  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dann gilt:  $\varphi \in \mathcal{T}_n \iff \exists$  Quader  $Q_1, \dots, Q_m$  in  $\mathbb{R}^n$  und  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi = \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j} \quad (*)$$

*Beachte:*

- (1) Die Darstellung von  $\varphi$  in (\*) ist i.A. *nicht* eindeutig.
- (2) In (\*) wird *nicht* gefordert, dass  $Q_j \cap Q_k = \emptyset$  ( $j \neq k$ ).

### Beispiel

FIXME: Bild

$$\varphi = 2 \cdot 1_{Q_1} + 3 \cdot 1_{Q_2}.$$

### Satz 15.2 (Integral über Treppenfunktion (mit Definition))

Sei  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  wie in (\*).

$$\int \varphi dx := \int \varphi(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx := \sum_{j=1}^m c_j v_n(Q_j)$$

*Behauptung:*  $\int \varphi dx$  ist wohldefiniert, d.h. obige Def. ist unabhängig von der Darstellung von  $\varphi$  in (\*).

**Vorbemerkung:** Sei  $Q = I_1 \times \dots \times I_n$  Quader im  $\mathbb{R}^n$  ( $I_j \in \mathfrak{M}$ ). Sei  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ .  $P := I_1 \times \dots \times I_p$ ,  $R := I_{p+1} \times \dots \times I_n$ .  $P$  ist ein Quader im  $\mathbb{R}^p$ .  $R$  ist ein Quader im  $\mathbb{R}^{n-p}$ .  $Q = P \times R$ .  $v_n(Q) = v_p(P) \cdot v_{n-p}(R)$ . Ist  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-p} \implies 1_Q(z) = 1_P(x) \cdot 1_R(y)$ .

### Beweis (von 15.2)

Induktion nach  $n$ .

IA:  $n = 1$ : Übung

IV: Die Beh. sei gezeigt für jedes  $q \in \{1, \dots, n-1\}$ .

IS: Sei  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ . Vorbemerkung  $\implies \exists$  Quader  $P_1, \dots, P_m$  im  $\mathbb{R}^p$  und Quader  $R_1, \dots, R_m$  im  $\mathbb{R}^{n-p}$ :  $Q_j = P_j \times R_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Für  $z \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir  $z = (x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ .

Sei  $y \in \mathbb{R}^{n-p}$  fest.  $\varphi_y(x) := \varphi(x, y)$  ( $x \in \mathbb{R}^p$ ).

$$\varphi_y(x) = \varphi(x, y) \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j}(x, y) \stackrel{\text{Vorbem.}}{=} \sum_{j=1}^m c_j 1_{P_j}(x) \cdot 1_{R_j}(y) = \sum_{j=1}^m \underbrace{c_j 1_{R_j}(y)}_{=: d_j = d_j(y)} \cdot 1_{P_j}(x) = \sum_{j=1}^m d_j 1_{P_j}(x)$$

$$\implies \varphi_y = \sum_{j=1}^m d_j 1_{P_j} \implies \varphi_y \in \mathcal{T}_p$$

IV  $\implies \sum_{j=1}^m d_j v_p(P_j) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) dx$  ist unabhängig von der Darstellung von  $\varphi_y$  (und damit auch von  $\varphi$ ).

$$\text{Def. } \phi : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R} \text{ durch } \phi(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) dx = \sum_{j=1}^m d_j(y) v_p(P_j) = \sum_{j=1}^m c_j 1_{R_j}(y) v_p(P_j) = \sum_{j=1}^m \underbrace{c_j v_p(P_j)}_{=: e_j} 1_{R_j}(y)$$

$$\implies \phi = \sum_{j=1}^m e_j \cdot 1_{R_j} \implies \phi \in \mathcal{T}_{n-p}$$

IV  $\implies \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \phi(y) dy = \sum_{j=1}^m e_j v_{n-p}(R_j) = \sum_{j=1}^m c_j v_p(P_j) v_{n-p}(R_j) = \sum_{j=1}^m c_j v_n(Q_j)$  ist unabhängig von der Darstellung von  $\varphi$ . ■

Aus dem Beweis von 15.2 folgt:

**Satz 15.3 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen)**

Ist  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  und  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  so gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) dz = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left( \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi(x, y) dy \right) dx$$

**Satz 15.4 (Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen)**

Es seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$(1) \int (\alpha\varphi + \beta\psi) dx = \alpha \int \varphi dx + \beta \int \psi dx$$

$$(2) \left| \int \varphi dx \right| \leq \int |\varphi| dx$$

$$(3) \text{ Aus } \varphi \leq \psi \text{ auf } \mathbb{R}^n \text{ folgt } \int \varphi dx \leq \int \psi dx$$

**Beweis**

(1) Übung

(2) Sei  $\varphi = \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j}$  wie in (\*). Wegen 15.1: O.B.d.A:  $Q_j \cap Q_k = \emptyset$  ( $j \neq k$ ). Dann:  
 $|\varphi| = \sum_{j=1}^m |c_j| 1_{Q_j}$ .

$$\implies \left| \int \varphi dx \right| = \left| \sum_{j=1}^m c_j v_n(Q_j) \right| \leq \sum_{j=1}^m |c_j| v_n(Q_j) = \int |\varphi| dx.$$

(3) Übung ■



# 16. Das Lebesguesche Integral

Es sei  $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  Im Folgenden lassen wir Funktionen und Reihen mit Werten in  $\tilde{\mathbb{R}}$  zu.

**Regeln:**  $a < \infty \forall a \in \mathbb{R}$ .  $\infty \leq \infty$ ,  $\infty \pm c = c \pm \infty = \infty \forall c \in \tilde{\mathbb{R}}$ .  $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty \forall c \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ .  
 $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$ . Ist  $(a_n)$  eine Folge in  $\tilde{\mathbb{R}}$  und  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \infty$ , falls alle  $a_n \in \mathbb{R}$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert;  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \infty$ , falls  $a_n = \infty$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $A \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$  und  $a \geq 0 \forall a \in A$ .

$$\inf A := \begin{cases} \infty & , \text{ falls } A = \{\infty\} \\ \inf(A \setminus \{\infty\}) & , \text{ falls } A \setminus \{\infty\} \neq \emptyset \end{cases}$$

**Motivation:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion,  $f \geq 0$  auf  $\mathbb{R}$  und  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$ .  
 Es seien  $Q_1, Q_2, \dots$  offene Quader im  $\mathbb{R}^1$  und  $c_1, c_2, \dots \geq 0$ . Es gelte  $f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x) \forall x \in \mathbb{R}$  ( $\sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x) = \infty$  ist zugelassen!)

Dann kann man  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_1(Q_k)$  betrachten als obere Approximation an den „Inhalt“ von  $M$ . ( $\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_1(Q_k) = \infty$  ist zugelassen)

Im Folgenden bedeutet  $\sum_k$  entweder eine endliche Summe oder eine unendliche Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \dots$

## Definition

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Seien  $(Q_1, c_1), (Q_2, c_2), \dots$  endlich viele oder abzählbar viele Paare mit  $Q_j$  offener Quader und  $c_j \in [0, \infty)$  und es gelte  $|f(x)| \leq \sum_k c_k 1_{Q_k}(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Dann heißt  $\Phi := \sum_k c_k 1_{Q_k}$  eine **Hüllreihe** für  $f$  und  $I(\Phi) := \sum_k c_k v_n(Q_k)$  ihr **Inhalt**.  $\mathcal{H}(f) := \{\Phi : \Phi \text{ ist eine Hüllreihe für } f\}$   $\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) : \Phi \in \mathcal{H}(f)\}$  ( $L^1$ -**Halbnorm** von  $f$ .)

**Beachte:**  $\|f\|_1 \geq 0$ ,  $\|f\|_1 = \infty$  ist zugelassen.

**Behauptung:**  $\mathcal{H}(f) \neq \emptyset$

**Beweis:** Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $Q_k := (-k, k) \times \dots \times (-k, k) (\subseteq \mathbb{R}^n)$ .  $\Phi := \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot 1_{Q_k}$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n \implies \exists m_0 \in \mathbb{N} : x \in Q_{m_0} \implies x \in Q_k \forall k \geq m_0 \implies \Phi(x) \geq \sum_{k=m_0}^{\infty} 1 \cdot \underbrace{1_{Q_k}}_{=1} = \infty \implies$

$|f(x)| \leq \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$ .  
 $(I(\Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^n = \infty)$ .

## Beispiel

$(n = 1), A = \{0\} (\subseteq \mathbb{R}); f := 1_A$  (also:  $f(0) = 1, f(x) = 0 \forall x \neq 0$ ).

Sei  $\varepsilon > 0, Q := (-\varepsilon, \varepsilon), \Phi := 1_Q \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$ .

$I(\Phi) = v_1(Q) = 2\varepsilon \implies \|f\|_1 \leq 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|f\|_1 = 0$ . Aber:  $f \neq 0$

**Satz 16.1 (Rechenregeln der  $L^1$ -Halbnorm)**Seien  $f, g, f_1, g_1, \dots : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  Funktionen.

- (1)  $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1 \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- (2)  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
- (3) Aus  $|f| \leq |g|$  auf  $\mathbb{R}^n$  folgt  $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$
- (4)  $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1$

**Beweis**

- (1) Klar
- (2) O.B.d.A.:  $\|f_1\|_1 + \|g_1\|_1 < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \Phi_1 \in \mathcal{H}(f), \exists \Phi_2 \in \mathcal{H}(g): I(\Phi_1) \leq \|f\|_1 + \varepsilon, I(\Phi_2) \leq \|g\|_1 + \varepsilon$ .  $\Phi := \Phi_1 + \Phi_2 \implies \Phi \in \mathcal{H}(f + g)$  und  $I(\Phi) = I(\Phi_1) + I(\Phi_2) \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + 2\varepsilon \implies \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Beh.}$
- (3) Sei  $\Phi \in \mathcal{H}(g) \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$ . Also:  $\mathcal{H}(g) \subseteq \mathcal{H}(f) \implies \text{Beh.}$
- (4) In der Übung ■

**Satz 16.2 ( $L^1$ -Halbnorm eines Quaders)**Es sei  $Q$  ein abgeschlossener Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Dann:

$$v_n(Q) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_Q dx = \|1_Q\|_1$$

**Beweis** $f := 1_Q$ .  $\int f dx \stackrel{\S 15}{=} v_n(Q)$ . Zu zeigen:  $v_n(Q) = \|f\|_1$ .

- (1) Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein offener Quader  $\hat{Q}$  mit:  $Q \subseteq \hat{Q}$  und  $v_n(\hat{Q}) = v_n(Q) + \varepsilon$ .  $\Phi := 1_{\hat{Q}} \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$  und  $I(\Phi) = v_n(\hat{Q}) = v_n(Q) + \varepsilon \implies \|f\|_1 \leq v_n(Q) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|f\|_1 \leq v_n(Q)$
- (2) Sei  $\Phi = \sum_k c_k 1_{Q_k} \in \mathcal{H}(f)$ , also  $c_k \geq 0$ ,  $Q_k$  offene Quader.

