

# Algebraische Geometrie

gelesen von Prof. Dr. Frank Herrlich im Sommersemester 2015 am KIT

*Geschrieben in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X von Arthur Martirosian, arthur.martirosian.93@gmail.com*

7. August 2018



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Affine Varietäten</b>	<b>5</b>
§ 1	Nullstellenmengen und Verschwindungsideale . . . . .	5
§ 2	Die Zariski-Topologie . . . . .	7
§ 3	Irreduzible Varietäten . . . . .	9
§ 4	Der Hilbertsche Nullstellensatz . . . . .	11
§ 5	Morphismen zwischen affinen Varietäten . . . . .	14
§ 6	Reguläre Funktionen . . . . .	18
§ 7	Rationale Abbildungen und Funktionenkörper . . . . .	25
<b>II</b>	<b>Projektive Varietäten</b>	<b>29</b>
§ 8	Varietäten im projektiven Raum . . . . .	29
§ 9	Die Zariski Topologie auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . . . . .	32
§ 10	Reguläre Funktionen . . . . .	38
§ 11	Morphismen . . . . .	42
<b>III</b>	<b>Lokale Eigenschaften von Varietäten</b>	<b>45</b>
§ 12	Lokale Ringe . . . . .	45
§ 13	Dimension . . . . .	48
§ 14	Tangentialraum und Singularitäten . . . . .	54
<b>IV</b>	<b>Nichtsinguläre Kurven</b>	<b>63</b>
§ 15	Diskrete Bewertungsringe . . . . .	63
§ 16	Divisoren . . . . .	66
§ 17	Der Satz von Riemann-Roch . . . . .	70



# Kapitel I

## Affine Varietäten

### § 1 Nullstellenmengen und Verschwindungsideale

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition 1.1** Eine Menge  $V \subseteq \mathbb{K}^n$  heißt *affine Varietät*, falls es eine Teilmenge  $F \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  gibt, sodass gilt

$$V = V(F) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$$

**Beispiel 1.2** (i) Wir definieren  $\mathbb{K}^n := V(\{0\}) = V(\emptyset)$ . Damit wird  $\mathbb{K}^n$  zur affinen Varietät.

(ii) Mit  $V(\{1\}) = V(1) = \emptyset$  wird  $\emptyset$  zur affinen Varietät.

(iii) Für jedes  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  ist  $\{a\}$  affine Varietät via

$$\{a\} = V(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

(iv) Allgemeiner gilt: Jeder affine Untervektorraum des  $\mathbb{K}^n$  ist affine Varietät.

**Bemerkung 1.3** (i) Aus  $F_1 \subseteq F_2$  folgt  $V(F_1) \supseteq V(F_2)$ .

(ii) Für  $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  gilt  $V(f_1 f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$ .

(iii) Für  $F \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  gilt  $V(F) = V(\langle F \rangle)$ , wobei  $\langle F \rangle$  das von  $F$  erzeugte Ideal bezeichnet.

*Beweis.* (i) Ist  $x \in V(F_2)$ , so gilt  $f(x) = 0$  für alle  $f \in F_2$ . Wegen  $F_1 \subseteq F_2$  folgt  $f(x) = 0$  für alle  $f \in F_1$ , also  $x \in V(F_1)$ .

(ii) Es gilt  $x \in V(f_1 f_2)$  genau dann, wenn  $(f_1 f_2)(x) = 0$ , also  $f_1(x) = 0$  oder  $f_2(x) = 0$  und damit  $x \in V(f_1) \cup V(f_2)$ .

(iii) "  $\supseteq$  " folgt aus (i) mit  $F \subseteq \langle F \rangle$ . Für die andere Inklusion wähle  $x \in V(F)$  und  $f \in \langle F \rangle$ . Schreibe

$$f = \sum_{i=0}^r a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n], f_i \in F$$

Dann ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^r a_i(x) f_i(x) = 0$$

und damit  $x \in V(\langle F \rangle)$ . □

**Folgerung 1.4** Sei  $V \subseteq \mathbb{K}^n$  affine Varietät.

- (i) Dann gibt es ein Ideal  $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  mit  $V = V(I)$ .
- (ii) Dann gibt es  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  mit  $V = V(f_1, \dots, f_r)$ .

*Beweis.*

- (i) Für  $V = V(F)$  wähle  $I = \langle F \rangle$ .
- (ii) Folgt aus dem Hilbertschen Basissatz. □

**Bemerkung + Definition 1.5** (i) Sei  $R$  (kommutativer) Ring (mit 1) und  $I \trianglelefteq R$  ein Ideal. Dann heißt

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid \text{es existiert } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n \in I\}$$

das *Radikal* von  $I$ .

- (ii)  $\sqrt{I}$  ist Ideal.
- (iii)  $I$  heißt *Radikalideal*, falls  $I = \sqrt{I}$ .
- (iv) Jedes Primideal ist Radikalideal.
- (v)  $n\mathbb{Z}$  ist Radikalideal genau dann, wenn  $n$  quadratfrei ist, d.h.  $\nu_p(n) \in \{0, 1\}$  für alle  $p \in \mathbb{P}$ .
- (vi) Für jedes Ideal  $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  gilt  $V(I) = V(\sqrt{I})$ .

**Definition + Bemerkung 1.6** Sei  $V \subseteq \mathbb{K}^n$ .

- (i) Das *Verswindungsideal* von  $V$  ist

$$I(V) := \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

- (ii)  $I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ist Radikalideal.
- (iii)  $V(I(V)) \supseteq V$ .

*Beweis.* (i) Folgt aus  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  und  $(h \cdot f)(x) = h(x)f(x)$ .

- (ii) Folgt aus  $f^d(x) = f(f(\dots f(x) \dots)) = f(x)^d$ .
- (iii) Klar. □

**Beispiel 1.7** (i)  $I(\emptyset) = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .

- (ii)  $I(\mathbb{K}^n) = \{0\}$  genau dann wenn (!)  $\mathbb{K}$  unendlich ist.
- (iii) Für  $n = 2$  betrachte  $V = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{K}^2$ . Dann ist

$$I(V) = \left\{ f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} X^i Y^j \mid a_{0,0} = 0 \right\}$$

**Proposition 1.8** Seien  $V, V_1, V_2$  affine Varietäten in  $\mathbb{K}^n$ . Dann gilt

- (i)  $V(I(V)) = V$ .
- (ii)  $V_1 \subseteq V_2$  genau dann, wenn  $I(V_1) \supseteq I(V_2)$ .

*Beweis.* (i) " $\supseteq$ " Klar.

" $\subseteq$ " Sei  $V = V(I')$  für ein Ideal  $I' \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Dann ist  $I' \subseteq I(V)$ , denn für  $f \in I'$  ist  $f(x) = 0$  für alle  $x \in V = V(I')$ , also  $V(I') \supseteq V(I(V))$ .

- (ii) Folgt aus (i) und 1.2. □

**Bemerkung 1.9** *Frage: Gilt auch  $I(V(I)) = I$  für ein Radikalideal? Antwort: Nicht uneingeschränkt! Betrachte*

$$I = \langle X^2 + 1 \rangle \in \mathbb{K}[X]$$

Dann ist für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$   $V(I) = \emptyset$ , also  $I(V(I)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[X]$ .

Gehen wir dagegen in einen algebraisch abgeschlossenen Körper, z.B.  $\mathbb{C}$  über:

Dann ist  $V(I) = \{i, -i\}$ , also

$$I(V(I)) = \langle X - i \rangle \cap \langle X + i \rangle = \langle X^2 + 1 \rangle.$$

Unser Ziel soll es also sein, zu zeigen, dass dies allgemein in algebraisch abgeschlossenen Körpern gilt.

**Definition + Bemerkung 1.10** Sei  $V \subseteq \mathbb{K}^n$  affine Varietät,  $I(V)$  das Verschwindungsideal.

(i) Wir definieren die *affine Algebra* bzw. den *affinen Koordinatenring* zu  $V$  als

$$A(V) := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / I(V)$$

(ii)  $A(V)$  ist eine endlich erzeugte, reduzierte  $\mathbb{K}$ -Algebra, d.h.  $A(V)$  enthält keine nilpotenten Elemente, d.h. für  $a \neq 0$  gilt  $a^d \neq 0$  für alle  $d \in \mathbb{N}$ .

(iii) Ist  $V' \subseteq V$  affine Varietät, so erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren  $p : A(V) \rightarrow A(V')$ .

*Beweis.* (ii) Sei  $a \in A(V)$  mit  $a \neq 0$  und  $a^d = 0$  für ein  $d \geq 1$ . Wähle  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  mit  $\bar{f} = a$  in  $A(V)$ . Dann ist  $f^d \in I(V)$ , denn  $\overline{f^d} = \bar{f}^d = a^d = 0$ , und damit auch  $f \in I(V)$ , da  $I(V)$  Radikalideal ist. Dann gilt  $a = 0$ , also ein Widerspruch.

(iii) Wegen 1.6 ist  $I(V') \supseteq I(V)$ . Mit dem Homomorphiesatz erhalten wir eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\quad} & A(V') \\ & \searrow & \nearrow p \\ & & A(V) \end{array}$$

welche den gewünschten Homomorphismus liefert. □

## § 2 Die Zariski-Topologie

Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition + Bemerkung 2.1** (i) Die affinen Varietäten in  $\mathbb{K}^n$  bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf  $\mathbb{K}^n$ .

