

# Algebra II Übung vom 27.4.06

## Moduln

### 1.3

(a) **R-Untermoduln**

Eine Untergruppe  $N$  eines  $R$ -Moduls  $M$  heißt  $R$ -Untermodul von  $M$ , falls  $R \cdot N \subseteq N$

#### Beispiel

- Jedes Ideal ist ein  $R$ -Untermodul von  $R$
  - $R^a$  ist Untermodul von  $R^b$  mit  $a \leq b \in \mathbb{N}$
- (b) Kern und Bild  $R$ -linearer Abbildungen sind  $R$ -Moduln. Sei  $\varphi : M \rightarrow N$   $R$ -lineare Abbildung

- $\text{Kern}(\varphi)$ :  $m \in \text{Kern}(\varphi), r \in R$ :  
 $\varphi(rm) = r\varphi(m) = 0 \Rightarrow R \cdot \text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi)$ ; Untergruppe klar
- $\text{Bild}\varphi$ :  $n \in \text{Bild}\varphi$ , d. h.  $\exists m : n = \varphi(m), m \in M \Rightarrow r \in R : rn = r\varphi(m) = \varphi(rm) \in \text{Bild}(\varphi) \Rightarrow R \cdot \text{Bild}(\varphi) \subseteq \text{Bild}(\varphi)$

- (c) Zu jedem Untermodul  $N \subseteq M$  gibt es einen Faktormodul  $M/N$  ( $M$  abelsch  $\Rightarrow$  jedes  $N$  Normalteiler )

- $M/N$  ist abelsche Gruppe
- Wir definieren  $R$ -Aktion auf  $M/N$  durch  $r(m + N) = rm + N$ . Das ist wohldefiniert, denn  
 $r((m + n) + N) = r(m + n) + N = rm + \underbrace{rn}_{\in N} + N = rm + N$
- $r((m + N) + (m' + N)) = r(m + m') + N = r(m + m') + N = rm + N + rm' + N = r(m + N) + r(m' + N)$

- (d) **Homomorphiesatz**: Für einen surjektiven Homomorphismus  $\varphi : M \rightarrow N$  gilt:  $M/\text{Kern}(\varphi) \cong N$  (Bild fehlt)

- Wohldefiniertheit von  $\tilde{\varphi} : M/\text{Kern}(\varphi) \rightarrow N$ :

Sei  $k \in \text{Kern}\varphi : \varphi(m + k) = \varphi(m)$

- surjektiv:  $\forall n \in N : n = \varphi(m) = \tilde{\varphi}(m + \text{Kern}(\varphi))$

- injektiv:  $m, m' \in M$  mit  $\varphi(m) = \varphi(m') = n \in N \leftrightarrow \varphi(m - m') = 0 \rightarrow m + \text{Kern}(\varphi)(m) = \text{Kern}(\varphi)(m')$

-  $\tilde{\varphi}$  ist  $R$ -linear. Klar, wegen  $\varphi$   $R$ -linear.

- (e) Direktes Produkt: Sei  $\{M_i\}_{i \in I}$  eine beliebige Menge von Moduln. Dann ist ihr direktes Produkt  $\prod_i M_i = \prod_i X_i M_i$  gegeben durch die Menge aller Tupel  $(m_i)_{i \in I}$  mit  $m_i \in M_i$  und die  $R$ -Aktion  $r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I}$ .  
 Direkte Summe: Das gleiche wie beim direkten Produkt, jedoch dürfen in den Tupeln nur endlich viele  $m_i \neq 0$  sein.

**Beispiel**  $R^n = \underbrace{R \times \dots \times R}_{n\text{-mal}}$

#### 1.4

- (f) - Freie Moduln verhalten sich wie Vektorräume Sei  $R$  ein Ring,  $M$  freier  $R$ -Modul  $\{x_i\}_{i \in I}, x_i \neq x_j (i \neq j)$  Basis von  $M$ . Sei  $N$  weiterer  $R$ -Modul und  $\{y_i\}_{i \in I}$  Familie von Elementen von  $N$ .  
 Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus  $\varphi : M \rightarrow N$  mit  $\varphi(x_i) = y_i \quad \forall i \in I$

**Beweis:** Sei  $x \in M$ . Dann ist durch  $x = \sum_i a_i x_i \quad \{a_i\}_{i \in I}$  eindeutig bestimmt.

Wir setzen:  $\varphi(x) := \sum_i a_i y_i = \sum_i a_i \varphi(x_i)$

**Korollar 1:** Falls  $\{y_i\}_{i \in I}, y_i \neq y_j (i \neq j)$  Basis von  $N$  ist, ist  $\varphi$  Isomorphismus

**Beweis:** wir können den Beweis des Satzes rückwärts anwenden  $\Rightarrow \exists \psi : N \rightarrow M$  mit  $\psi(y_i) = x_i \forall i \in I \Rightarrow \varphi \circ \psi = id_N, \psi \circ \varphi = id_M$

**Korollar 2:** Zwei freie Moduln mit gleicher Basis sind isomorph.

**Proposition:** Sei  $M$  freier Modul. Dann ist  $M^*$  wieder frei und hat dieselbe Dimension wie  $M$

#### 1.5 Proposition:

- (b) Sei  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$  exakt.

Dann:  $0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}(M', N) \rightarrow 0$  exakt.

**Beweis:**

- $\beta^*$  inj: Für  $\varphi \in \text{Hom}(M'', N)$  ist  $\beta^*(\varphi) = \varphi \circ \beta$   
Sei  $\beta^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \circ \beta = 0 \xrightarrow{\beta \text{ surj.}} \varphi = 0$ .
- $\text{Bild}(\beta^*) \subseteq \text{Kern}(\alpha^*)$ :  $(\alpha^* \circ \beta^*)(\varphi) = \alpha^*(\varphi \circ \beta) = \varphi \circ \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} = 0$
- $\text{Kern}(\alpha^*) \subseteq \text{Bild}(\beta^*)$ : Sei  $\psi \in \text{Kern}(\alpha^*)$ . D. h.  $\psi \in \text{Hom}(M, N)$  mit  $\psi \circ \alpha = 0$   
Weil  $\psi$  auf  $\text{Bild}(\alpha)$  verschwindet, kommutiert DIAGRAMM  
 $\Rightarrow \beta^*(\sigma) = \psi \implies \text{Beh.}$

(c) im Allgemeinen sind  $\beta_*$  und  $\alpha^*$  nicht surjektiv  
z.B.:

$$\alpha: 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ mit } N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\text{Es gilt: } \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \{0\}$$

$$\text{Hom}(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0, id\} \implies N \text{ nicht projektiv!}$$

$$\beta: 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ mit } N := 2 \cdot \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, N) = \{0, \Psi\}, \text{ wobei } \Psi(1) = 2.$$

$$\text{Dann: } \alpha^*(\Psi) = \Psi \circ \alpha = 0$$

**Satz:** (a) Ein  $R$ -Modul  $N$  ist genau dann injektiv, wenn DIAGRAMM kommutiert (Von  $M'$  nach  $N$  kommutiert mit Einbettung  $\alpha$  von  $M'$  in  $M$  und einer lin. Abb.)

(b) Ein  $R$ -Modul  $N$  ist genau dann injektiv, falls DIAGRAMM kommutiert ( $\phi$  nach (Ideal  $I$  einbettung in  $R$ ) kommutiert mit abb von  $I$  nach  $N$ ..)