Sei  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Für  $x \in Q$ :  $1 = 1_Q(x) = f(x) = |f(x)| \leq \sum_k c_k 1_{Q_k}(x)$ 

$\exists n(x) \leq \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n(x)} c_k 1_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon$  und (o.B.d.A.)  $1_{Q_k}(x) = 1$  ( $k = 1, \dots, n(x)$ ).  
 $Q_1, \dots, Q_{n(x)}$  offen  $\implies \exists \delta_x > 0 : U_{\delta_x}(x) \subseteq Q_j$  ( $j = 1, \dots, n(x)$ )  $\implies \sum_{k=1}^{n(x)} c_k 1_{Q_k}(z) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall z \in U_{\delta_x}(x)$  (\*).

$$Q \subseteq \bigcup_{x \in Q} U_{\delta_x}(x) \stackrel{2.2(3)}{\implies} \exists x_1, \dots, x_p \in Q : Q \subseteq \bigcup_{j=1}^p U_{\delta_{x_j}}(x_j)$$

$N := \max\{n(x_1), \dots, n(x_p)\}$ .  $\varphi_1 := \sum_{k=1}^N c_k 1_{Q_k}$ ,  $\varphi_2(x) := (1 - \varepsilon)1_Q$ . Also:  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}_n$ .

$$\int \varphi_2 dx = (1 - \varepsilon)v_n(Q), \int \varphi_1 dx = \sum_{k=1}^N c_k v_n(Q_k) \leq \sum_k v_k v_n(Q_k) = I(\Phi)$$

Sei  $x \notin Q$ :  $\varphi_2(x) = 0 \leq \varphi_1(x)$ .

Sei  $z \in Q$ :  $\exists j \in \{1, \dots, p\} : z \in U_{\delta_{x_j}}(x_j) \implies \varphi_1(z) = \sum_{k=1}^N c_k 1_{Q_k}(z) \geq \sum_{k=1}^{n(x_j)} c_k 1_{Q_k}(z) \geq 1 - \varepsilon = \varphi_2(z)$ . Also  $\varphi_2 \leq \varphi_1$  auf  $\mathbb{R}^n$ . 15.4  $\implies \int \varphi_2 dx \leq \int \varphi_1 dx \implies (1 - \varepsilon)v_n(Q) \leq I(\Phi)$ .

$\Phi \in \mathcal{H}(f)$  beliebig  $\implies (1 - \varepsilon)v_n(Q) \leq \|f\|_1$ . Also:  $(1 - \varepsilon)v_n(Q) \leq \|f\|_1 \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v_n(Q) \leq \|f\|_1$ .

(1) und (2)  $\implies v_n(Q) = \|f\|_1$  ■

**Vorbemerkung:** Es sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  ein nicht offene Quader. Dann existieren Quader  $Q_1, \dots, Q_\nu \subseteq \partial Q$  mit:  $Q = Q^0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_\nu$  und  $Q^0, Q_1, \dots, Q_\nu$  paarweise disjunkt. Insbesondere:  $v_n(Q_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, \nu$ ) und  $1_Q = 1_{Q^0} + 1_{Q_1} + \dots + 1_{Q_\nu}$ .

### Satz 16.3 ( $L^1$ -Halbnorm einer Treppenfunktion)

Sei  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  und  $Q$  ein beliebiger Quader im  $\mathbb{R}^n$ .

(1)  $\mathcal{H}(\varphi) = \mathcal{H}(|\varphi|)$ ,  $\|f\|_1 = \| |\varphi| \|_1$

(2)  $\|\varphi\|_1 = \int |\varphi| dx$

(3)  $v_n(Q) = \int 1_Q dx = \|1_Q\|_1$

### Beweis

(1) Klar

(2) Sei  $\varphi = \sum_{k=1}^m \hat{c}_k 1_{\hat{Q}_k}$  wobei  $\hat{c}_k \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_m$  passende disjunkte Quader. Anwendung der Vorbemerkung auf jeden nichtoffenen Quader  $\hat{Q}_j$  liefert:

$$\varphi = \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^r d_k 1_{R_k}$$

wobei  $Q_1, \dots, Q_s, R_1, \dots, R_r$  paarweise disjunkt,  $Q_1, \dots, Q_s$  offen,  $v_n(R_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, r$ ). Wegen (1): O.B.d.A:  $\varphi \geq 0$ ; dann:  $c_k, d_k \geq 0$ ,  $\alpha := \sum_{k=1}^r d_k$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Zu jedem  $R_k$  existiert ein Quader  $\hat{R}_k$ :  $v_n(\hat{R}_k) = \varepsilon$ .

$$\Phi := \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^r d_k 1_{\hat{R}_k} \implies \Phi \in \mathcal{H}(f)$$

und

$$I(\Phi) = \underbrace{\sum_{k=1}^s c_k v_n(Q_k)}_{=\int \varphi dx} + \underbrace{\sum_{k=1}^r d_k v_n(\hat{R}_k)}_{=\varepsilon \alpha} = \int \varphi dx + \varepsilon \alpha \implies \|\varphi\|_1 \leq \int \varphi dx + \varepsilon \alpha$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi\|_1 \leq \int \varphi dx$$

Wähle einen *abgeschlossenen* Quader  $Q$  mit  $Q_1 \cup \dots \cup Q_s \cup R_1 \cup \dots \cup R_r \subseteq Q$ . Dann:  $\varphi(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$ ,  $m := \max\{\varphi(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ ,  $\psi := m \cdot 1_Q - \varphi \in \mathcal{T}_n \implies \psi \geq 0$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Wie oben:  $\|\psi\|_1 \leq \int \psi dx$ .  $\int \psi dx = \int (m \cdot 1_Q - \varphi) dx = m \int 1_Q dx - \int \varphi dx \leq m \int 1_Q dx - \|\psi\|_1 \stackrel{16.2}{=} m \|1_Q\|_1 - \|\psi\|_1 = \|m \cdot 1_Q\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi\|_1$ .

(3) folgt aus (2) und  $\varphi = 1_Q$  ■

**Satz 16.4 (Integration und Grenzwertbildung bei Treppenfunktionen)**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ , seien  $(\varphi_k), (\psi_k)$  Folgen in  $\mathcal{T}_n$  mit  $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0, \|f - \psi_k\|_1 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Dann sind  $(\int \varphi_k dx)$  und  $(\int \psi_k dx)$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$  und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \psi_k dx$$

**Beweis**

$a_k := \int \varphi_k dx, b_k := \int \psi_k dx$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

$|a_k - a_l| = |\int \varphi_k dx - \int \varphi_l dx| = |\int (\varphi_k - \varphi_l) dx| \stackrel{15.4}{\leq} \int |\varphi_k - \varphi_l| dx \stackrel{16.3}{=} \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 = \|\varphi_k - f + f - \varphi_l\|_1 \leq \|\varphi_k - f\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1 \implies (a_k)$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  und als solche konvergent. Genau so:  $(b_k)$  ist konvergent.

$a := \lim a_k, b := \lim b_k. |a_k - b_k| \stackrel{\text{wie oben}}{\leq} \|f - \varphi_k\|_1 + \|f - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a = b$  ■

**Definition**

(1)  $L(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} : \exists \text{ Folge } (\varphi_k) \in \mathcal{T}_n \text{ mit: } \|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0 \text{ (} k \rightarrow \infty \text{)}\}$

(2) Ist  $f \in L(\mathbb{R}^n)$ , so heißt  $f$  **Lebesgueintegrierbar über  $\mathbb{R}^n$** .

(3) Ist  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $(\varphi_k)$  eine Folge in  $\mathcal{T}_n$  mit  $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$ , so heißt

$$\int f dx := \int f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$$

das **Lebesgueintegral** von  $f$  über  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung:** (1) Wegen 16.4 ist  $\int f dx$  wohldefiniert und reell.

(2) Ist  $\varphi \in \mathcal{T}_n$ , so wähle  $(\varphi_k) = (\varphi, \varphi, \varphi, \dots) \implies \varphi \in L(\mathbb{R}^n)$  und Integral von  $\varphi$  aus §15 stimmt mit obigem Integral überein. Insbesondere:  $\mathcal{T}_n \subseteq L(\mathbb{R}^n)$

**Satz 16.5 (Rechenregeln für Lebesgueintegrale)**

Es seien  $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- (1)  $\alpha f + \beta g \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$
- (2)  $|f| \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $|\int f dx| \leq \int |f| dx = \|f\|_1$
- (3) Aus  $f \leq g$  auf  $\mathbb{R}^n$  folgt:  $\int f dx \leq \int g dx$
- (4) Ist  $g$  auf  $\mathbb{R}^n$  beschränkt  $\implies fg \in L(\mathbb{R}^n)$ .

### Beweis

(1) Klar.

(2)  $\exists$  Folge  $(\varphi_k)$  in  $\mathcal{T}_n$  mit  $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  $|\varphi_k| \in \mathcal{T}_n$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).  $\|f| - |\varphi_k|\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{16.4} 0$ .  
 $\lim |\int \varphi_k dx| \stackrel{15.4}{\leq} \lim \underbrace{\int |\varphi_k| dx}_{\stackrel{16.3}{=} \|\varphi_k\|_1} = \int |f| dx$ .

$$\|f\|_1 = \|f - \varphi_k + \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|\varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int |f| dx. \|\varphi_k\|_1 = \|\varphi_k - f + f\|_1 \leq \|\varphi_k - f\|_1 + \|f\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int |f| dx \leq \|f\|_1$$

(3) Es ist  $g - f \geq 0$  auf  $\mathbb{R}^n$ .  $\int g dx - \int f dx \stackrel{(1)}{=} \int \underbrace{(g - f)}_{>0} dx = \int |g - f| dx \stackrel{(2)}{=} \|g - f\|_1 \geq 0$ .

(4)  $\exists M \geq 0 : |g| \leq M$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$ .  $\exists \varphi_k \in \mathcal{T}_n : \|f - \varphi_k\|_1 \leq \frac{1}{2Mk}$ .  $\exists \gamma \geq 0 : |\varphi_k| \leq \gamma$  auf  $\mathbb{R}^n$ .  $\exists \psi_k \in \mathcal{T}_n : \|g - \psi_k\|_1 \leq \frac{1}{2\gamma k}$ . Dann:  $\varphi_k \psi_k \in \mathcal{T}_n$ .

$$|fg - \varphi_k \psi_k| = |gf - g\varphi_k + g\varphi_k - \varphi_k \psi_k| \leq |g||f - \varphi_k| + |\varphi_k||g - \psi_k| \leq M|f - \varphi_k| + \gamma|g - \psi_k| \stackrel{16.1}{\leq} \|fg - \varphi_k \psi_k\|_1 \leq M\|f - \varphi_k\|_1 + \gamma\|g - \psi_k\|_1 \leq M \cdot \frac{1}{2Mk} + \gamma \frac{1}{2\gamma k} = \frac{1}{k} \implies \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

### Definition

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  (nicht  $\tilde{\mathbb{R}}$ !) seien Funktionen.

$$\max(f, g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad (x \in D)$$

$$\min(f, g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \quad (x \in D)$$

$$f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \max(-f, 0) = (-f)^+$$

Es ist  $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ ,  $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ ,  $f^+, f^- \geq 0$  auf  $D$  und  $f = f^+ - f^-$ .

### Folgerung 16.6

Gilt für  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dass  $f, g \in L(\mathbb{R}^n) \implies \max(f, g), \min(f, g), f^+, f^- \in L(\mathbb{R}^n)$ .

### Satz 16.7 („Kleiner“ Satz von Beppo Levi)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  sei eine Fkt.,  $(\varphi_k)$  sei eine Folge in  $\mathcal{T}_n$  mit:  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_k(x) \rightarrow f(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  und  $(\int \varphi_k dx)$  sei beschränkt.