(ii) Diese Topologie heißt *Zariski-Topologie*.

(iii) Es bezeichne  $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  den topologischen Raum  $\mathbb{K}^n$  mit der Zariski-Topologie.

*Beweis.* Wir rechnen die Axiome einer Topologie nach.

(1) Per Definition sind  $\mathbb{K}^n = V(0)$  und  $\emptyset = V(1)$  affine Varietäten.

(2) Seien  $V_1 = V(I_1), V_2 = V(I_2)$  affine Varietäten.

**Beh. (a)** Es gilt  $V(I_1 I_2) \stackrel{(i)}{\subseteq} V_1 \cup V_2 \stackrel{(ii)}{\subseteq} V(I_1 \cup I_2) \stackrel{(iii)}{\subseteq} V(I_1 I_2)$ .

Dann gilt an jeder Stelle Gleichheit und damit ist auch  $V_1 \cup V_2$  affine Varietät.

**Bew. (a)** Es gilt

(iii)  $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ , also  $V(I_1 I_2) \supseteq V(I_1 \cap I_2)$ .

(ii) Es ist  $I_k \cap I_2 \subseteq I_k$ , also  $V_k \subseteq V(I_1 \cap I_2)$  für  $k \in \{1, 2\}$ , also auch  $V_1 \cup V_2 \subseteq V(I_1 \cap I_2)$ .

(i) Sei  $x \in V(I_1 I_2)$ , ohne Einschränkung  $x \notin V_1$ . Zu zeigen:  $x \in V_2$ .

Da  $x \notin V_1$ , gibt es ein  $f \in I_1$ , sodass  $f(x) \neq 0$ . Sei nun  $g \in I_2$ . Nach Voraussetzung ist dann

$$0 = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

und damit  $g(x) = 0$ . Dies impliziert  $x \in V(I_2) = V_2$ .

(3) Seien für eine beliebige Indexmenge  $J$   $V_i, i \in J$  affine Varietäten, es gelte  $V_i = V(I_i)$ . Dann ist

$$\bigcap_{i \in J} V_i = V\left(\bigcup_{i \in J} I_i\right) = V\left(\left\langle \bigcup_{i \in J} I_i \right\rangle\right) := V\left(\sum_{i \in J} I_i\right)$$

ebenfalls affine Varietät, was zu zeigen war.  $\square$

**Beispiel 2.2** Betrachte  $n = 1$ . Dann ist  $V \subseteq \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$  abgeschlossen genau dann, wenn  $V = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$  oder  $V$  endlich ist. Insbesondere ist  $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$  damit nicht hausdorffsch.

**Beispiel 2.3** Ist  $\mathbb{K}$  endlich, so ist die Zariski-Topologie auf  $\mathbb{K}^n$  die diskrete Topologie.

**Proposition 2.4** Sei  $\mathbb{K}$  unendlich. Dann ist  $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  nicht hausdorffsch.

*Beweis.* Siehe Übung.

**Proposition 2.5** Für  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  sei

$$D(f) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) \neq 0\} = \mathbb{K}^n \setminus V(f)$$

Dann bildet die Familie  $\{D(f)\}_{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]}$  eine Basis der Zariski-Topologie auf  $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ .

*Beweis.* Sei  $U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  offen. Es ist zu zeigen, dass  $U$  eine Menge  $D(f)$  für ein geeignetes  $f$  enthält. Offenbar ist  $V := \mathbb{K}^n \setminus U$  abgeschlossen, also eine affine Varietät. Dann schreibe  $V = V(I)$  für ein Ideal  $I \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .

Sei nun  $x \in U$ . Da  $x \notin V$  existiert ein  $f \in I(V)$ , sodass gilt  $f(x) \neq 0$ , also  $x \in D(f)$ . Da  $f \in I$ , gilt  $\langle f \rangle \subseteq I$ , also  $V(f) \supseteq V(I) = V$  und damit  $D(f) \subseteq U$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Definition + Bemerkung 2.6** Für jede affine Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  heißt die Spurtopologie ebenfalls Zariski-Topologie.

Für  $f \in A(V) \setminus \mathbb{K}$  sei

$$D(f) := \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$$

Dann ist die Familie  $\{D(f)\}_{f \in A(V) \setminus \mathbb{K}}$  offen und eine Basis der Zariski-Topologie.



### § 3 Irreduzible Varietäten

**Definition 3.1** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (i)  $X$  heißt *reduzibel*, falls es echte abgeschlossene Teilmengen  $V, W \subset X$  gibt mit  $V \cup W = X$ .
- (ii) Ist  $X$  nicht reduzibel, so heißt  $X$  *irreduzibel*.
- (iii) Eine maximale irreduzible Teilmenge von  $X$  heißt *irreduzible Komponente*.

**Beispiel 3.2** Sei  $X$  ein Hausdorffraum. Dann ist  $X$  irreduzibel genau dann wenn  $|X| \leq 1$ , also  $X \in \{\{\text{pt}\}, \emptyset\}$ .

*Beweis.* Seien  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  und  $U_x, U_y$  offene Umgebungen von  $x, y$  mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Dann sind  $V_x := X \setminus U_x$ ,  $V_y := X \setminus U_y$  abgeschlossene Mengen mit

$$V_x \cup V_y = (X \setminus U_x) \cup (X \setminus U_y) = X \setminus (U_x \cap U_y) = X$$

**Bemerkung 3.3** (i) Sei  $X$  topologischer Raum,  $V \subseteq X$  irreduzibel. Dann ist auch  $\bar{V}$  irreduzibel.  
(ii) Irreduzible Komponenten sind abgeschlossen.

**Beispiel 3.4** (i) Sei  $\mathbb{K}$  unendlicher Körper. Dann ist  $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  irreduzibel für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Sei  $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) = V(I_1) \cup V(I_2)$  mit  $I_1 \neq \langle 0 \rangle \neq I_2$ . Dann gilt nach Bemerkung 2.1

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$$

Wähle also  $f \in I_2 \setminus \{0\}, g \in I_1 \setminus \{0\}$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{K}^n$   $(f \cdot g)(x) = 0$ , also  $f \cdot g = 0$ , ein Widerspruch zur Nullteilerfreiheit.

$V(X \cdot Y) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$  ist reduzibel mit  $V(X \cdot Y) = V(X) \cup V(Y)$ .

**Satz 3.5** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $V \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$V \text{ ist irreduzibel} \iff I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \text{ ist Primideal}$$

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " Seien  $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  mit  $fg \in I(V)$ , ohne Einschränkung  $f \notin I(V)$ . Dann gibt es  $x \in V$  mit  $f(x) \neq 0$ , das heißt es gilt  $V \not\subseteq V(f)$ , nach Voraussetzung aber  $V \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$ . Damit ist

$$(V \cap V(f)) \cup (V \cap V(g)) = V$$

Da  $V$  aber irreduzibel ist und  $V \cap V(f) \neq V$ , muss gelten  $V \cap V(g) = V$ , also  $V(g) \subseteq V$  und damit  $g \in I(V)$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $V = V_1 \cup V_2$  ein Zerlegung von  $V$  in zwei abgeschlossene Teilmengen  $V_1$  und  $V_2$ . Dann ist  $V_1 = V(I_1), V_2 = V(I_2)$  für Ideale  $I_1, I_2 \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Sei ohne Einschränkung  $V \neq V_1$ , also  $V \not\subseteq V(I_1)$ . Dann gibt es  $x \in V, f \in I_1$  mit  $f(x) \neq 0$ , also  $f \notin I(V)$ . Zeige also  $V \subseteq V(I_2)$ . Hierfür genügt zu zeigen  $I_2 \subseteq I(V)$ .

Sei nun  $g \in I_2$ . Dann ist  $fg \in I_1 I_2$ . Wegen  $V = V_1 \cup V_2$ , also  $V = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$ , gilt  $I_1 I_2 \subseteq I(V)$ , also  $fg \in I(V)$ . Da  $I(V)$  prim ist und  $f \notin I(V)$ , gilt  $g \in I(V)$  und damit  $I_2 \subseteq I(V)$ .

**Satz 3.6** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät. Dann gilt

- (i)  $V$  ist endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.
- (ii) Gilt  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  mit irreduziblen Varietäten  $V_1, \dots, V_r$  und  $V_i \not\subseteq V_j$  für  $i \neq j$  (das heißt, kein  $V_i$  ist überflüssig), so sind die  $V_i$  die irreduziblen Komponenten von  $V$ , also insbesondere eindeutig.

*Beweis.* (i) Definiere

$$\mathcal{B} := \{V \mid V \text{ ist nicht endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten} \}$$

$$\mathcal{I} := \{I(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$$

Zu zeigen:  $\mathcal{B}, \mathcal{I}$  sind leer.