Dann:  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f dx = \lim \int \varphi_k dx$  ( $\lim \int \varphi_k dx = \int \lim \varphi_k dx$ )

**Beweis**

$a_j := \int \varphi_{j+1} dx - \int \varphi_j dx$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).  $a_j \geq 0$  ( $j \in \mathbb{N}$ ).  $\sum_{j=1}^m a_j = \int \varphi_{m+1} dx - \int \varphi_1 dx \implies (\sum_{j=1}^m a_j)$  ist beschränkt.  $\xrightarrow{\text{Ana I}} \sum_{j=1}^{\infty} a_j$  konvergiert.

Für  $k \in \mathbb{N} : c_k := \sum_{j=k}^{\infty} a_j$ . Ana I  $\implies c_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $m \geq k : \sum_{j=k}^m (\varphi_{j+1} - \varphi_j) = \varphi_{m+1} - \varphi_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f - \varphi_k = \sum_{j=k}^{\infty} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)$ .

$\|f - \varphi_k\|_1 = \|\sum_{j=k}^{\infty} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)\|_1 \stackrel{16.1}{\leq} \sum_{j=k}^{\infty} \|\varphi_{j+1} - \varphi_j\|_1 \stackrel{16.3}{=} \sum_{j=k}^{\infty} \int |\varphi_{j+1} - \varphi_j| dx = \sum_{j=k}^{\infty} a_j = c_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\implies \|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\implies$  Beh. ■

**Definition**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) Ist  $f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  eine Fkt.:

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}, f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$$

$$\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$$

(2)  $L(A) := \{f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} : f_A \in L(\mathbb{R}^n)\}$ . Ist  $f \in L(A)$ , so heißt  $f$  **auf  $A$  Lebesgueintegrierbar** und  $\int_A f dx := \int_A f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx$  heißt das **Lebesgueintegral von  $f$  über  $A$** .  
 Bem.:  $\int_{\emptyset} f dx$  existiert und  $= 0$ .

**Satz 16.8 (Lebesgueintegral und  $L^1$ -Halbnorm)**

Die Sätze 16.5 bis 16.6 gelten sinngemäß für  $L(A)$ . Insbes.:

$$\|f\|_{1,A} = \int_A |f| dx$$

**Beispiel**

( $n = 1$ ),  $A := [0, 1]$ .

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in A \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Bekannt:  $f \notin R[0, 1]$ . Gr. Übung:  $f \in L(A)$  und  $\int_A f dx = 1$

**Satz 16.9 (Riemann- und Lebesgueintegrale)**

Sei  $I := [a, b]$  ( $a < b$ ),  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f \in R[a, b]$ . Dann:  $f \in L(I)$ ,

$$\underbrace{\int_a^b f dx}_{\text{R-Int.}} = \underbrace{\int_I f dx}_{\text{L-Int.}}$$

Also:  $R[a, b] \subset L([a, b])$

**Beweis**

$h := f_I$

- (1) Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_m\} \in \mathfrak{Z}$ ,  $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ ,  $m_j := \inf f(I_j)$ ,  $M_j := \sup f(I_j)$ ,  $Q_j := (x_{j-1}, x_j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Zu  $Z$  definiere  $\varphi \in \mathcal{T}_1$  durch:

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in Z \\ m_j & , x \in Q_j \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\int \varphi dx = \sum_{j=1}^m m_j \underbrace{v_1(Q_j)}_{=|I_j|} = s_f(Z)$$

Def.:  $\Phi := \sum_{j=1}^m (M_j - m_j) 1_{Q_j}$ ; Dann:  $0 \leq h - \varphi \leq \Phi$  auf  $\mathbb{R} \implies \Phi \in \mathcal{H}(h - f)$  und  $I(\Phi) = \sum_{j=1}^m (M_j - m_j) |I_j| = S_f(Z) - s_f(Z) \implies \|h - \varphi\|_1 \leq S_f(Z) - s_f(Z)$

- (2) Sei  $(Z_k)$  eine Folge in  $\mathfrak{Z}$  mit  $|Z_k| \rightarrow 0$ . Ana I, 23.18  $\implies S_f(Z_k) \rightarrow \int_a^b f dx$ ,  $s_f(Z_k) \rightarrow \int_a^b f dx$ . Zu jedem  $Z_k$  konstruiere  $\varphi_k \in \mathcal{T}_1$  wie in (1). Dann:  $\|h - \varphi_k\|_1 \leq S_f(Z_k) - s_f(Z_k) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\implies h \in L(\mathbb{R})$  und  $\int_{\mathbb{R}} h dx = \lim \int \varphi_k dx \stackrel{(1)}{=} \lim s_f(Z_k) = \int_a^b f dx \implies f \in L([a, b])$  und  $\int_{[a,b]} f dx = \int_{\mathbb{R}} h dx = \int_a^b f dx$ . ■

**Satz 16.10 (Konvergente Treppenfunktionsfolge)**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C(A, \mathbb{R})$  und  $f \geq 0$  auf  $A$ . Dann:  $\exists$  Folge  $(\varphi_k)$  in  $\mathcal{T}_n$  mit:  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi_k(x) \rightarrow f_A(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Insbes.:  $\varphi_k \leq f_A$  auf  $\mathbb{R}^n \forall k \in \mathbb{N}$

**Beweis**

$g := f_A$ ,  $\mathbb{Q}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\}$ ,  $\mathbb{Q}^+ := \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0\}$

Für  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ ,  $r \in \mathbb{Q}^+$ :  $W_r(a) := [a_1 - r, a_1 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r]$ .

$m_{r,a} := \inf g(W_r(a)) \geq 0$ ,  $\psi_{r,a} := m_{r,a} 1_{W_r(a)} \geq 0$ ,  $\psi_{r,a} \in \mathcal{T}_n$ .

Dann:  $0 \leq \psi_{r,a} \leq g$  auf  $\mathbb{R}^n$  (\*)

$\mathcal{T} := \{\psi_{r,a} : a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$ .  $\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^+$  abzählbar  $\implies \mathcal{T}$  ist abzählbar, etwa  $\mathcal{T} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$ .

$s(x) := \sup\{\psi(x) : \psi \in \mathcal{T}\}$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ )

Aus (\*) folgt:  $s(x) \leq g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ : Fall 1:  $x \notin A$ . Dann:  $0 = g(x) \leq s(x)$

Fall 2:  $x \in A$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $A$  offen,  $f$  stetig  $\implies \exists a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+ : |f(z) - f(x)| < \varepsilon \forall z \in W_r(a) \subseteq A$

## 16. Das Lebesguesche Integral

$$\begin{aligned} \implies g(z) &> f(x) - \varepsilon \quad \forall z \in W_r(a) \implies m_{r,a} \geq f(x) - \varepsilon \\ \implies g(x) - \varepsilon &\leq m_{r,a} = \psi_{r,a}(x) \leq s(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g(x) \leq s(x). \end{aligned}$$

Also:  $s = g$  auf  $\mathbb{R}^n$

$\varphi_k := \max(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ )  $\in \mathcal{T}_n$ .  $(\varphi_k)$  leistet das Verlangte. ■

### Satz 16.11 (Stetige und beschränkte Funktionen sind Lebesgue-Integrierbar)

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $f \in C(A, \mathbb{R})$  sei beschränkt. Dann:  $f \in L(A)$ .

#### Beweis

$f = f^+ - f^-$ ,  $f^+, f^- \in C(A, \mathbb{R})$ ,  $f^+, f^-$  beschr. auf  $A$ . O.B.d.A:  $f \geq 0$  auf  $A$ .

Sei  $(\varphi_k)$  wie in 16.10. Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader mit  $A \subseteq Q$ .  $\gamma := \sup\{f(x) : x \in A\}$ . Dann:

$\varphi_1 \leq \varphi_k \leq f_A \leq \gamma \cdot 1_Q$  auf  $\mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\implies \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \gamma \int 1_Q dx = \gamma v_1(Q) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\implies (\int \varphi_k dx) \text{ ist beschränkt. } 16.7 \implies f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A). \quad \blacksquare$$

### Satz 16.12 (Stetige und beschränkte Funktionen sind Lebesgue-Integrierbar)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  sei abg. und beschr. und  $f \in C(A, \mathbb{R})$ . Dann:  $f \in L(A)$ .

#### Beweis

3.4  $\implies \exists F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : F = f$  auf  $A$ . Sei  $Q$  ein offener Quader mit  $A \subseteq Q$ .  $\bar{Q}$  ist beschr. und abg. 3.3  $\implies F$  ist auf  $\bar{Q}$  beschr.  $\implies F$  ist auf  $Q$  beschr.  $\xrightarrow{16.11} F|_Q \in L(Q) \implies \underbrace{(F|_Q)_Q}_{=F_Q} \in$

$L(\mathbb{R}^n) \implies F_Q \in L(\mathbb{R}^n)$ .

$Q \setminus A$  ist offen und beschr.  $\xrightarrow{16.11} 1 \in L(Q \setminus A) \implies 1_{Q \setminus A} \in L(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{16.5} F_Q \cdot 1_{Q \setminus A} \in L(\mathbb{R}^n)$ .

Es ist  $f_A = F_Q - F_Q \cdot 1_{Q \setminus A} \xrightarrow{16.5} f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$ . ■

**Bezeichnungen:**  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$ . Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ .

Für  $y \in \mathbb{R}^m : A_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Für  $x \in \mathbb{R}^n : A_x := \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^m$ .

### Satz 16.13 (“Kleiner” Satz von Fubini)

$A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  sei beschränkt und offen und  $f \in C(A, \mathbb{R})$  sei beschränkt (also  $f \in L(A)$ , 16.11!).

$A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  sei beschränkt und abgeschlossen und  $f \in C(A, \mathbb{R})$  sei beschränkt (also  $f \in L(A)$ , 16.12!).

Dann:

- (1) Für jedes  $y \in \mathbb{R}^m$  ist die Funktion  $x \mapsto f(x, y)$  Lebesgueintegrierbar über  $A_y$   
 (2) Die Funktion  $y \mapsto \int_{A_y} f(x, y) dx$  ist Lebesgueintegrierbar über  $\mathbb{R}^m$  und

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy$$

- (3) Analog zu (1),(2):

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx$$

### Beweis

Nur für  $A$  beschränkt und offen (für  $A$  beschränkt und abgeschlossen ähnlich wie bei 16.12).  
 O.B.d.A.:  $f \geq 0$  auf  $A$  ( $f = f^+ - f^-$ ).

- (1) Sei  $(\varphi_k)$  eine Folge in  $\mathcal{T}_{n+m}$  wie in 16.10. Wie im Beweis von 16.11:  $(\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x, y) d(x, y))$  ist beschränkt. 16.7  $\implies \int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_A(x, y) d(x, y) = \lim \int \varphi_k(x, y) d(x, y)$   
 (2) Sei  $y \in \mathbb{R}^m$  (fest).  $\Psi_k(x) := \varphi_k(x, y), g(x) := f_A(x, y) (x \in \mathbb{R}^n), \tilde{f}(x) := f(x, y) (x \in A_y)$   
 Dann:  $g = \tilde{f}_A$ .

Es gilt:  $\Psi_1 \leq \Psi_2 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_k(x) = \varphi_k(x, y) \rightarrow f_A(x, y) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ . ( $\Psi_k \in \mathcal{T}_n$ )  
 Übung:  $(\int \Psi_k(x) dx)$  beschränkt.

16.7  $\implies g \in L(\mathbb{R}^n)$ , also  $\tilde{f}_{A_y} \in L(\mathbb{R}^n) \implies \tilde{f} \in L(A_y) \implies (1)$ ,

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx}_{\int_{A_y} f(x, y) dx} = \lim \int \Psi_k dx = \lim \int \Psi_k(x, y) dx$$

- (3)  $\Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x, y) dx (y \in \mathbb{R}^m)$ . Dann:  $\Phi_k \in \mathcal{T}_m, \Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^m$ .

$$\Phi_k(y) \stackrel{(2)}{\implies} \int_{A_y} f(x, y) dx$$

$\forall y \in \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \Phi_k(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x, y) dx \right) dy \\ &\stackrel{15.3}{=} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x, y) d(x, y) \\ &\stackrel{(1)}{\implies} \int_A f(x, y) d(x, y) \end{aligned}$$

16.7  $\implies y \mapsto \int_{A_y} f(x, y) dx$  ist Lebesgueintegrierbar über  $\mathbb{R}^m$  und

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy = \lim \int \Phi_k(y) dy = \int_A f(x, y) d(x, y) \quad \blacksquare$$

**Definition**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} (= \mathbb{R}^n)$ .  $A$  heißt **einfach bezüglich des 1. Faktors** ( $\mathbb{R}^{n-1}$ ) : $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$  ist  $A_x = \emptyset$  oder ein Intervall in  $\mathbb{R}$ .

Sei  $a \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} (= \mathbb{R}^n)$ .  $A$  heißt **einfach bezüglich des 2. Faktors** ( $\mathbb{R}^{n-1}$ ) : $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$  ist  $A_y = \emptyset$  oder ein Intervall in  $\mathbb{R}$ .

Aus 16.13 folgt:

**Satz 16.14 (Aufteilung des Integrals in Doppelintegrale)**

$A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  sei beschränkt und abgeschlossen und einfach bezüglich des 1. Faktors.

$$B := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : A_x \neq \emptyset\}.$$

Dann:

- (1)  $\forall x \in B$  ist  $A_x$  ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$
- (2)

$$\forall f \in C(A, \mathbb{R}) : \int_A f(x, y) d(x, y) = \int_B \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx$$

$A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$  sei beschränkt und abgeschlossen und einfach bezüglich des 2. Faktors.

$$B := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : A_y \neq \emptyset\}.$$

Dann:

- (1)  $\forall y \in B$  ist  $A_y$  ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$
- (2)

$$\forall f \in C(A, \mathbb{R}) : \int_A f(x, y) d(x, y) = \int_B \left( \int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy$$

$Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $f \in C(Q, \mathbb{R})$  :

$$\int_Q f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \left( \dots \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots \right) dx_n$$

Die Reihenfolge der Integration darf beliebig vertauscht werden.

**Beispiel**

<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Anmerkung des T<sub>E</sub>Xers: in jedem dieser Beispiele kommt eine Skizze vor, mit deren Hilfe man sich klar machen kann, dass die entsprechenden Mengen einfach bezüglich des 1. Faktors sind. Diese Skizzen sind hier (bisher) nicht wiedergegeben.

(1)  $(n = 2)$ ,  $Q := [0, 1] \times [1, 2]$ ,  $f(x, y) = xy$ .

$$\int_Q xy d(x, y) = \int_1^2 (\int_0^1 xy dx) dy = \int_1^2 (\frac{1}{2} x^2 y \Big|_{x=0}^{x=1}) dy = \int_1^2 \frac{1}{2} y dy = \frac{1}{4} y^2 \Big|_1^2 = \frac{3}{4}.$$

(2)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\}$ ,  $f(x, y) = xy^2$

$A$  ist einfach bezüglich des 1. Faktors

$$B = [0, 1]$$

Für  $x \in B : A_x = [x^2, x]$

$$\begin{aligned} \int_A xy^2 d(x, y) &= \int_0^1 (\int_{x^2}^x xy^2 dy) dx \\ &= \int_0^1 (\frac{1}{3} xy^3 \Big|_{y=x^2}^{y=x}) dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{3} x^7 dx = \frac{1}{40} \end{aligned}$$

(3)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $f(x, y) = y$

$$B = [-1, 1]$$

$x \in B : A_x = [0, \sqrt{1-x^2}]$ ;

$$\begin{aligned} \int_A y d(x, y) &= \int_{-1}^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy) dx \\ &= \int_{-1}^1 (\frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-x^2) dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(4)  $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ ,  $f(x, y, z) = x$

$A$  ist einfach bezüglich des 1. Faktors ( $\mathbb{R}^2$ )

Für  $(x, y) \in B : A_{(x,y)} = [0, 1 - (x + y)]$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x + y \leq 1, y \geq 0\}$

$$\begin{aligned} \int_A x d(x, y, z) &= \int_B (\int_0^{1-(x+y)} x dz) d(x, y) = \int_B [xz]_{z=0}^{z=1-(x+y)} d(x, y) \\ &= \int_B x(1 - (x + y)) d(x, y) = \int_0^1 (\int_0^{1-x} x(1 - (x + y)) dy) dx = \frac{1}{24} (?) \end{aligned}$$



# 17. Quadrierbare Mengen

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $A$  heißt **quadrierbar** (qb) :  $\iff 1_A \in L(\mathbb{R}^n)$  ( $\iff 1 \in L(A)$ )

In diesem Fall heißt  $v_n(A) := \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx = \int_A 1 dx$  das  $n$ -dimensionale **Volumen** oder **Lebesguemaß** von  $A$ . **Beachte:**  $v_n(A) \in \mathbb{R}$

## Satz 17.1

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt. Ist  $A$  offen oder abgeschlossen, dann ist  $A$  quadrierbar.

## Beweis

16.11, 16.12 ■

## Beispiele:

- (1)  $\emptyset$  ist quadrierbar und  $v_n(\emptyset) = 0$ .
- (2) Sei  $Q$  ein Quader im  $\mathbb{R}^n \implies 1_Q \in \mathcal{T}_n \subseteq L(\mathbb{R}^n) \implies Q$  ist quadrierbar und  $n$ -dimensionale Volumen von oben gleich dem  $n$ -dimensionalen Volumen aus §15
- (3) Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  beschränkt und abgeschlossen,  $f \in C(D, \mathbb{R})$  und  $f \geq 0$  auf  $D$ .  
 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D, 0 \leq y \leq f(x)\}$ .  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\xrightarrow{17.1}$   $A$  ist quadrierbar (im  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).  $v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x, y) \stackrel{16.3}{=} \int_D \left( \int_0^{f(x)} 1 dy \right) dx = \int_D f(x) dx$
- (4)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x^2 + y^2 \leq r^2\}$  ( $r > 0$ ).  $A = \overline{U_r(0)}$ .  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\xrightarrow{17.1}$   $A$  ist quadrierbar.  $v_2(A) = \int_A 1 dx$ . Für  $x \in [-r, r]$ :  $A_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}] \implies v_n(A) = \int_{-r}^r \left( \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} 1 dy \right) dx = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{AI}{=} \pi r^2$ .

## Satz 17.2

$A, B, A_1, \dots, A_m$  seien  $\subseteq \mathbb{R}^n$  und quadrierbar.

- (1)  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$  sind quadrierbar und  
 $v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$ .
- (2) Aus  $A \subseteq B$  folgt  $v_n(A) \leq v_n(B)$ .
- (3)  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  ist quadrierbar und  
 $v_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \leq v_n(A_1) + \dots + v_n(A_m)$

**Beweis**

(1)  $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B \xrightarrow{16.5} 1_{A \cap B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \cap B$  ist quadrierbar.

$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B} \xrightarrow{16.5} 1_{A \cup B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \cup B$  ist quadrierbar.  $v_n(A \cup B) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A \cup B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx + \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx - \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A \cap B} dx = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$ .

$1_{A \setminus B} = 1_A(1 - 1_B) \xrightarrow{16.5} 1_{A \setminus B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \setminus B$  ist quadrierbar.

(2)  $A \subseteq B \implies 1_A \leq 1_B$  auf  $\mathbb{R}^n \implies v_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx = v_n(B)$

(3) folgt aus (1) mit Induktion ■

**Satz 17.3 (Prinzip von Cavalieri)**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} = \{(x, z) : x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\}$  beschränkt und abgeschlossen (also quadrierbar im  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Dann:

(1)  $\forall z \in \mathbb{R}$  ist  $A_z$  beschränkt und abgeschlossen (also quadrierbar im  $\mathbb{R}^n$ ).

(2)  $v_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}} v_n(A_z) dz$

**Beweis**

(1) Übung

(2)  $v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x, z) \stackrel{16.3}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left( \int_{A_z} 1 dx \right)}_{=v_n(A_z)} dz$  ■

**Beispiele:**

(1)  $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq z^2\}$ .  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\implies A$  ist quadrierbar. Für  $z \notin [0, 1] : A_z = \emptyset$ . Für  $z \in [0, 1] : A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2\} \implies v_2(A_z) = \pi z^2 \implies v_3(A) = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}$

(2) Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  und  $f \geq 0$  auf  $[a, b]$ . Graph von  $f$  rotiert um die  $x$ -Achse  $\rightarrow$  Rotationskörper  $A$ .  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ .  $A_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$  für  $x \in [a, b]$ .  $v_2(A_x) = \pi f(x)^2$ .  $v_3(A) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ .

**Speziell:**  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  ( $r > 0$ ),  $x \in [-r, r]$ .

Rotationskörper  $A = \overline{U_r(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$ .  $v_3(A) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

**Definition**

Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $N$  heißt eine **Nullmenge** genau dann, wenn  $F$  quadrierbar und  $v_n(N) = 0$  ist.

**Satz 17.4**

Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $N$  ist eine Nullmenge  $\iff \|1_N\|_1 = 0$ .

### Beweis

„ $\Rightarrow$ “:  $N$  Nullmenge  $\implies 1_N \in L(\mathbb{R}^n)$ . 16.5  $\implies \|1_N\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} 1_N dx = v_n(N) = 0$ . „ $\Leftarrow$ “: Setze  $(\varphi_k) := (0, 0, 0, \dots)$ ;  $(\varphi_k)$  ist eine Folge in  $\mathcal{T}_n$ :  $\|1_N - \varphi_k\|_1 = \|1_N\|_1 = \|1_N\|_1 \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0 \forall k \in \mathbb{N} \implies 1_N \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int 1_N dx = \lim \int \varphi_k dx = 0 \implies N$  ist quadrierbar und  $v_n(N) = 0$ . ■

### Satz 17.5

$N, N_1, N_2, \dots$  seien Nullmengen im  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Ist  $M \subseteq N \implies M$  ist eine Nullmenge.

(2)  $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$  ist eine Nullmenge.

### Beweis

(1)  $1_M \leq 1_N \xrightarrow{16.1} \|1_M\|_1 \leq \|1_N\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \implies \|1_M\|_1 = 0 \implies \text{Beh.}$

(2)  $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ;  $1_A \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{N_k} \xrightarrow{16.1} \|1_A\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{N_k}\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \implies \text{Beh.}$  ■

### Beispiele:

(1) Sei  $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $N := \{x_0\} = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\}$ .  $N$  ist ein Quader, also quadrierbar,  $v_n(N) = 0$ ,  $N$  ist eine Nullmenge.

(2) Beispiel (1) und 17.5(2) liefern: Jede abzählbare Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist eine Nullmenge

(3) Ist  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $Q$  ist eine Nullmenge  $\iff a_j = b_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

### Satz 17.6

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  sei beschränkt und abgeschlossen, es sei  $f \in C(D, \mathbb{R})$  und  $G_f := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist  $G_f$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### Beweis

$G_f$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\xrightarrow{17.1} G_f$  ist qb.  $v_{n+1}(G_f) = \int_{G_f} 1 d(x, y) \stackrel{16.13}{=} \int_D \left( \int_{f(x)}^{f(x)} 1 dy \right) dx = 0$ . ■

### Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und (E) eine Eigenschaft, welche die Elemente von  $A$  betrifft. (E) gilt **fast überall (f.ü.)** auf  $A$  :  $\iff \exists$  Nullmenge  $N \subseteq A$  mit: (E) gilt für alle  $x \in A \setminus N$ .