Angenommen  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ . Dann enthält  $\mathcal{I}$  ein maximales Element  $I_0$ , denn  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ist noethersch, also wird jede aufsteigende Kette von Idealen stationär. Schreibe  $I_0 = I(V_0)$  mit  $V_0 \in \mathcal{B}$ .  $V_0$  ist reduzibel, schreibe also  $V_0 = V_1 \cup V_2$  mit abgeschlossenen Mengen  $V_1 \subsetneq V_0 \supsetneq V_2$ , also gilt dann  $I(V_1) \supsetneq I_0 \subsetneq I(V_2)$ . Da  $I_0$  maximal ist, ist  $I(V_1), I(V_2) \notin \mathcal{I}$  und damit  $V_1, V_2 \notin \mathcal{B}$ . Per Definition sind dann also  $V_1, V_2$  darstellbar als endliche Vereinigungen irreduzibler Varietäten:

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^n U_i, \quad V_2 = \bigcup_{i=n+1}^m U_i$$

Damit ist aber  $V$  endliche Vereinigung von irreduziblen Komponenten, also  $V \in \mathcal{B}$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung.

- (ii) Zeige zunächst die Eindeutigkeit. Sei hierfür  $W \subseteq V$  irreduzible Komponente. Zu zeigen:  $W = V_i$  für ein  $1 \leq i \leq r$ . Schreibe

$$W = W \cap V = \bigcup_{i=1}^r \underbrace{(W \cap V_i)}_{\text{abgeschlossen}}$$

Da  $W$  irreduzibel ist, gilt bereits  $W \cap V_i = W$ , also  $W \subseteq V_i$  für ein  $1 \leq i \leq r$ . Da aber auch  $V_i$  irreduzibel ist, gilt  $W = V_i$ .

Zeige nun, dass  $V_1, \dots, V_r$  irreduzible Komponenten sind. Sei  $1 \leq i \leq r$ . Dann existiert eine irreduzible Komponente  $W$  von  $V$  mit  $V_i \subseteq W$ , also  $W = V_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Also erhalten wir  $V_i \subseteq V_j$  und wegen  $V_i \not\subseteq V_j$  dann  $i = j$  und schließlich  $W = V_i$ . Damit ist  $V_i$  irreduzible Komponente.

**Folgerung 3.7** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $I = I(V)$  ihr Verschwindungsideal und  $A(V) := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I(V) := \mathbb{K}[V]$  ihr affiner Koordinatenring. Dann gilt

- (i)  $\mathbb{K}[V]$  hat nur endlich viele minimale Primideale.
- (ii) In  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  gibt es nur endlich viele Primideale, die  $I$  umfassen und minimal mit dieser Eigenschaft sind.

*Beweis.* (i) Folgt aus (ii), denn (surjektive) (Ur-)Bilder von Primidealen sind wieder Primideale.

- (ii) Ist  $\mathfrak{p} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  prim sodass  $\mathfrak{p} \supseteq I$  und minimal mit dieser Eigenschaft. Dann ist  $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(I)$  irreduzible Komponente und nach 3.5 ist die Anzahl dieser endlich.

## § 4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

**Satz 4.1** (Hilbertscher Nullstellensatz) Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossener Körper,  $n \in \mathbb{N}$ .

- (i) Für jedes Ideal  $\{0\} \neq I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ist  $V(I) \neq \emptyset$ .
- (ii) Für jedes Ideal  $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ist  $I(V(I)) = \sqrt{I}$ .

**Satz 4.2** (Algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes) Sei  $\mathbb{K}$  Körper,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{m} \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ein maximales Ideal. Dann ist  $\mathbb{L} := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  eine algebraische Körpererweiterung von  $\mathbb{K}$ .

**Folgerung 4.3** Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossener Körper,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es Bijektionen zwischen folgenden Mengen:

- (i)  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\}$
- (ii) Ideale  $\{I_x = \langle X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n \rangle \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]\}$
- (iii) Maximale Ideale  $\{\mathfrak{m} \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]\}$ .

*Beweis.* "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Klar.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei für  $x \in \mathbb{K}^n$   $\phi : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{K}$ ,  $f \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ . Dann ist offenbar  $\ker(\phi) = I_x$ , und da  $\phi$  surjektiv ist damit

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I_x \cong \mathbb{K}$$

"(iii) $\Rightarrow$ (ii)" Sei  $\mathfrak{m} \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  maximales Ideal. Mit Satz 4.2 gilt also

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$$

Sei nun

$$\phi : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$$

die Restklassenabbildung,  $x_i := \phi(X_i)$ . Dann gilt  $\mathfrak{m} = \ker(\phi)$  und  $\mathfrak{m} = I_x$ . □

*Beweis von Satz 4.1.* (i) Sei  $I \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ein echtes Ideal. Dann existiert nach Zorn's Lemma ein maximales Ideal  $I \subseteq \mathfrak{m} \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Damit gilt  $V(I) \supseteq V(\mathfrak{m})$ . Nach Folgerung 4.3 gibt es damit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  mit

$$\mathfrak{m} = \langle X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n \rangle$$

und damit  $x \in V(\mathfrak{m}) \subseteq V(I)$ , also gerade  $V(I) \neq \emptyset$ .

- (ii) Sei  $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  Ideal. Dann gilt offenbar  $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$ . Zu zeigen ist somit  $I(V(I)) \subseteq \sqrt{I}$ . Sei also  $g \in I(V(I))$ . Zeige: Es existiert  $d \in \mathbb{N}$  mit  $g^d \in \sqrt{I}$ . Seien dazu  $f_1, \dots, f_m$  Erzeuger von  $I$  und

$$J \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y]$$

das von  $f_1, \dots, f_m$  und dem Polynom  $gY - 1$  erzeugte Ideal.

**Beh. (a)** Es gilt  $V(J) = \emptyset$ .

**Bew. (a)** Sei das Tupel  $(x_1, \dots, x_n, y) := (x', y) := x \in V(J)$ . Dann gilt für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$

$$0 = f_i(x) = f_i(x') \implies x' \in V(I)$$

Da  $g \in I(V(I))$ , gilt  $g(x') = 0$ , denn  $x' \in V(I)$ . Dann folgt wegen  $g(x') = 0$

$$0 = (gY - 1)(x) = (g(x)Y(x) - 1) = g(x') \cdot Y - 1 = -1,$$

ein Widerspruch. Also gilt  $V(J) = \emptyset$ .

Damit folgt  $J = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , also insbesondere  $1 \in J$ . Schreibe

$$1 = \sum_{i=1}^m b_i f_i + c \cdot (gY - 1), \quad b_i, c \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y]$$

Betrachte nun den Ring

$$R := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / \langle gY - 1 \rangle \cong \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \left[ \frac{1}{g} \right]$$

Für die Isomorphie betrachte den surjektiven Ringhomomorphismus

$$\phi : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \left[ \frac{1}{g} \right], \quad \begin{cases} X_i \mapsto X_i \\ Y \mapsto \frac{1}{g} \end{cases}$$

Für diesen gilt

$$\ker(\phi) = \left\langle \left\{ Y = \frac{1}{g} \right\} \right\rangle = \langle gY - 1 \rangle$$

In  $R$  gilt

$$1 = \sum_{i=1}^m \overline{b_i f_i} + \overline{c(gY - 1)} = \sum_{i=1}^m \overline{b_i f_i}$$

Schreibe

$$\overline{b_i} = \sum_{j=1}^{d_i} c_j \frac{1}{g^j} = \sum_{j=1}^{d_i} \frac{c_0 g^{d_i} + c_1 g^{d_i-1} + \dots + c_{d_i}}{g^{d_i}} := \frac{c_i}{g^{d_i}}$$

Sei  $d := \max_{1 \leq i \leq m} \{d_i\}$ . Dann gilt  $g^d \overline{b_i} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Schließlich ist

$$g^d = g^d \cdot 1 = g^d \cdot \sum_{j=1}^m \overline{b_j f_j} = \sum_{j=1}^m \underbrace{g^d \overline{b_j}}_{\in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]} f_j \in I,$$

was die Behauptung liefert. □

*Beweis von Satz 4.2.* Durch Induktion über  $n$ .

**n=1**  $\mathfrak{m} = \langle f \rangle$  für ein irreduzibles Polynom  $f \in \mathbb{K}[X]$  (Algebra).

**n>1** Angenommen  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  ist nicht algebraisch. Dann ist ohne Einschränkung  $X_1$  transzendent über  $\mathbb{K}$ ,  $x_i := \overline{X_i}$ . Dann ist

$$\mathbb{K}(X) = \text{Quot}(\mathbb{K}[X]) \cong \mathbb{K}(x_1) \subseteq \mathbb{L}$$

Weiter wird  $\mathbb{L}$  über  $\mathbb{K}(x_1)$  von  $x_2, \dots, x_n$  erzeugt. Damit ist

$$\mathbb{L} \cong \mathbb{K}(x_1)[X_2, \dots, X_n] / \mathfrak{m}'$$

für ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}' \triangleleft \mathbb{K}(x_1)[X_2, \dots, X_n]$ . Per Induktionsvoraussetzung sind  $x_2, \dots, x_n$  damit algebraisch über  $\mathbb{K}(x_1)$ , es gibt also normierte Minimalpolynome  $f_2, \dots, f_m \in \mathbb{K}(x_1)[X]$  aus denen Gleichungen

$$f_i(x_i) = x_i^{m_i} + \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} x_i^j = 0$$

mit geeigneten  $a_{ij} \in \mathbb{K}(x_1)$ . Sei nun  $R$  der kleinste Teilring vom  $\mathbb{K}(x_1)$ , der  $\mathbb{K}[x_1]$  und alle  $a_{ij}$  enthält. Dann sind  $x_2, \dots, x_n$  ganz über  $R$ , also  $\mathbb{L}/R$  eine ganze Ringerweiterung. Wir erhalten:

- (1)  $R$  ist kein Körper, da  $\mathbb{K}[x_1]$  unendlich viele Primelemente enthält,  $R$  aber nur endlich viele Primfaktoren als Nenner enthält.
- (2) Jedes  $a \in R \setminus \{0\}$  besitzt ein Inverses in  $R$ . Offenbar ist  $\frac{1}{a}$  in  $\mathbb{L}$  enthalten. Andererseits ist  $\frac{1}{a}$  ganz über  $R$ , das heißt es existiert eine Darstellung

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \left(\frac{1}{a}\right)^j = 0$$

für geeignete  $b_j \in R$ . dann gilt aber

$$1 = - \sum_{j=0}^{m-1} b_j a^{m-j} = -a \cdot \sum_{j=0}^{m-1} b_j a^{m-j-1}$$

und damit  $a \in R^\times$ , womit  $R$  zum Körper wird, also ein Widerspruch zu (1).