### Beispiel

$f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  sei eine Funktion.  $f = 0$  f.ü. auf  $A$   $\iff \exists$  Nullmenge  $N \subseteq A$  :  $f(x) = 0 \forall x \in A \setminus N$ .

**Satz 17.7**

- (1)  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  seien Funktionen mit  $f = g$  f.ü. auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann:  $f \in L(\mathbb{R}^n) \iff g \in L(\mathbb{R}^n)$ . I. d. Fall:  $\int f dx = \int g dx$ .
- (2) Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f \in L(A) \cap L(B)$  und  $A \cap B$  sei eine Nullmenge. Dann:  $f \in L(A \cup B)$  und  $\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$ .

**Beweis**

- (1)  $\exists$  Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^n : f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ . Sei  $f \in L(\mathbb{R}^n) \implies \exists$  Folge  $(\varphi_k)$  von Treppenfunktionen mit:  $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$  und  $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$ .

$$f_k := 1_N \ (k \in \mathbb{N}), \ h := \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \ \|h\|_1 \stackrel{16.1}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \implies \|h\|_1 = 0.$$

$$\text{Es ist } |g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + h \text{ auf } \mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|g - \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|h\|_1 = \|f - \varphi_k\|_1 \implies \|g - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0 \implies g \in L(\mathbb{R}^n) \text{ und } \int g dx = \lim \int \varphi_k dx = \int f dx.$$

- (2) Wegen (1) o.B.d.A:  $f = 0$  auf  $A \cap B$ . Dann:  $f_{A \cup B} = f_A + f_B \stackrel{16.5}{\in} L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A \cup B)$  und  $\int_{A \cup B} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_{A \cup B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_B dx = \int_A f dx + \int_B f dx$ . ■

**Satz 17.8**

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  sei eine Funktion.

- (1) Ist  $\|f\|_1 < \infty$  und  $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\} \implies N$  ist eine Nullmenge. Dies ist z.B. der Fall, wenn  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  (16.5:  $\|f\|_1 = \int |f| dx$ )
- (2)  $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$  f.ü. auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis**

- (1) Sei  $\varepsilon > 0 : 1_N \leq \varepsilon |f|$  auf  $\mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|1_N\|_1 \leq \varepsilon \|f\|_1 \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\implies} \|1_N\|_1 = 0 \stackrel{17.4}{\implies} \text{Beh.}$

- (2) „ $\implies$ “: Für  $k \in \mathbb{N} : N_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$ . Dann:  $1_{N_k} \leq k|f|$  auf  $\mathbb{R}^n \stackrel{16.1}{\implies} \|1_{N_k}\|_1 \leq k\|f\|_1 = 0 \stackrel{17.4}{\implies} N_k$  ist eine Nullmenge  $\stackrel{17.5}{\implies} N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$  ist eine Nullmenge. Es ist  $N = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \implies f = 0$  f.ü. auf  $\mathbb{R}^n$ .

$$\text{„}\Leftarrow\text{“: } |f| = 0 \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}^n \stackrel{17.7}{\implies} |f| \in L(\mathbb{R}^n) \text{ und } \int |f| dx = \int 0 dx = 0. \ 16.5 \implies \|f\|_1 = \int |f| dx = 0. \quad \blacksquare$$

**Definition**

Seien  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  abgeschlossene Quader im  $\mathbb{R}^n$  und  $A := Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$ . Dann heißt  $A$  eine **Figur**.

**Satz 17.9**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ex. Figuren  $A_1, A_2, \dots$  mit  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  und  $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Ist  $U$  qb  $\implies v_n(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(A_k) = \sup\{v_n(A_k) : k \in \mathbb{N}\}$ .

**Beweis**

Für  $a \in \mathbb{Q}^n$  und  $r \in \mathbb{Q}^+$  sei  $W_r(a)$  wie im Beweis von 16.10.

$\mathcal{Q} := \{W_r(a) : a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+, W_r(a) \subseteq U\}$ ,  $U$  offen  $\implies \mathcal{Q} \neq \emptyset$ .

Es ist  $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots\}$ ,  $A_k := Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). ( $A_k$ ) leistet das Verlangte.

Sei  $U$  qb.  $\varphi_k := 1_{A_k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ )  $\implies \varphi_k \in \mathcal{T}_n$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi_k(x) \rightarrow 1_U(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi_1 \leq \varphi_k \leq 1_U$  auf  $\mathbb{R}^n \implies \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \int 1_U dx = v_n(U)$ . 16.7  $\implies \lim \underbrace{\int \varphi_k dx}_{v_n(A_k)} = \int 1_U dx = v_n(U)$ . ■

**Satz 17.10**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann ex. Quader  $Q_1, Q_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$  mit:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } Q_k^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset \ (j \neq k)$$

Ist  $U$  qb  $\implies v_n(U) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k)$ .

**Beweis**

In der gr. Übung. ■

**Satz 17.11**

Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $N$  ist eine Nullmenge  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$  Quader  $Q_1, Q_2, \dots$  im  $\mathbb{R}^n$  mit: (\*)  
 $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon$ .

**Beweis**

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . Seien  $Q_1, Q_2, \dots$  wie in (\*). Dann:  $1_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}$  auf  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{16.1} \|1_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \int 1_{Q_k} dx = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon \implies \|1_N\|_1 = 0 \xrightarrow{17.4} N$  ist eine Nullmenge.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . Es genügt z.z.:  $\exists$  offene Menge  $U$  mit:  $N \subseteq U$ ,  $U$  ist qb und  $v_n(U) < \varepsilon$  (wegen 17.10).

$\|2 \cdot 1_N\|_1 = 2\|1_N\|_1 \stackrel{17.4}{=} 0 \implies \exists \Phi \in \mathcal{H}(2 \cdot 1_N) : I(\Phi) < \varepsilon$ . Sei  $\Phi = \sum_k c_k 1_{R_k}$ , wobei  $c_k \geq 0$ ,  $R_k$  offene Quader. O.B.d.A:  $\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{R_k}$ .

## 17. Quadrierbare Mengen

$\varphi_m := \sum_{k=1}^m c_k 1_{R_k} \in \mathcal{T}_n$ ;  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \Phi$ ;  $\varphi_m(x) \rightarrow \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $\int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_m dx = \sum_{k=1}^m c_k v_n(R_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_n(R_k) = I(\Phi) < \varepsilon$ .

16.7  $\implies \Phi \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int \Phi dx = \lim \int \varphi_m dx = I(\Phi) < \varepsilon$ .

$U := \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) > 1\}$ .  $x \in N \implies \Phi(x) \geq 2 \cdot 1_N(x) = 2 \implies x \in U$ . Also:  $N \subseteq U$ .  $U$  offen,  $U$  qb,  $v_n(U) < \varepsilon$ . ■

### Folgerung 17.12

Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ :  $U$  ist offen,  $U$  ist quadrierbar,  $N \subseteq U$  und  $v_n(U) < \varepsilon$ .

### Beweis

Beweis von 17.11 ■

### Satz 17.13

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt und fast überall stetig auf  $A$ . Dann:  $f \in L(A)$ .

### Beweis

$\exists \gamma \geq 0 : |f| \leq \gamma$  auf  $A$ .  $\exists$  Nullmenge  $N \subseteq A$ :  $f$  ist stetig auf  $A \setminus N$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . 17.12  $\implies \exists$  offene und quadrierbare Menge  $U$  mit  $N \subseteq U, v_n(U) < \varepsilon$ .  $A \setminus U \subseteq A \setminus N$ ,  $f$  stetig auf  $A \setminus U$ ,  $A \setminus U$  ist beschränkt und abgeschlossen. 16.12  $\implies f \in L(A \setminus U) \implies f_{A \setminus U} \in L(\mathbb{R}^n) \implies \exists \varphi \in \mathcal{T}_n : \|f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$ . Es ist  $|f_A - f_{A \setminus U}| \leq \gamma \cdot 1_U$  auf  $\mathbb{R}^n$ .  $\xrightarrow{16.1} \|f_A - f_{A \setminus U}\|_1 \leq \gamma \|1_U\|_1 \stackrel{16.5}{=} \gamma \int 1_U dx = \gamma v_n(U) < \gamma \varepsilon$ . Dann:

$$\begin{aligned} \|f_A - \varphi\|_1 &= \|f_A - f_{A \setminus U} + f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \\ &\leq \|f_A - f_{A \setminus U}\|_1 + \|f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 \\ &\leq \gamma \varepsilon + \varepsilon \\ &= (\gamma + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

D.h.:  $\forall k \in \mathbb{N} \exists \varphi_k \in \mathcal{T}_n : \|f_A - \varphi_k\|_1 < \frac{\gamma+1}{k} \implies f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$ . ■

# 18. Konvergenzsätze

## Definition

Sei  $(f_k)$  eine Folge von Funktionen,  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ .

- (1)  $(f_k)$  heißt  **$L^1$ -konvergent gegen  $f$**  :  $\iff \|f - f_l\|_1 \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$
- (2)  $(f_k)$  heißt eine  **$L^1$ -Cauchyfolge** :  $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|f_k - f_l\|_1 < \varepsilon \ \forall k, l \geq k_0$ .

Ist  $(f_k)$   $L^1$ -konvergent gegen  $f$ , so ist  $(f_k)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge:  $\|f_l - f_k\|_1 = \|f_l - f + f - f_k\|_1 \geq \|f - f_l\|_1 + \|f - f_k\|_1$ .

### Satz 18.1 (Satz von Riesz-Fischer)

$(f_k)$  sei eine  $L^1$ -Cauchyfolge in  $L(\mathbb{R}^n)$ , also  $f_k \in L(\mathbb{R}^n) \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert ein  $f \in L(\mathbb{R}^n)$ :

- (1)  $\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$
- (2)  $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$
- (3)  $(f_k)$  enthält eine Teilfolge, die fast überall auf  $\mathbb{R}^n$  punktweise gegen  $f$  konvergiert.

(Ohne Beweis)

### Satz 18.2 (Satz von Beppo Levi)

Sei  $(f_k)$  eine Folge in  $L(\mathbb{R})$  mit  $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $(\int f_k dx)$  beschränkt.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  sei definiert durch  $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ . Dann:  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  und

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx \quad (= \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx)$$

## Beweis

Für  $k \geq l$  :  $\|f_k - f_l\|_1 \stackrel{16.5}{=} \int \underbrace{f_k - f_l}_{\geq 0} dx = \int f_k dx - \int f_l dx = |\int f_k dx - \int f_l dx|$ .  $(\int f_k dx)$  ist

beschränkt und monoton, also konvergent  $\implies (\int f_k dx)$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R} \implies (f_k)$  ist eine  $L^1$ -Cauchyfolge in  $L(\mathbb{R}^n)$ . 18.1  $\implies \exists g \in L(\mathbb{R}^n)$  mit:  $\int g dx = \lim \int f_k dx$  und  $(f_k)$  enthält eine Teilfolge, die fast überall auf  $\mathbb{R}^n$  punktweise gegen  $g$  konvergiert  $\implies f = g$  fast überall auf  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{17.7} f \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f dx = \int g dx = \lim \int f_k dx$ . ■

**Definition**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $(A_k)$  sei eine Folge von Teilmengen von  $A$ .  $(A_k)$  ist eine **Ausschöpfung von  $A$** :  $\iff A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$  und  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ .

**Satz 18.3**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $(A_k)$  sei eine Ausschöpfung von  $A$  und es sei  $f \in L(A_k) \forall k \in \mathbb{N}$ .  $f \in L(A) \iff (\int_{A_k} |f| dx)$  ist beschränkt. In diesem Fall:

$$\int_A f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f dx$$

**Beweis**

„ $\implies$ “:  $A_k \subseteq A \implies |f|_{A_k} \leq |f|_A \implies \underbrace{\int |f|_{A_k} dx}_{= \int |f| dx} \leq \int |f|_A dx$ .

„ $\impliedby$ “: OBdA:  $f \geq 0$  auf  $A$  ( $f = f^+ - f^-$ ). Dann:  $0 \leq f_{A_1} \leq f_{A_2} \leq f_{A_3} \leq \dots$ .  $|\int f_{A_k} dx| \leq \int |f|_{A_k} dx = \int_{A_k} |f| dx \implies (\int f_{A_k} dx)$  beschränkt. Es gilt:  $f_{A_k}(x) \rightarrow f_A(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ . 18.2  $\implies f_A \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f_A dx = \lim \int f_{A_k} dx \implies f \in L(A)$  und  $\int_A f dx = \lim \int_{A_k} f dx$ . ■

**Satz 18.4 (Uneigentliche Lebesgue- und Riemann-Integrale)**

Es sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ( $a \in \mathbb{R}$ ) und es gelte  $f \in R[a, t] \forall t > a$ . Dann:  $f \in L([a, \infty)) \iff \int_a^{\infty} f dx$  ist **absolut** konvergent. In diesem Fall:

$$\underbrace{\int_{[a, \infty)} f dx}_{\text{L-Int.}} = \underbrace{\int_a^{\infty} f dx}_{\text{uneigentl. R-Int.}}$$

**Beweis**

Sei  $(t_k)$  eine Folge in  $[a, \infty)$  mit:  $a < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  und  $t_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  $A_k := [a, t_k]$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $A := [a, \infty)$ . Für  $k \in \mathbb{N}$ :  $I_k := \int_a^{t_k} f dx$ ,  $J_k := \int_a^{t_k} |f| dx$  (R-Integrale). 16.9  $\implies f, |f| \in L([a, t_k])$  und  $I_k = \int_{A_k} f dx$ ,  $J_k = \int_{A_k} |f| dx$ .  $f \in L(A) \stackrel{18.3}{\iff} (\int |f| dx)$  ist beschränkt  $\iff (J_k)$  ist beschränkt  $\stackrel{J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots}{\iff} (J_k)$  konvergent  $\iff \int_a^{\infty} |f| dx$  konv. In diesem Fall:  $\int_A f dx \stackrel{16.3}{=} \lim \int_{A_k} f dx = \lim I_k = \int_a^{\infty} f dx$ . ■

**Beispiele:**

(1)  $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; Analysis 1  $\implies \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  abs. konv.  $\stackrel{18.4}{\implies} f \in L([0, 1])$ . Analysis 1  $\implies \int_0^1 \frac{1}{x} dx$  div.  $\stackrel{18.4}{\implies} f^2 \notin L([0, 1])$ .

$$(2) f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Analysis 1  $\implies \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$  konv., aber nicht abs. konv. 18.4  $\implies f \notin L([0, \infty))$ , aber  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  existiert im uneigentlichen R-Sinne.

### Satz 18.5

$(A_k), (B_k)$  seien Folgen qb Mengen im  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Ist  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  und  $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ . Dann gilt:  $A$  ist qb  $\iff (v_n(A_k))$  ist beschränkt ( $\iff (v_n(A_k))$  konvergiert).

I. d. Fall:  $v_n(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(A_k)$ .

(2) Für  $j \neq k$  sei  $B_j \cap B_k$  jeweils eine Nullmenge und  $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ .  $B$  ist qb  $\iff \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$  konvergiert.

I. d. Fall:  $v_n(B) = \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$ .

### Beweis

(1) Folgt aus 18.3 mit  $f \equiv 1$

(2)  $\tilde{A}_k := B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Dann:  $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2 \subseteq \dots$  und  $B = \bigcup_{k=1}^\infty \tilde{A}_k$ . 17.2  $\implies \tilde{A}_k$  ist qb und  $v_n(\tilde{A}_k) = v_n(B_1) + \dots + v_n(B_k)$ .  $B$  ist qb  $\stackrel{(1)}{\iff} (v_n(\tilde{A}_k))$  konvergiert  $\iff \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$  konvergiert.

I. d. Fall:  $v_n(B) \stackrel{(1)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(\tilde{A}_k) = \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$ . ■

### Satz 18.6 (Satz von Lebesgue (Majorisierte Konvergenz))

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $(f_k)$  eine Folge in  $L(A)$  und  $(f_k)$  konv. fast überall auf  $A$  punktweise gegen  $f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$

(1) Ist  $F \in L(A)$  und gilt  $|f_k| \leq F$  auf  $A \forall k \in \mathbb{N}$ , so ist  $f \in L(A)$  und  $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$ .

(2) Ist  $A$  qb und ex. ein  $M \geq 0$  mit  $(f_k) \leq M$  auf  $A \forall k \in \mathbb{N}$ , so ist  $f \in L(A)$  und  $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$ .

### Beweis

(1) O.B.d.A:  $A = \mathbb{R}^n$  (Übergang  $f \rightarrow f_A$ ).  $\exists$  Nullmenge  $N$  mit  $F(x) \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$  (17.8) und  $f_k(x) \rightarrow f(x) (k \rightarrow \infty) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ . Dann:  $f_k(x) \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N \forall k \in \mathbb{N}$ . Wegen 17.7 ändern wir ab:  $f(x) := f_k(x) := F(x) := 0 \forall x \in N \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann:  $f_k(x) \rightarrow f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Für  $k, \nu \in \mathbb{N} : g_k(x) := \sup\{f_j(x) : j \geq k\}; g_{k,\nu}(x) := \max\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_{k+\nu}(x)\}$ . Dann:  $|g_k|, |g_{k,\nu}| \leq F$  auf  $\mathbb{R}^n$ . 16.6  $\implies g_{k,\nu} \in L(\mathbb{R}^n)$ .

18. Konvergenzsätze

Sei  $k \in \mathbb{N}$  (fest).  $g_{k,1} \leq g_{k,2} \leq g_{k,3} \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $|\int g_{k,\nu} dx| \leq \int |g_{k,\nu}| dx \leq \int F dx \implies (\int g_{k,\nu} dx)_{\nu=1}^{\infty}$  ist beschränkt. Es gilt:  $g_{k,\nu}(x) \rightarrow g_k(x)$  ( $\nu \rightarrow \infty$ )  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . 18.2  $\implies g_k \in L(\mathbb{R}^n)$ . Es ist:  $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$ ; wie oben:  $(\int g_k dx)$  beschränkt. Weiter gilt:  $g_k(x) \rightarrow f(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

18.2  $\implies f \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f dx = \lim \int g_k dx$ .  $h_k(x) := \inf\{f_j(x) : j \geq k\}$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ). Analog:  $h_k \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f dx = \lim \int h_k dx$ . Es ist:  $h_k \leq f_k \leq g_k$  auf  $\mathbb{R}^n \implies \int h_k dx \leq \int f_k dx \leq \int g_k dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int f dx = \lim \int f_k dx$ .

(2) folgt aus (1):  $A$  qb  $\implies 1 \in L(A) \implies M \in L(A)$ ,  $F := M$ . ■

**Beispiel**

Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $f_k : [1, k] \rightarrow \mathbb{R}$  def. durch

$$f_k(x) := \frac{k^3 \sin(\frac{x}{k})}{(1+kx^2)^2}$$

Bestimme:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f_k(x) dx$ .

$$g_k(x) := \begin{cases} f_k(x), & x \in [1, k] \\ 0, & x > k \end{cases} \quad (x \in [1, \infty))$$

Sei  $x \in [1, \infty) \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [1, k] \forall k \geq k_0$ . Für  $k \geq k_0 : g_k(x) = f_k(x) = \frac{\sin(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{k^2 x^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{\sin(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{kx} + x)^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} =: f(x)$ .

$$|g_k(x)| = \underbrace{\left| \frac{\sin \frac{x}{k}}{\frac{x}{k}} \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\frac{1}{kx} + x)^2}}_{\leq \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{x^2} = f(x). \quad f_k \in R[1, k] \xrightarrow{16.9} f_k \in L([1, k]) \xrightarrow{17.7} g_k \in L([1, \infty))$$

$$\text{und } \int_{[1, \infty)} f dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1. \quad 18.6 \implies \underbrace{\int_{[1, \infty)} g_k dx}_{\int_1^k f_k dx} \rightarrow \int_{[1, \infty)} f dx = 1.$$

**Erinnerung:** (Ana I, 23.5):  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf  $[a, b]$  db und  $f' \in R[a, b]$ . Dann:  $\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$ .

**Satz 18.7**  
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei db auf  $[a, b]$  und  $f'$  sei auf  $[a, b]$  beschränkt. Dann:  $f' \in L([a, b])$  und  $\int_{[a, b]} f' dx = f(b) - f(a)$ .

**Beweis**

$M := \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$ .  $f_k(x) := \begin{cases} \frac{f(x+\frac{1}{k})-f(x)}{\frac{1}{k}}, & x \in [a, b - \frac{1}{k}] \\ 0, & x \in (b - \frac{1}{k}, b] \end{cases}$ . Ana I  $\implies f_k \in R[a, b] \xrightarrow{16.9} f \in L([a, b]) : |f(x + \frac{1}{k}) - f(x)| \stackrel{\text{MWS}}{=} |f'(\xi)| \frac{1}{k} \leq M \frac{1}{k}$  ( $x \in [a, b - \frac{1}{k}]$ )  $\implies$

$|f_k(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$ . Sei  $x \in [a, b) \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [a, b - \frac{1}{k}] \forall k \geq k_0$ . Für  $k \geq k_0$  :  
 $f_k(x) = \frac{f(x+\frac{1}{k})-f(x)}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(x)$ . Also:  $f_k(x) \rightarrow g(x) := \begin{cases} f'(x), & x \in [a, b) \\ 0, & x = b \end{cases} \forall x \in [a, b]$ .

18.6  $\implies g \in L([a, b]) \xrightarrow{17.7} f' \in L([a, b])$  und  $\int_{[a, b]} f' dx = \int_{[a, b]} g dx \stackrel{18.6}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f_k dx \stackrel{16.9}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k dx$ .

$f \in C[a, b] \xrightarrow{\text{Ana I}} f$  besitzt auf  $[a, b]$  eine Stammfunktion  $F$ .  $\int_a^b f_k(x) dx = k \int_a^{b-\frac{1}{k}} (f(x + \frac{1}{k}) - f(x)) dx = k \int_1^{b-\frac{1}{k}} f(x + \frac{1}{k}) dx - k \int_a^{b-\frac{1}{k}} f(x) dx \stackrel{z:=x+\frac{1}{k}}{=} \int_{a+\frac{1}{k}}^b f(z) dz - k \int_a^{b-\frac{1}{k}} f(x) dx = k(F(b) - F(a + \frac{1}{k})) - k(F(b - \frac{1}{k}) - F(a)) = \frac{F(b) - F(b - \frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} - \frac{F(a + \frac{1}{k}) - F(a)}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a)$ . ■



# 19. Messbare Mengen und messbare Funktionen

## Definition

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt (**Lebesgue-**)**messbar** (mb) :  $\iff \exists$  Folge quadrierbarer Mengen  $(A_k)$  mit

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$\mathfrak{L}_n := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ ist messbar}\}$ . Ist  $A$  quadrierbar  $\implies A \in \mathfrak{L}_n$ . Die Abbildung  $\lambda_n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  definiert durch

$$\lambda_n(A) := \begin{cases} v_n(A) & , \text{ falls } A \text{ quadrierbar} \\ \infty & , \text{ falls } A \text{ nicht quadrierbar} \end{cases}$$

heißt das **n-dimensional Lebesguemaß**.

## Beispiel

$\mathbb{R}^n \in \mathfrak{L}_n, \lambda_n(\mathbb{R}^n) = \infty$

### Satz 19.1

Es seien  $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{L}_n$

(1)  $A \setminus B, \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{L}_n$ .

(2) Sei  $B \subseteq A$

(i)  $\lambda_n(B) \leq \lambda_n(A)$ .

(ii) Ist  $B$  quadrierbar  $\implies \lambda_n(A \setminus B) = \lambda_n(A) - \lambda_n(B)$

(3)  $\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$ .

(4) Aus  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$  folgt

$$\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$$

(5) Ist  $A_1$  quadrierbar und  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$  folgt

$$\lambda_n\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$$

(6) Ist  $A_j \cap A_k = \emptyset$  ( $j \neq k$ ) folgt

$$\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$$

Ohne Beweis!

**Folgerung 19.2**

(1) Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen  $\implies A \in \mathfrak{L}_n$

(2) Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen  $\implies A \in \mathfrak{L}_n$

**Beweis**

(1) folgt aus 17.10

(2)  $\mathbb{R}^n \setminus A$  ist offen  $\xrightarrow{(1)} \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{L}_n \xrightarrow{19.1(1)} A \in \mathfrak{L}_n$ . ■

**Definition**

Sei  $A \in \mathfrak{L}_n$  und  $F : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  eine Funktion.  $f$  heißt **messbar**:  $\iff \exists$  Folge  $(\varphi_k)$  in  $\mathcal{T}_n$ :  $(\varphi_k)$  konvergiert fast überall auf  $\mathbb{R}^n$  punktweise gegen  $f_A$ .

**Satz 19.3**

$A \in \mathfrak{L}_n, f, g : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  seien Funktionen.

(1) Ist  $f \in L(A) \implies f$  ist messbar.

(2) Sind  $f, g$  messbar  $\implies f + g, f^+, f^-, cf$  ( $c \in \mathbb{R}$ ),  $|f|^p$  ( $p > 0$ ),  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$  sind messbar ( $\infty^p := \infty$ )

Ohne Beweis!

## 20. Satz von Fubini / Substitutionsregel

### Satz 20.1 (Satz von Fubini)

Ohne Beweis:  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$ . Es sei  $f \in L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ .

(1)  $\exists$  Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^m$  : für jedes  $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$  ist  $x \mapsto f(x, y)$  Lebesgueintegrierbar über  $\mathbb{R}^n$ .

(2) Mit

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx & , \text{ falls } y \in \mathbb{R}^m \setminus N \\ 0 & , \text{ falls } y \in N \end{cases}$$

$$\text{gilt: } F \in L(\mathbb{R}^m) \text{ und } \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} F(y) dy$$

### Satz 20.2 (Substitutionsregel)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  sei offen und beschränkt.  $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  sei auf  $U$  injektiv und Lipschitzstetig. Es sei  $B := \bar{U}$  ( $B$  beschränkt und abgeschlossen). Dann lässt sich  $\phi$  Lipschitzstetig auf  $B$  fortsetzen und für  $A := \phi(B)$  gilt:

$$\int_A f(x) dx = \int_B f(\phi(z)) |\det \phi'(z)| dz \quad \forall f \in C(A, \mathbb{R})$$

( $A$  beschränkt und abgeschlossen, im Allgemeinen ist auf der Nullmenge  $\partial U$   $\phi'$  nicht erklärt).

### Polarkoordinaten (n=2):

$r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = r \cdot \cos \varphi$ ,  $y = r \cdot \sin \varphi$  ( $r \geq 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ )  
 $\phi(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ .  $\det \phi'(r, \varphi) = r$ .

### Beispiele:

(1)  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ,  $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$ .  $B := [0, 1] \times [0, \pi] \implies$

$\phi(B) = A$ . Dann:

$$\begin{aligned}
 \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d(r, \varphi) \\
 &= \int_B r \sin \varphi \cdot r \cdot r \, d(r, \varphi) \\
 &= \int_0^\pi \left( \int_0^1 r^3 \sin \varphi \, dr \right) d\varphi \\
 &= \int_0^\pi \left[ \frac{1}{4} r^4 \sin \varphi \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi \\
 &= \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(2) Behauptung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

**Beweis:**  $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$ . Sei  $\varrho > 0$ .  $Q_\varrho := [0, \varrho] \times [0, \varrho]$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_\varrho} f(x, y) d(x, y) &= \int_0^\varrho \left( \int_0^\varrho e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx \\
 &= \left( \int_0^\varrho e^{-x^2} dx \right)^2
 \end{aligned}$$

$A_\varrho := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \varrho^2, x, y \geq 0\}$ ,  $B_\varrho = [0, \varrho] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\phi(B_\varrho) = A_\varrho$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{A_\varrho} f(x, y) d(x, y) &= \int_{B_\varrho} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d(r, \varphi) \\
 &= \int_{B_\varrho} r \cdot e^{-r^2} d(r, \varphi) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^\varrho r \cdot e^{-r^2} dr \right) d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\varrho r \cdot e^{-r^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\varrho \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-\varrho^2} + \frac{1}{2} \right) =: h(\varrho)
 \end{aligned}$$

$h(\varrho) \rightarrow \frac{\pi}{4}$  ( $\varrho \rightarrow \infty$ ).  $A_\varrho \subseteq Q_\varrho \subseteq A_{\sqrt{2}\varrho} \xrightarrow{f \geq 0} f_{A_\varrho} \leq f_{Q_\varrho} \leq f_{A_{\sqrt{2}\varrho}}$ .

$$\begin{aligned}
 \implies \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{A_\varrho} d(x, y)}_{=h(\varrho)} &\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{Q_\varrho} d(x, y)}_{=(\int_0^\varrho e^{-x^2} dx)^2} \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{A_{\sqrt{2}\varrho}} d(x, y)}_{=h(\sqrt{2}\varrho)} \\
 &\implies \left( \int_0^\varrho e^{-x^2} dx \right)^2 \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad (\varrho \rightarrow \infty) \\
 &\implies \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

**Zylinderkoordinaten (n=3):**

$\phi(r, \varphi, z) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi, z), r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}, \det \phi'(r, \varphi, z) = r.$

**Beispiel**

$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$

$f(x, y, z) = y\sqrt{x^2 + y^2} + z, B = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1].$

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) d(r, \varphi, z) \\ &= \int_B (r \sin \varphi r + z) r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 (r^2 \sin \varphi + rz) dr \right) + d\varphi \right) dz \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**Kugelkoordinaten (n=3):**

$r = \|(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$

$x = r \cos \varphi \sin \nu, y = r \sin \varphi \sin \nu, z = r \cos \nu (r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], \nu \in [0, \pi]).$

$\phi(r, \varphi, \nu) = (r \cos \varphi \sin \nu, r \sin \varphi \sin \nu, r \cos \nu), \det \phi'(r, \varphi, \nu) = -r^2 \sin \nu.$

**Beispiel**

$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \|(x, y, z)\| \leq 2, x, y, z \geq 0\}.$

$f(x, y, z) := \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}. B = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}].$

$$\begin{aligned} \int_a \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) &= \int_B \frac{1}{r^2} \sin \nu d(r, \varphi, \nu) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^2 \sin \nu dr \right) d\varphi \right) d\nu \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



## 21. Parameterabhängige Integrale

### Satz 21.1

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m, A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ . Es sei  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit:

- (1) Für jedes (feste)  $x \in A$  sei  $y \mapsto f(x, y)$  Lebesgueintegrierbar über  $B$ .
- (2) Für jedes (feste)  $y \in B$  sei  $x \mapsto f(x, y)$  stetig auf  $A$ .
- (3)  $\exists \phi \in L(B) : |f(x, y)| \leq \phi(y) \forall (x, y) \in A \times B$ .

$F : A \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $F(x) := \int_B f(x, y) dy$ . Dann:  $F \in C(A, \mathbb{R})$ .

### Beweis

Sei  $x_0 \in A$ . Sei  $(x_k)$  eine Folge in  $A$  mit  $x_k \rightarrow x_0$ . zu zeigen:  $F(x_k) \rightarrow F(x_0)$ .

Definiere  $g, f_1, f_2, \dots : B \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $g(y) := f(x_0, y), f_k(y) := f(x_k, y)$ . Vor.(1)  $\implies f_k \in L(B) \forall k \in \mathbb{N}$ . Vor.(2)  $\implies f_k(y) \rightarrow g(y) \forall y \in B$ . Vor.(3)  $\implies |f_k(y)| \leq \phi(y) \forall y \in B$ .

$$18.6 \implies \underbrace{\int_B g(y) dy}_{=F(x_0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_B f_k(y) dy}_{=F(x_k)}$$

■

### Satz 21.2 (Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation)

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

- (1) Für jedes (feste)  $x \in A$  sei  $y \mapsto f(x, y)$  Lebesgueintegrierbar über  $B$ .
- (2) Für jedes (feste)  $y \in B$  sei  $x \mapsto f(x, y)$  stetig differenzierbar auf  $A$ .
- (3)  $\exists \phi \in L(B) : |f_{x_j}(x, y)| \leq \phi(y) \forall (x, y) \in A \times B, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

$F$  sei wie in 21.1. Dann ist  $F \in C^1(A, \mathbb{R})$ , für jedes (feste)  $x \in A$  ist  $y \mapsto f_{x_j}(x, y)$  Lebesgueintegrierbar über  $B$  und  $F_{x_j}(x) = \int_B f_{x_j}(x, y) dy \forall x \in A \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

### Beweis

Sei  $x_0 \in A, j \in \{1, \dots, n\}$ .  $A$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : x_0 + te_j \in A$  für  $|t| < \delta$ . Sei  $(t_k)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $t_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) und  $0 < |t_k| < \delta \forall k$ .

$$g(y) := f_{x_j}(x_0, y), \quad f_k(y) := \frac{f(x_0 + t_k e_j, y) - f(x_0, y)}{t_k} \quad (k \in \mathbb{N}, y \in B)$$

Vor.(1)  $\implies f_k \in L(B) \forall k \in \mathbb{N}$ . Vor.(2)  $\implies f_k(y) \rightarrow g(y) \forall y \in B$ . Vor.(3)  $\implies |f_k(y)| \stackrel{\text{MWS}}{=} \underbrace{|f_{x_j}(x_0 + \xi_k e_j, y)|}_{\leq \phi(y) \forall y \in B}, \xi_k \text{ zwischen } 0 \text{ und } t_k$ . 18.6  $\implies g \in L(B)$  und

$$\underbrace{\int_B g(y) dy}_{= \int_B f_{x_j}(x_0, y) dy} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(x_0 + t_k e_j) - F(x_0)}{t_k}$$

■

**Satz 21.3**

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $[a, b] \times [c, d] \subseteq D$  und  $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  sei stetig differenzierbar. Es sei  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$  und  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $\alpha(x) := \int_c^{\varphi(x)} f(x, y) dy$ . Dann ist  $\alpha$  auf  $[a, b]$  differenzierbar und

$$\alpha'(x) = \int_c^{\varphi(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