Damit war die Annahme zu Beginn falsch und  $x_1$ , und damit auch  $\mathbb{L}$  ist algebraisch über  $\mathbb{K}$ .  $\square$

**Folgerung 4.4** Für jeden Körper  $\mathbb{K}$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$\mathcal{V}_n(\mathbb{K}) := \{V \subseteq \mathbb{K}^n \mid V \text{ is affine Varietät} \}$$

$$\mathcal{I}_n(\mathbb{K}) := \{I \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \mid I = \sqrt{I}\}$$

$$V := V_{n, \mathbb{K}} : \mathcal{I}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{V}_n(\mathbb{K}), \quad I \mapsto V(I)$$

$$I := I_{n, \mathbb{K}} : \mathcal{V}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{I}_n(\mathbb{K}), \quad V \mapsto I(V)$$

Dann gilt

$$\mathbb{K} \text{ ist algebraisch abgeschlossen} \iff I \text{ und } V \text{ sind zueinander invers}$$

**Bemerkung 4.5** Ist  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen und ist  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät, so entsprechen die Punkte in  $V$  bijektiv den maximalen Idealen in  $A(V) := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / I(V)$ .

## § 5 Morphismen zwischen affinen Varietäten

**Definition + Bemerkung 5.1** Sei  $\mathbb{K}$  Körper,  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$  affine Varietäten.

- (i) Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt *Morphismus*, falls es Polynome  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  gibt mit  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  für alle  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V \subseteq \mathbb{K}^n$ .
- (ii) Jeder Morphismus  $f : V \rightarrow W$  ist die Einschränkung eines Morphismus  $\tilde{f} : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ .
- (iii) Ein Morphismus  $f : V \rightarrow W$  heißt *Isomorphismus*, falls es einen Morphismus  $g : W \rightarrow V$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_W$  und  $g \circ f = \text{id}_V$ .
- (iv) Die affinen Varietäten bilden zusammen mit den Morphismen eine Kategorie  $\underline{\text{Aff}}(\mathbb{K})$

**Beispiel 5.2** (0) Die Identität

$$\text{id}_{\mathbb{A}^n(\mathbb{K})} : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

ist ein Morphismus mit  $f_i = X_i$ .

- (i) Weitere Morphismen sind

$$\text{Einbettungen: } \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{K}), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

$$\text{Projektionen: } \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \quad (x_1, \dots, x_{n+m}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{Vertauschungen: } \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad \sigma \in S_n$$

- (ii) Jedes  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ist ein Morphismus  $f : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{K})$ .
- (iii) Sei  $V = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ ,  $W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ . Definiere

$$f : V \rightarrow W, \quad x \mapsto (x^2, x^3)$$

Dann ist  $f$  ein Morphismus. Außerdem ist  $f$  bijektiv mit Umkehrabbildung

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

denn es gilt

$$f(g(x, y)) = f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2}\right) = (x, y)$$

$$g(f(x)) = g(x^2, x^3) = \left(\frac{x^3}{x^2}\right) = x$$

Aber:  $g$  ist kein Morphismus (und  $f$  damit kein Isomorphismus), falls  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen ist, denn andernfalls gäbe es ein Polynom  $h \in \mathbb{K}[X, Y]$  mit  $h(X, Y) = \frac{Y}{X}$ , also

$$X \cdot h - Y \in I(W) = I(V(\langle Y^2 - X^3 \rangle)) = \langle Y^2 - X^3 \rangle$$

und damit  $X \cdot h - Y = H \cdot (Y^2 - X^3)$  für ein  $H \in \mathbb{K}[X, Y] \not\equiv 0$ .

(iv) Sei  $\text{char}(\mathbb{K}) = p > 0$ . Dann heißt

$$f : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p)$$

*Frobenius-Homomorphismus.* Es gilt:  $f$  ist injektiv, denn für  $x^p = y^p$  gilt

$$0 = x^p - y^p = (x - y)^p \implies x - y = 0 \implies x = y$$

$f$  ist surjektiv, falls  $\mathbb{K}$  enthalten ist in  $\overline{\mathbb{F}}_p$  (im Allgemeinen jedoch nicht!). Damit sind die Fixpunkte unter  $f$  gerade jene, deren Koordinaten alle in  $\mathbb{F}_p$  liegen, also

$$f(x) = x \iff x \in \mathbb{F}_p^n \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n)$$

**Bemerkung 5.3** *Morphismen affiner Varietäten sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.*

*Beweis.* Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$  affine Varietäten und  $f : V \longrightarrow W$  ein Morphismus. Zeige, dass das Urbild abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist.

Sei  $Z \subseteq W$  abgeschlossen. Dann ist  $Z$  auch abgeschlossen in  $\mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ , also existiert ein Ideal

$$J \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

mit  $Z = V(J)$ . Zeige:  $Z$  ist abgeschlossen, also affine Varietät.

**Beh. (a)** Es gilt  $f^{-1}(Z) = V(I)$  mit  $I = \{g \circ f \mid g \in J\} \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Dazu:

**Bew. (a)** Zunächst sehen wir ein

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \xrightarrow{f} \mathbb{A}^m(\mathbb{K}) \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$$

Damit ist  $g \circ f : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$  Morphismus, also gerade  $g \circ f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Z) &\iff f(x) \in Z \iff g(f(x)) = 0 = (g \circ f)(x) \text{ für alle } g \in J \\ &\iff h(x) = 0 \text{ für alle } h \in I \\ &\iff x \in V(I) \end{aligned}$$

also gerade die Behauptung. □

**Bemerkung 5.4** *Für jede affine Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  bilden die Morphismen  $V \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$  eine  $\mathbb{K}$ -Algebra  $\mathbb{K}[V]$ . Es gilt*

$$\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I(V) = A(V)$$

*Beweis.* Offenbar ist  $\text{Mor}(V, \mathbb{A}^1(\mathbb{K}))$  eine  $\mathbb{K}$ -Unteralgebra von  $\text{Abb}(V, \mathbb{K})$ . Weiter ist die Abbildung

$$\phi : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{K}[V], \quad f \mapsto f|_V$$

surjektiver Homomorphismus mit  $\ker(\phi) = I(V)$ , also

$$\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I(V),$$

was zu zeigen war. □

**Proposition 5.5** Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$  affine Varietäten.

(i) Für jeden Morphismus  $f : V \rightarrow W$  ist die Abbildung

$$f^\# : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V], \quad g \mapsto g \circ f$$

ein Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren.

(ii) Die Abbildung

$$\alpha : \text{Mor}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[W], \mathbb{K}[V]), \quad f \mapsto f^\#$$

ist bijektiv.

*Beweis.* (i)  $g \circ f$  ist als Komposition von Morphismen ein Morphismus  $g \circ f : V \rightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  und es gilt

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

usw. (diese Eigenschaften kennen wir bereits lange). Damit ist  $f^\#$  Homomorphismus.

(ii) Offenbar ist die Abbildung mit (i) wohldefiniert. Für die Bijektivität zeige

*injektiv.* Seien  $f_1, f_2 \in \text{Mor}(V, W)$  mit  $f_1^\# = f_2^\#$ , also  $g \circ f_1 = g \circ f_2$  für alle  $g \in \mathbb{K}[W]$ . Insbesondere erhalten für die Projektionen  $p_i$  anstelle von  $g$  für alle  $1 \leq i \leq m$

$$p_i \circ f_1 = p_i \circ f_2 \implies f_{1i} = f_{2i} \implies f_1 = f_2$$

*surjektiv.* Sei  $\phi : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V]$  Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren, also  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[W], \mathbb{K}[V])$ .

Definiere

$$f : V \rightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (\phi(p_1)(x), \dots, \phi(p_m)(x))$$

Zeige nun

**Beh. (1)**  $f(V) \subseteq W$ .

**Beh. (2)**  $f^\# = \phi$ .

Dann ist  $f$  ein Urbild von  $\phi$  und die Behauptung folgt.

**Bew. (2)** Für  $i \in \{1, \dots, m\}$  gilt  $f^\#(p_i) = p_i \circ f \stackrel{\text{Def.}}{=} \phi(p_i)$ . Da die  $p_i$  die  $\mathbb{K}$ -Algebra  $\mathbb{K}[W]$  erzeugen, gilt  $f^\# = \phi$ .