**Beweis**

$\beta(x, z) := \int_c^z f(x, y) dy$ . Dann:  $\alpha(x) = \beta(x, \varphi(x))$  ( $z \in [c, d]$ ). Analysis 1  $\implies \beta$  ist partiell differenzierbar nach  $z$  und  $\beta_z(x, z) = f(x, z)$ . 21.2  $\implies \beta$  ist partiell differenzierbar nach  $x$  und  $\beta_x(x, z) = \int_c^z f_x(x, y) dy$ .  $\beta_x, \beta_z$  sind stetig. 5.2  $\implies \beta$  ist differenzierbar  $\xrightarrow{5.4} \alpha$  ist differenzierbar und

$$\begin{aligned} \alpha'(x) &= \beta_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \beta_z(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= \int_c^{\varphi(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \end{aligned}$$

# A. Satz um Satz (hüpft der Has)

1.1. Rechenregeln zur Norm . . . . .	7
1.2. Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	9
2.1. Konvergenz . . . . .	11
2.2. Häufungswerte und konvergente Folgen . . . . .	12
2.3. Überdeckungen . . . . .	12
3.1. Grenzwerte vektorwertiger Funktionen . . . . .	15
3.2. Stetigkeit vektorwertiger Funktionen . . . . .	16
3.3. Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen . . . . .	17
3.4. Fortsetzungssatz von Tietze . . . . .	17
3.5. Lineare Funktionen und Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ . . . . .	17
3.6. Eigenschaften des Abstands zwischen Vektor und Menge . . . . .	18
4.1. Satz von Schwarz . . . . .	20
4.2. Folgerung . . . . .	21
5.1. Differenzierbarkeit und Stetigkeit . . . . .	24
5.2. Stetigkeit aller partiellen Ableitungen . . . . .	25
5.4. Kettenregel . . . . .	26
5.5. Injektivität und Dimensionsgleichheit . . . . .	27
6.1. Der Mittelwertsatz . . . . .	29
6.3. Bedingung für Lipschitzstetigkeit . . . . .	30
6.4. Linearität . . . . .	30
6.5. Richtungsableitungen . . . . .	31
6.6. Der Satz von Taylor . . . . .	32
7.1. Regeln zu definiten Matrizen und quadratischen Formen . . . . .	36
7.2. Störung von definiten Matrizen . . . . .	36
8.1. Nullstelle des Gradienten . . . . .	39

8.2. Definitheit und Extremwerte . . . . .	39
9.2. Stetigkeit der Umkehrfunktion . . . . .	41
9.3. Der Umkehrsatz . . . . .	41
10.1. Satz über implizit definierte Funktionen . . . . .	45
11.1. Multiplikationsregel von Lagrange . . . . .	47
12.1. Rektifizierbarkeit und Beschränkte Variation . . . . .	51
12.2. Summe von Wegen . . . . .	52
12.3. Eigenschaften der Weglängenfunktion . . . . .	52
12.4. Rechenregeln für Wegintegrale . . . . .	52
12.5. Eigenschaften stetig differenzierbarer Wege . . . . .	53
12.6. Rektifizierbarkeit von Wegsummen . . . . .	54
12.7. Eigenschaften der Parametertransformation . . . . .	55
13.1. Berechnung des Wegintegrals . . . . .	57
13.2. Rechnen mit Wegintegralen . . . . .	57
13.3. Rechnen mit Integralen bezgl. der Weglänge . . . . .	58
13.4. Stetige Differenzierbarkeit der Aneinanderhängung . . . . .	59
14.1. Hauptsatz der mehrdimensionalen Integralrechnung . . . . .	61
14.3. Wegunabhängigkeit, Existenz von Stammfunktionen . . . . .	62
14.4. Integrabilitätsbedingungen . . . . .	63
14.5. Kriterium zur Existenz von Stammfunktionen . . . . .	63
15.1. Disjunkte Quaderzerlegung und Treppenfunktionsraum . . . . .	65
15.2. Integral über Treppenfunktion (mit Definition) . . . . .	66
15.3. Satz von Fubini für Treppenfunktionen . . . . .	67
15.4. Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen . . . . .	67
16.1. Rechenregeln der $L^1$ -Halbnorm . . . . .	70
16.2. $L^1$ -Halbnorm eines Quaders . . . . .	70
16.3. $L^1$ -Halbnorm einer Treppenfunktion . . . . .	71
16.4. Integration und Grenzwertbildung bei Treppenfunktionen . . . . .	72
16.5. Rechenregeln für Lebesgueintegrale . . . . .	72

16.7. „Kleiner“ Satz von Beppo Levi . . . . .	73
16.8. Lebegueintegral und $L^1$ -Halbnorm . . . . .	74
16.9. Riemann- und Lebegueintegrale . . . . .	74
16.10. Konvergente Treppenfunktionsfolge . . . . .	75
16.11. Stetige und beschränkte Funktionen sind Lebegue-Integrierbar . . . . .	76
16.12. Stetige und beschränkte Funktionen sind Lebegue-Integrierbar . . . . .	76
16.13. „Kleiner“ Satz von Fubini . . . . .	76
16.14. Aufteilung des Integrals in Doppelintegrale . . . . .	78
17.1. . . . .	81
17.2. . . . .	81
17.3. Prinzip von Cavalieri . . . . .	82
17.4. . . . .	82
17.5. . . . .	83
17.6. . . . .	83
17.7. . . . .	84
17.8. . . . .	84
17.9. . . . .	85
17.10. . . . .	85
17.11. . . . .	85
17.13. . . . .	86
18.1. Satz von Riesz-Fischer . . . . .	87
18.2. Satz von Beppo Levi . . . . .	87
18.3. . . . .	88
18.4. Uneigentliche Lebesgue- und Riemann-Integrale . . . . .	88
18.5. . . . .	89
18.6. Satz von Lebesgue (Majorisierte Konvergenz) . . . . .	89
18.7. . . . .	90
19.1. . . . .	93
19.3. . . . .	94

A. Satz um Satz (hüpft der Has)

20.1. Satz von Fubini . . . . .	95
20.2. Substitutionsregel . . . . .	95
21.1. . . . .	99
21.2. Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation . . . . .	99
21.3. . . . .	100

# Stichwortverzeichnis

- $L^1$ 
  - Cauchyfolge, 87
  - Halbnorm, 69
  - Konvergenz, 87
- abgeschlossene Kugel, 9
- abgeschlossene Menge, 9
- Ableitung, 24
  - partielle, 19
- Abschließung, 9
- Abstand
  - zwischen Vektor und Menge, 18
  - zwischen zwei Vektoren, 7
- Aneinanderhängung, 59
- Anfangspunkt, 51
- äquivalent, 55
- Ausschöpfung, 87
- Berührungspunkt, 9
- Beschränktheit
  - einer Funktion, 17
  - einer Menge, 8
- Bogen, 51
- Bogenmas, 54
- Bolzano-Weierstraß, 11
- Cauchy-Kriterium, 11
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 7
- charakteristische Funktion, 65
- Cramersche Regel, 41
- CSU, 7
- differenzierbar, 23
- Differenzierbarkeit
  - partielle, 19
- Eigenwerte, 36
- einfach
  - bezüglich eines Faktors, 78
- Einschränkung einer Funktion, 47
- Endpunkt, 51
- fast überall, 83
- Figur, 84
- Funktion
  - triviale Erweiterung, 74
- Funktionalmatrix, 23
- Gebiet, 29
- glatt, 54
- Gradient, 19
- Grenzwert, 11
- Häufungspunkt, 8
- Hüllreihe, 69
- Hesse-Matrix, 35
- indefinit, 35
- Inhalt
  - einer Hüllreihe, 69
- Innenprodukt, 7
- innerer Punkt, 8
- Inneres einer Menge, 8
- Integrabilitätsbedingungen, 63
- Inverser Weg, 51
- Jacobi-Matrix, 23
- Konvergenz, 11
- konvex, 29
- Länge, 51
- Länge, 7
- Lebesgueintegrierbarkeit, 72
- Lebesgueintegral, 72
  - über einer Menge, 74
- Lebesguemaß, 81, 93
- Limes, 11
- lokales Extremum, 39
  - unter einer Nebenbedingung, 47
- lokales Maximum, 39
- lokales Minimum, 39
- Matrix-Vektorprodukt, 8
- messbar, 93, 94
- Multiplikator, 47

- negativ definit, 35
- Norm, 7
- Nullmenge, 82
  
- offene Kugel, 8
  
- Parameterdarstellung, 54
- Parameterintervall, 51
- Parametertransformation, 55
- Partielle Ableitung, 19
- Partielle Differenzierbarkeit, 19
- positiv definit, 35
  
- Quader, 65
- quadratische Form, 35
- quadrierbar, 81
  
- Rand, 9
- Randpunkt, 9
- Rektifizierbarkeit, 51
- Richtung, 30
- Richtungsableitung, 30
- Richtungsvektor, 30
  
- Skalarprodukt, 7
- Stammfunktion, 61
- Stationärer Punkt, 39
- sternförmig, 63
- Stetigkeit, 16
  - auf einem Intervall, 16
  - gleichmäßige, 16
  - Lipschitz-, 16
- stückweise glatt, 54
- stückweise stetig differenzierbar, 54
- Summe
  - von Wegen, 52
  
- Teilfolge, 11
- Treppenfunktion, 65
  
- Überdeckungssatz von Heine-Borel, 13
- Umgebung, 8
- Umordnung, 11
  
- vektorwertige Funktion, 15
- Verbindungsstrecke, 29
- Volumen, 65, 81
  
- Weg, 51
  - inverser, 51
- Wegintegral, 57
- Weglängenfunktion, 52
- wegunabhängig, 62
- Winkelmas, 54

## B. Credits für Analysis II

Abgetippt haben die folgenden Paragraphen:

- § 1: **Der Raum  $\mathbb{R}^n$** : Wenzel Jakob, Joachim Breitner
- § 2: **Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$** : Joachim Breitner und Wenzel Jakob
- § 3: **Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit**: Wenzel Jakob, Pascal Maillard
- § 4: **Partielle Ableitungen**: Joachim Breitner und Wenzel Jakob
- § 5: **Differentiation**: Wenzel Jakob, Pascal Maillard, Jonathan Picht
- § 6: **Differenzierbarkeitseigenschaften reellwertiger Funktionen**: Jonathan Picht, Pascal Maillard, Wenzel Jakob
- § 7: **Quadratische Formen**: Wenzel Jakob
- § 8: **Extremwerte**: Wenzel Jakob
- § 9: **Der Umkehrsatz**: Wenzel Jakob und Joachim Breitner
- § 10: **Implizit definierte Funktionen**: Wenzel Jakob
- § 11: **Extremwerte unter Nebenbedingungen**: Pascal Maillard
- § 12: **Wege im  $\mathbb{R}^n$** : Joachim Breitner, Wenzel Jakob und Pascal Maillard
- § 13: **Wegintegrale**: Pascal Maillard und Joachim Breitner
- § 14: **Stammfunktionen**: Joachim Breitner und Ines Türk
- § 15: **Integration von Treppenfunktionen**: Ines Türk
- § 16: **Das Lebesguesche Integral**: Joachim Breitner, Pascal Maillard und Jonathan Picht
- § 17: **Quadrierbare Mengen**: Joachim Breitner, Pascal Maillard und Wenzel Jakob
- § 18: **Konvergenzsätze**: Wenzel Jakob und Pascal Maillard
- § 19: **Messbare Mengen und messbare Funktionen**: Wenzel Jakob
- § 20: **Satz von Fubini / Substitutionsregel**: Wenzel Jakob
- § 21: **Parameterabhängige Integrale**: Wenzel Jakob