**Bew. (1)** Zu zeigen ist  $f(V) \subseteq V(I(W)) \subseteq W$ . Sei also  $x \in V$  und  $g \in I(W)$  und zeige  $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$ . Sei dazu

$$\tilde{\phi} : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_m] \rightarrow \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

ein Homomorphismus, der die  $X_i$  abbildet auf eine Repräsentanten von  $\phi(p_i)$  für  $1 \leq i \leq m$ . Genauer, betrachte

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_m] & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \\ \downarrow \pi_W & & \downarrow \pi_V \\ W & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{K}[V] \end{array}$$



Es gilt  $\tilde{\phi}(I(W)) \subseteq I(V)$ , also  $\tilde{\phi}(g) \in I(V)$ . Damit erhalten wir

$$0 = \tilde{\phi}(g)(x) = g(\phi(p_1)(x), \dots, \phi(p_m)(x)) = (g \circ f)(x)$$

und damit die Behauptung. □

**Folgerung 5.6** Die Zuordnung  $V \longrightarrow \mathbb{K}[V]$  ist ein *kontravarianter* (=richtungsumkehrender) und *volltreuer* (=bijektiver) *Funktor* via

$$\Phi : \underline{\text{Aff}}(\mathbb{K}) \longrightarrow \underline{\text{K-Alg}}^{\text{red}}$$

$\Phi$  ist ein Morphismus auf Objekte:

$$\Phi(f) = f^\#, \quad \Phi(V) = \mathbb{K}[V]$$

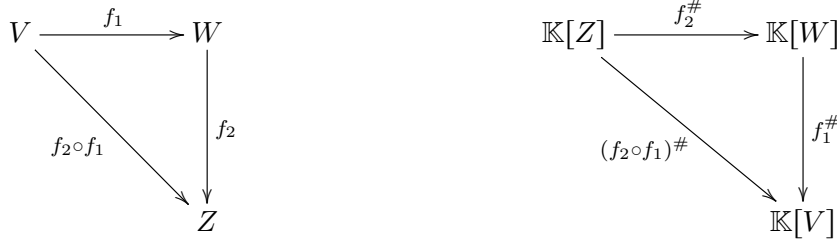
Für  $f \in \text{Mor}(V, W)$  ist

$$\Phi(f) : \Phi(W) = \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V] = \Phi(V), \quad g \mapsto g \circ f = f^\#$$

$$\Phi(\text{id}) = \text{id} = \text{id}^\#$$

$$\Phi(f_2 \circ f_1) = (f_2 \circ f_1)^\# = f_1^\# \circ f_2^\# = \Phi(f_1) \circ \Phi(f_2)$$

Das heißt, wir haben kommutative Diagramme



**Bemerkung 5.7** Seien  $V, W$  affine Varietäten über  $\mathbb{K}$  und

$$\phi : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$$

ein Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren. Ist  $f : V \longrightarrow W$  der zugehörige Morphismus (also  $f^\# = \phi$ ), so gilt für jedes  $x \in V$ :

$$\mathfrak{m}_{f(x)} = \phi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$$

*Beweis.* Es gilt

$$\mathfrak{m}_x = \{g \in \mathbb{K}[V] \mid g(x) = 0\},$$

also

$$\phi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \{h \in \mathbb{K}[W] \mid \phi \circ h \in \mathfrak{m}_x\} = \{h \in \mathbb{K}[W] \mid h(f(x)) = 0\} = \mathfrak{m}_{f(x)},$$

was zu zeigen war. □

**Beispiel 5.8** Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (x^2, x^3)$$

Dann ist

$$f^\# : \mathbb{K}[X, Y] / \langle Y^2 - X^3 \rangle \longrightarrow \mathbb{K}[T], \quad X \mapsto T^2, Y \mapsto T^3$$

Offensichtlich ist  $f^\#$  Homomorphismus. Aber: Kein Isomorphismus, denn  $f^\#$  ist zwar injektiv (nach Konstruktion), aber nicht surjektiv, da  $T \notin \text{Bild}(f^\#)$ .

Bemerkung: Bei Übergang in den Quotientenkörper existiert die Fortsetzung  $\tilde{f}^\#$ , da  $\langle Y^2 - X^3 \rangle$  prim und damit  $\mathbb{K}[X, Y] / \langle Y^2 - X^3 \rangle$  nullteilerfrei ist. Hier gilt  $T = \tilde{f}^\# \left( \frac{Y}{X} \right)$ ,  $\tilde{f}^\#$  ist also Isomorphismus.

**Satz 5.9** Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist

$$\Phi : \underline{\text{Aff}}(\mathbb{K}) \longrightarrow \underline{\mathbb{K}\text{-Alg}}^{\text{red}}, \quad V \mapsto \mathbb{K}[V]$$

eine Äquivalenz von Kategorien, das heißt, es existiert ein Funktor

$$\Psi : \underline{\mathbb{K}\text{-Alg}}^{\text{red}} \longrightarrow \underline{\text{Aff}}_{\mathbb{K}}$$

sodass  $\Phi \circ \Psi$  und  $\Psi \circ \Phi$  (als Funktoren) isomorph zur Identität sind.

*Beweis.* Sei  $A$  endlich erzeugte, reduzierte  $\mathbb{K}$ -Algebra und  $a_1, \dots, a_n$  Erzeuger von  $A$  als  $\mathbb{K}$ -Algebra. Dann gibt es einen surjektiven Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren

$$\pi : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow A, \quad X_i \mapsto a_i$$

Setze  $V := V(\ker(\pi))$ . Dann ist

$$\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / I(V(\ker(\pi))) \stackrel{\text{HNS}}{=} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / \ker(\pi) = A$$

## § 6 Reguläre Funktionen

In diesem Paragraph sei  $\mathbb{K}$  stets ein algebraisch abgeschlossener Körper.

**Bemerkung 6.1** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $h \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Dann gilt

$$\bar{h} \in (\mathbb{K}[V])^\times \iff V(h) \cap V = \emptyset$$

*Beweis.* Wir erhalten folgende Kette von Äquivalenzen:

$$V \cap V(h) = V(I(V) + \langle h \rangle) \stackrel{!}{=} \emptyset$$

$$\iff \text{HNS: } I(V) + \langle h \rangle = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

$$\iff 1 = f + gh \text{ für ein } f \in I(V) \text{ und } g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

$$\iff 1 = \bar{g}\bar{h} \text{ mod } \mathbb{K}[V]$$

$$\iff \bar{h} \in (\mathbb{K}[V])^\times.$$

**Definition 6.2** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $U \subseteq V$  offen,  $x \in U$ .

- (i) Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *regulär in  $x$* , falls es eine offene Umgebung  $U_x \subseteq U$  von  $x$  und  $g, h \in \mathbb{K}[V]$  gibt, sodass für alle  $y \in U_x$  gilt

$$h(y) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(y) = \frac{g(y)}{h(y)}$$

- (ii)  $f$  heißt *regulär auf  $U$* , falls  $f$  regulär in  $x$  ist für alle  $x \in U$ .  
 (iii) Die Menge der regulären Funktionen auf  $U$

$$\mathcal{O}_V(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist reguläre Funktion auf } U\}$$

ist eine  $\mathbb{K}$ -Algebra.

- (iv) Die Einschränkung

$$\rho_U : \mathbb{K}[V] \rightarrow \mathcal{O}_V(U), \quad f \mapsto f|_U$$

ist ein Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren.

- (v)  $\rho_U$  ist injektiv genau dann, wenn  $U$  dicht in  $V$  ist.

*Beweis von (v) " $\Leftarrow$ "* Sei  $f \in \ker(\rho_U)$ , also  $f|_U = 0$ . Dann gilt  $U \subseteq V(f)$ , und da  $V(f)$  abgeschlossen ist also auch  $\overline{U} \subseteq V(f)$ . Da  $U$  dicht in  $V$  ist erhalten wir  $V = \overline{U} \subseteq V(f)$  und damit  $f = 0$  in  $\mathbb{K}[V]$ .

*" $\Rightarrow$ "* Angenommen es gelte  $\overline{U} \neq V$ . Wähle  $x \in V \setminus \overline{U}$ . Da  $V(I(U)) = \overline{U}$ , existiert  $f \in I(U)$  mit  $f(x) \neq 0$ . Damit ist  $f \neq 0$  in  $\mathbb{K}[V]$  mit  $f|_U = \rho_U(f) = 0$ , also ist  $\rho_U$  nicht injektiv.

**Beispiel 6.3** (i)  $V = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ ,  $U = \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ . Dann ist  $\frac{1}{X} \in \mathcal{O}_V(U)$ . Setze dafür  $g(y) = 1$  und  $h(y) = X$ .

(ii)  $V = V(Y^2 - X^3)$ ,  $U = V \setminus \{(0, 0)\}$ . Dann ist  $\frac{Y}{X} \in \mathcal{O}_V(U)$ .

(iii)  $V = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ,  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Dann ist  $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_V(D(f))$ .

**Proposition + Definiton 6.4** Für jede affine Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  ist die Zuordnung  $U \mapsto \mathcal{O}_V(U)$  für alle  $U \subseteq V$  offen eine *Garbe von Ringen* auf  $V$ . Das bedeutet im Einzelnen:

- (i) Für offene Teilmengen  $U' \subseteq U \subseteq V$  ist

$$\rho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \rightarrow \mathcal{O}_V(U'), \quad f \mapsto f|_{U'}$$

ein Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren und es gilt für  $U'' \subseteq U' \subseteq U \subseteq V$  offen:

$$\rho_{U''}^U = \rho_{U''}^{U'} \circ \rho_{U'}^U$$

(ii) Sei  $U \subseteq V$  offen,  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $U$ . Dann gilt

(1) Für  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  ist  $f = 0 \iff \rho_{U_i}^U(f) = 0$  für alle  $i \in I$ .

(2) Ist für jedes  $i \in I$  ein  $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$  gegeben, sodass

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j) \quad \text{für alle } i, j \in I$$

so gibt es  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  mit  $f_i = \rho_{U_i}^U(f)$  für alle  $i \in I$ .

**Proposition 6.5** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät. Dann gelten folgende Endlichkeitsaussagen:

- (i) Jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen von  $V$  wird stationär, d.h.  $V$  ist noetherscher topologischer Raum.
- (ii) Jede offene Überdeckung von  $V$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h.  $V$  ist kompakt.
- (iii) Jede offene Teilmenge von  $V$  ist kompakt.

*Beweis.* (i) Sei  $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$  abgeschlossen in  $V$ , d.h.  $V_j = V(I_j)$  mit Idealen  $I_j \subseteq \mathbb{K}[V]$  für all  $j \in I$ . Aus  $V_j \supseteq V_{j+1}$  folgt  $I_j \subseteq I_{j+1}$ , also ist  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$  absteigende Kette von Idealen. Da  $\mathbb{K}[V]$  noethersch ist, wird die Kette der Ideale stationär, so auch die  $V_j$ .

(ii) Folgt unmittelbar aus (iii).

(iii) Sei  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $U \subseteq V$  offen. Angenommen, es gibt eine Folge  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (U_i)_{i \in I}$  mit

$$\bigcup_{n=1}^k U_n \neq U \quad \text{und} \quad U_{k+1} \not\subseteq \bigcup_{n=1}^k U_n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Folgt

$$V_k := V \setminus \bigcup_{n=1}^k U_n$$

wäre  $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$  eine nicht stationär werdende, absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen, ein Widerspruch zu (i).  $\square$

**Satz 6.6** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $f \in \mathbb{K}[V] \setminus \{0\}$ . Dann ist

$$\mathcal{O}_V(D(f)) \cong \mathbb{K}[V]_f$$

wobei  $\mathbb{K}[V]_f$  die Lokalisierung von  $\mathbb{K}[V]$  nach den Potenzen von  $f$  bezeichne, also gerade

$$\mathbb{K}[V]_f = \left\{ \frac{g}{f^d} \mid g \in \mathbb{K}[V], d \geq 0 \right\}$$

Dabei gilt, da  $\mathbb{K}[V]$  nicht notwendigerweise nullteilerfrei ist

$$\frac{g_1}{f^{d_1}} = \frac{g_2}{f^{d_2}} \iff f^d (g_1 f^{d_2} - g_2 f^{d_1}) = 0 \quad \text{für ein } d \geq 0$$

Insbesondere erhalten wir für  $f = 1$

$$\mathcal{O}_V(V) \cong \mathbb{K}[V]$$

*Beweis.* Definiere

$$\alpha : \mathbb{K}[V]_f \longrightarrow \mathcal{O}_V(D(f)), \quad \frac{g}{f^d}(y) \mapsto \frac{g(y)}{f(y)^d}$$

Zeige nun, dass  $\alpha$  der gewünschte Isomorphismus ist.

*wohldefiniert.* Seien dafür für  $d_1, d_2 \geq 0, g_1, g_2 \in \mathbb{K}[V]$

$$\frac{g_1}{f^{d_1}} = \frac{g_2}{f^{d_2}} \text{ in } \mathbb{K}[V] \iff f^d (g_1 f^{d_2} - g_2 f^{d_1}) = 0 \text{ für ein } d \geq 0$$

Damit gilt für alle  $y \in V$

$$f(y)^d (g_1(y)f(y)^{d_2} - g_2(y)f(y)^{d_1}) = 0,$$

wegen der Nullteilerfreiheit von  $\mathbb{K}$  also

$$g_1(y)f(y)^{d_2} - g_2(y)f(y)^{d_1} = 0 \iff \frac{g_1(y)}{f(y)^{d_1}} = \frac{g_2(y)}{f(y)^{d_2}}$$

*injektiv.* Sei

$$\frac{g}{f^d} \in \ker(\alpha) \iff \alpha\left(\frac{g}{f^d}(y)\right) = \frac{g(y)}{f(y)^d} = 0 \text{ für alle } y \in D(f)$$

Dann ist  $g(y) = 0$  auf ganz  $D(f)$ , also  $g \in I(D(f))$  und somit  $f \cdot g = 0$  auf  $V$ . Dann gilt

$$f(g \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 0 \iff \frac{g}{1} = \frac{0}{1}$$

und somit  $g = 0$ . Folglich ist  $\alpha$  injektiv.

*surjektiv.* Sei  $g \in \mathcal{O}_V(V)$ . Finde  $\tilde{g} \in \mathbb{K}[V]_f$  mit  $\alpha(\tilde{g}) = g$ .

Für jedes  $x \in D(f)$  gibt es offene Umgebungen  $U_x \subseteq D(f)$ ,  $g_x, h_x \in \mathbb{K}[V]$ , sodass gilt

$$g(y) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)} \text{ für alle } y \in U_x$$

Wegen 6.4 gibt es endlich viele  $x_1, \dots, x_m \in D(f)$  mit

$$\bigcup_{i=1}^m U_{x_i} = D(f)$$

Setze  $g_i := g_{x_i}$ ,  $h_i := h_{x_i}$ ,  $U_i := U_{x_i}$  für alle  $1 \leq i \leq m$ . Wegen  $U_i \subseteq D(h_i)$  ist mit Komplementbildung

$$D(f) = \bigcup_{i=1}^m U_i \subseteq \bigcup_{i=1}^m D(h_i)$$

und damit

$$V(f) \supseteq \bigcap_{i=1}^m V(h_i) \iff f \in I\left(\bigcap_{i=1}^m V(h_i)\right) = \sqrt{\langle h_1, \dots, h_m \rangle}$$

Folglich finden wir  $d \in \mathbb{N}$  mit

$$f^d = \sum_{i=1}^m b_i h_i \text{ für geeignete } b_i \in \mathbb{K}[V]$$

Sei

$$\tilde{g} := \sum_{i=1}^m b_i g_i \in \mathbb{K}[V]$$

Dann gilt für  $1 \leq j \leq m$  und  $y \in U_j$ :

$$g(y) = \frac{g_j(y)}{h_j(y)} = \frac{(g_j f^d)(y)}{(h_j f^d)(y)} = \frac{g_j \sum_{i=1}^m b_i h_i}{h_j f^d}(y) \stackrel{\text{Beh. (i)}}{=} \frac{(\sum_{i=1}^m b_i g_i) h_j}{h_j f^d}(y) = \frac{\tilde{g}}{f^d}(y) = \frac{\tilde{g}(y)}{f^d(y)}$$

Also  $\alpha(\tilde{g}) = g$ .

Es bleibt zu zeigen:

$$g_j \left( \sum_{i=1}^m b_i h_i \right) = \left( \sum_{i=1}^m b_i g_i \right) h_j$$

also  $g_i h_j = g_j h_i$  auf ganz  $U_j$ , nicht nur auf  $U_j \cap U_i$ . Dafür

**Beh. (1)** Ohne Einschränkung ist  $g_i h_j = g_j h_i$  in  $\mathbb{K}[V]$ .

**Beh. (2)** Ohne Einschränkung ist  $U_i = D(h_i)$ .

Nun folgt die Behauptung des Satz.

**Bew.(1)** Aus Beh. (2) folgt  $g_i h_j = g_j h_i$  auf  $U_i \cap U_j$ , also gerade  $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ . Weiter gilt

$$h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{K}[V] \quad (*)$$

Setze

$$\tilde{g}_i := g_i h_i, \quad \tilde{h}_i := h_i^2, \quad \tilde{g}_j := g_j h_j, \quad \tilde{h}_j := h_j^2$$

Dann wird (\*) zu

$$\tilde{g}_i \tilde{h}_j - \tilde{g}_j \tilde{h}_i = 0 \quad \text{in } \mathbb{K}[V]$$

und es gilt

$$\frac{\tilde{g}_i}{\tilde{h}_i} = \frac{g_i}{h_i}, \quad \frac{\tilde{g}_j}{\tilde{h}_j} = \frac{g_j}{h_j} \quad \text{auf } U_i \cap U_j$$

wobei  $U_i = D(h_i)$  und  $D(h_j) = U_j$ , also folgt die Behauptung.

**Bew. (2)** Es gilt  $U_i \subseteq D(h_i)$ . Es bilden die  $\{D(h) \mid h \in \mathbb{K}[V]\}$  eine Basis der Zariski-Topologie, d.h. es existiert  $h \in \mathbb{K}[V]$  mit  $x_i \in D(h)$  und  $D(h) \subseteq U_i$ .

$$\implies D(h) \subseteq D(h_i) \implies V(h) \supseteq V(h_i)$$

$$\implies h \in I(V(h_i)) = \sqrt{h_i}.$$

Damit finden wir  $d \in \mathbb{N}$ , sodass gilt

$$h^d = a \cdot h_i \quad \text{für ein } a \in \mathbb{K}[V]$$

Ersetze nun  $g_i$  durch  $g_i \cdot a$ ,  $h_i$  durch  $h^d = a \cdot h_i$ ,  $U_i$  durch  $D(h_i)$  und setze  $\tilde{g}_i, \tilde{h}_i$  wie oben. Dann gilt für  $y \in D(h)$

$$g(y) = \frac{g_i}{h_i}(y) = \frac{g_i \cdot a}{h_i \cdot a}(y) = \frac{\tilde{g}_i}{\tilde{h}_i}(y),$$

es folgt die Behauptung. □

**Proposition 6.7** Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$  affine Varietäten,  $f : V \rightarrow W$  ein Morphismus,  $U \subseteq W$  offen. Dann ist

$$f_U^\# : \mathcal{O}_W(U) \rightarrow \mathcal{O}_V(f^{-1}(U)), \quad g \mapsto g \circ f$$

ein Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren.

*Beweis.* Zu zeigen ist:  $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$ . Seien dazu  $g \in \mathcal{O}_W(U)$ ,  $x \in f^{-1}(U)$ ,  $y = f(x) \in U$ . Nach

Voraussetzung gibt es eine Umgebung  $U_y \subseteq U$  von  $y$ , sodass

$$g = \frac{g_y}{h_y} \quad \text{für geeignete } g_y, h_y \in \mathbb{K}[V]$$

Für  $z \in f^{-1}(U_y) \subseteq f^{-1}(U)$  ist dann

$$(g \circ f)(z) = \frac{g_y(f(z))}{h_y(f(z))} = \frac{g_y \circ f}{h_y \circ f}(z) = \frac{f^\#(g_y)}{f^\#(h_y)}(z)$$

mit  $f^\# : \mathbb{K}[V] \rightarrow \mathbb{K}[V], g \mapsto g \circ f$  wie gewöhnlich. Damit ist  $g \circ f$  regulär auf  $f^{-1}(U_y)$  und damit insbesondere in  $x$ . □

**Bemerkung + Definition 6.8** (i) Sind  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  Garben, so ist ein *Garbenmorphismus*  $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  eine Kollektion von Morphismen  $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ , welche mit der Einschränkungabbildung verträglich sind.

(ii) Die Homomorphismen  $f_U^\#$  für  $U \subseteq W$  offen bilden einen Garbenmorphismus

$$f^\# : \mathcal{O}_W \rightarrow f_*\mathcal{O}_V, \quad U \mapsto (f_*\mathcal{O}_V)(U) = \mathcal{O}_v(f^{-1}(U))$$

d.h. für offene Mengen  $U' \subseteq U \subseteq W$  ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_W(U) & \xrightarrow{\rho_{U'}^U} & \mathcal{O}_W(U') \\ \downarrow f_U^\# & & \downarrow f_{U'}^\# \\ \mathcal{O}_V(f^{-1}(U)) & \xrightarrow{\rho_{f^{-1}(U')}^{f^{-1}(U)}} & \mathcal{O}_V(f^{-1}(U')) \end{array}$$

**Lemma 6.9** Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$  affine Varietäten. Dann ist eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  Morphismus genau dann, wenn für jedes offene  $U \subseteq W$  und jedes  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  gilt:  $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$ .

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " Siehe 6.6

" $\Leftarrow$ " Zu zeigen:  $p_i \circ f$  ist Polynom für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ , wobei

$$p_i : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

die Projektionen auf die  $i$ -te Komponente ist.

Es gilt  $p_i \in \mathcal{O}_W(U)$  für jedes offene  $U \subseteq W$ , nach Voraussetzung also auch  $p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$ .

Dann gilt  $p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(V) \stackrel{6.5}{=} \mathbb{K}[V]$ . □

**Beispiel 6.10** Sei  $U = \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ . Dann ist  $g := \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(\mathbb{K})}(U)$ . Sei

$$f : U \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (x, g(x)) = \left(x, \frac{1}{x}\right)$$

Dann ist

$$f(U) = V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$$

Die Projektion

$$p_1 : \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}), \quad (x, y) \mapsto x$$

ist die Umkehrabbildung zu  $f$ .

**Definition + Bemerkung 6.11** (i) Eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  heißt *quasiaffine Varietät*, wenn  $U$  Zariski-offen in einer affinen Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  ist.

(ii) Eine Abbildung  $f : U_1 \longrightarrow U_2$  von quasiaffinen Varietäten heißt *Morphismus* oder auch *regulär*, falls  $f$  stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist und für jede offene Teilmenge  $U \subseteq U_2$  und  $g \in \mathcal{O}_{U_2}(U)$  gilt:  $g \circ f \in \mathcal{O}_{U_1}(f^{-1}(U))$ .

(iii) Seien  $U_1 \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), U_2 \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$  quasiaffine Varietäten. Dann ist die Abbildung  $f : U_1 \longrightarrow U_2$  genau dann regulär, wenn es reguläre Funktionen  $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_{U_1}(U_1)$  gibt, sodass

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad \text{für alle } x \in U_1$$

(iv) Die quasiaffinen Varietäten bilden zusammen mit den regulären Abbildungen eine Kategorie, von der  $\underline{\text{Aff}}(\mathbb{K})$  eine volle Unterkategorie ist.

(v) Eine quasioffene Varietät heißt *affin* (als abstrakte Varietät), falls sie isomorph zu einer affinen Varietät, also einer Zariski-abgeschlossenen Teilmenge des  $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  für ein  $n \geq 1$  ist.

*Beweis.* (iii) Folgt aus 6.8.

(iv) Zeige dass für affine Varietäten die regulären Abbildungen bereits Morphismen sind (also dass  $\underline{\text{Aff}}(\mathbb{K})$  eine volle Unterkategorie bildet).

Sei  $f : V \longrightarrow W$  regulär zwischen affinen Varietäten  $V$  und  $W$ . Mit (iii) folgt

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad \text{für alle } x \in V$$

mit  $f_i \in \mathcal{O}_V(V) = \mathbb{K}[V]$ . Dann folgt bereits, dass  $f$  Morphismus ist. □

**Bemerkung 6.12** Für  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ist  $D(f)$  affin als abstrakte Varietät.

*Beweis.* Definiere

$$G := f \cdot X_{n+1} - 1 \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$$

und  $V := V(G) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$ .

Die Projektion

$$\pi_{n+1} : \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

ist Morphismus mit  $\pi_{n+1}(V) \subseteq D(f)$ . Weiter ist

$$\phi : D(f) \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K}), \quad x \mapsto \left( x, \frac{1}{f(x)} \right)$$

regulär mit  $\phi(D(f)) \subseteq V$ .  $\pi_{n+1}, \phi$  sind invers zueinander, also gilt  $D(f) \cong V$ . □



## § 7 Rationale Abbildungen und Funktionenkörper

Sei  $\mathbb{K}$  weiterhin algebraisch abgeschlossen.

**Definition + Bemerkung 7.1** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  quasiaffine Varietät.

- (i) Eine *rationale Funktion* auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$  mit  $U \subseteq V$  offen und dicht sowie  $f \in \mathcal{O}_V(U)$ . Dabei sei

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \iff f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$$

- (ii) In jeder Äquivalenzklasse gibt es eine bezüglich der Inklusion maximalen Vertreter  $(U_{max}, f_{max})$ .  $U_{max}$  heißt *Definitionsbereich* von  $(U, f)_{\sim}$ .  $V \setminus U_{max}$  heißt *Polstellenmenge* von  $(U, f)_{\sim}$ .
- (iii) Die rationalen Funktionen auf  $V$  bilden eine  $\mathbb{K}$ -Algebra.
- (iv) Ist  $V$  irreduzibel, so ist

$$\text{Rat}(V) \cong \mathbb{K}(V) = \text{Quot}(\mathbb{K}[V])$$

der *Funktionenkörper* von  $V$ .

*Beweis.* (i) Zu zeigen ist lediglich die Transitivität: Gelte  $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2), (U_2, f_2) \sim (U_3, f_3)$ .

Dann gilt per Definition  $f_1|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3} = f_2|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3}$  und damit, da  $U_1 \cap U_2 \cap U_3$  dicht in  $U_1 \cap U_3$  ist:  $f_1|_{U_1 \cap U_3} = f_3|_{U_1 \cap U_3}$ .

- (ii) Setze  $U_{max} = \bigcup_{(U', f') \in (U, f)_{\sim}} U'$ .

(iii) klar.

(iv) Sei

$$\alpha : \mathbb{K}(V) \longrightarrow \text{Rat}(V), \quad \frac{f}{g} \mapsto \left( D(g), \frac{f}{g} \right)_{\sim}$$

Dann ist  $\alpha$  offensichtlich Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren.

*injektiv:* klar.

*surjektiv:* Sei  $(U, f)_{\sim} \in \text{Rat}(V)$ . Dann ist  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  und es existiert eine offene dichte Teilmenge  $U' \subseteq U$  und  $g, h \in \mathcal{O}_V(U)$ , sodass gilt

$$f = \frac{g}{h} \quad \text{auf } U' \iff \alpha \left( \frac{g}{h} \right) = f,$$

was zu zeigen war. □

**Beispiel 7.2** Sei  $U \subseteq V$  von der Form  $U = D(h)$  für ein  $h \in \mathbb{K}[V]$ . Dann ist

$$\mathcal{O}_V(D(h)) = \mathbb{K}[V]_h = \left\{ \frac{f}{g} \in \text{Quot}(\mathbb{K}[V]) \mid f \in \mathbb{K}[V], g = h^d \text{ für ein } d \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Dann ist

$$\text{Quot}(\mathcal{O}_V(D(h))) = \text{Quot}(\mathbb{K}[V]_h) = \text{Quot}(\mathbb{K}[V]) = \mathbb{K}(V),$$

denn es gilt

$$\mathbb{K}[V] \subseteq \mathbb{K}[V]_h \subseteq \mathbb{K}[V]_{\mathbb{K}[V] \setminus \{0\}} = \text{Quot}(\mathbb{K}[V]).$$

**Definition + Bemerkung 7.3** Seien  $V, W$  quasi-affine Varietäten.

- (i) Eine *rationale Abbildung*  $f : V \dashrightarrow W$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$  mit  $U \subseteq V$  offen und dicht sowie  $f : U \rightarrow W$  reguläre Abbildung. Dabei gelte wieder

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \iff f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$$

- (ii) In jeder Äquivalenzklasse  $(U, f)_{\sim}$  gibt es ein maximales  $U := \text{Def}(f)$ .  $U$  heißt *Definitionsbereich*.  
 (iii) Rationale Abbildungen  $f : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$  entsprechen den rationalen Funktionen auf  $V$ .

**Definition 7.4** Ein Morphismus  $f : V \rightarrow W$  von quasiaffinen Varietäten heißt *dominant*, falls  $f(V) \subseteq W$  dicht in  $W$  ist.

- Bemerkung + Definition 7.5** (i) Die irreduziblen quasiaffinen Varietäten über  $\mathbb{K}$  bilden mit den dominanten rationalen Abbildungen eine Kategorie.  
 (ii) Isomorphismen in dieser Kategorie heißen *birationale Abbildungen*.

*Beweis von (i).* Sind  $f : V \dashrightarrow W, g : W \dashrightarrow Z$  dominante rationale Abbildungen irreduzibler Varietäten  $V, W, Z$ , so ist  $f^{-1}(\text{Def}(g))$  offen und nichtleer, da  $f$  dominant ist.

Damit ist  $U := f^{-1}(\text{Def}(g))$  dicht in  $V$ .

$\implies U \subseteq \text{Def}(g \circ f)$ , also ist  $g \circ f$  rationale Abbildung. □

**Beispiel 7.6** (i) Sei  $V = V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ ,

$$f : V \rightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}), \quad (x, y) \mapsto x$$

$$g : \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \dashrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}), \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

Dann ist  $f$  surjektiv,  $g$  ist dominante rationale Abbildung. Aber es gilt  $\text{Def}(g \circ f) = V \setminus V(X)$  ist nicht dicht in  $V$ , also ist  $g \circ f$  keine rationale Abbildung.

- (ii) Betrachte

$$\sigma : \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K}), \quad (X, Y) \mapsto \left( \frac{1}{X}, \frac{1}{Y} \right)$$

$\sigma$  ist rationale Abbildung mit  $\text{Def}(\sigma) = D(XY), \sigma^2 = \text{id}$  als birationale Abbildung. Damit ist  $\sigma$  eine birationale Abbildung.

**Proposition 7.7** Sei  $f : V \rightarrow W$  Morphismus von affinen Varietäten und

$$f^\# : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V], \quad g \mapsto g \circ f$$

der induzierte  $\mathbb{K}$ -Algebren Homomorphismus der zwischen den Koordinatenringen. Dann gilt

$$f^\# \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist dominant}$$

*Beweis. Beh. (1)* Für  $Z \subseteq W$  abgeschlossen gilt

$$(f^\#)^{-1}(I(Z)) = I(\overline{f(Z)}) = I(f(Z))$$

**Bew. (1)** Es gilt:  $g \in (f^\#)^{-1}(I(Z))$

$$\iff f^\#(g) \in I(Z)$$

$$\iff g \circ f \in I(Z)$$

$$\iff g(f(z)) = 0 \text{ für alle } z \in Z$$

$$\iff g(y) = 0 \text{ für alle } y \in f(Z)$$

$$\iff g \in I(\overline{f(Z)}) = I(f(Z))$$

Damit gilt für  $Z = V$  wegen  $I(V) = 0$  in  $\mathbb{K}[V]$  mit Beh. (1):

$$(f^\#)^{-1}(0) = (f^\#)^{-1}(I(V)) = I(\overline{f(V)}) \stackrel{\text{dom.}}{=} I(W) = 0$$

Also gerade  $\ker(f^\#) = \{0\}$ , also ist  $f^\#$  injektiv. □

**Folgerung 7.8** Jede dominante Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  zwischen irreduziblen quasiaffinen Varietäten induziert einen Körperhomomorphismus  $f^\# : \mathbb{K}(W) \rightarrow \mathbb{K}(V)$ .

*Beweis.* Seien  $V, W$  affin. Ist  $f$  Morphismus, so ist

$$f^\# : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V], \quad g \mapsto g \circ f$$

injektiv und lässt sich damit fortsetzen zu

$$f^\# : \mathbb{K}(W) \rightarrow \mathbb{K}(V), \quad \frac{g}{h} \mapsto \frac{f^\#(g)}{f^\#(h)}$$

Ist  $\text{Def}(f) \neq V$ , so sei  $g \in \mathbb{K}[V]$  mit  $D(g) \supseteq \text{Def}(f)$ . Für  $h \in \mathbb{K}[W]$  ist dann

$$f^\#(h) = h \circ f \in \mathcal{O}_V(D(g)),$$

also induziert  $f$  einen Homomorphismus

$$f^\# : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathcal{O}_V(D(g)) = \mathbb{K}[V]_g$$

$D(g)$  ist nach 6.10 affin, mit 7.6 folgt also die Injektivität von  $f^\#$ . Damit existiert die Fortsetzung

$$f^\# : \mathbb{K}(W) \rightarrow \text{Quot}(\mathbb{K}[V]_g) = \text{Quot}(\mathbb{K}[V]) = \mathbb{K}(V)$$

**Satz 7.9** Ist  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen, so ist die Zuordnung

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \text{irreduzible, quasi-affine Varietäten} \\ \text{dominante rationale Abbildungen} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}/\mathbb{K} \text{ endlich erzeugt} \\ \mathbb{K}\text{-Algebra Homomorphismen} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V \\ f : V \dashrightarrow W \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}(V) \\ f^\# : \mathbb{K}(W) \rightarrow \mathbb{K}(V) \end{array} \right\}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\Phi$  ein Funktor. Zu zeigen bleibt also noch

- (i) Zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  gibt es  $V$  mit  $\mathbb{K}(V) \cong \mathbb{L}$ .  
(ii) Die Zuordnung

$$\text{Rat}^{\text{Dom}}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(W), \mathbb{K}(V)), \quad f \mapsto f^{\#}$$

ist eine Bijektion.

zu (i) Seien  $x_1, \dots, x_n$  Erzeuger von  $\mathbb{L}$  über  $\mathbb{K}$  und  $A := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  die von den  $x_i$  erzeugte  $\mathbb{K}$ -Algebra.  $A$  ist als solche offenbar endlich erzeugt und reduziert, da  $A$  Teilmenge eines Körpers ist. Damit existiert eine affine Varietät  $V$  mit  $A \cong \mathbb{K}[V]$ . Da  $A$  nullteilerfrei ist, ist  $V$  sogar irreduzibel und damit

$$\mathbb{K}(V) = \text{Quot}(\mathbb{K}[V]) \cong \text{Quot}(A) = \mathbb{L}$$

zu (ii) Es gilt

*injektiv.* Seien  $f, g : V \dashrightarrow W$  mit  $f^{\#} = g^{\#}$ . Wähle  $U = D(h) \subseteq \text{Def}(f) \cap \text{Def}(g)$  offen und affin.  $f|_U$  und  $g|_U$  sind Morphismen von  $U$  nach  $W$ .

Diese induzieren  $\mathbb{K}$ -Algebren Homomorphismen

$$g_U^{\#}, f_U^{\#} : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[U] \subseteq \mathbb{K}(V)$$

*surjektiv.* Sei

$$\alpha : \mathbb{K}(W) \longrightarrow \mathbb{K}(V)$$

ein  $\mathbb{K}$ -Algebren Homomorphismus. Wähle Erzeuger  $g_1, \dots, g_n$  von  $\mathbb{K}[W]$  also  $\mathbb{K}$ -Algebra. Für jedes  $1 \leq i \leq n$  ist  $\alpha(g_i)$  rationale Funktion auf  $V$ .

Da  $V$  irreduzibel ist, ist

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Def}(\alpha(g_i))$$

offen und affin für geeignete  $g \in \mathbb{K}[V]$ . Nach Konstruktion induziert  $\alpha$  einen  $\mathbb{K}$ -Algebren Homomorphismus

$$\alpha : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{O}_U(U) = \mathbb{K}[U]$$

Damit gilt nach 5.8 gilt dann  $\alpha = f^{\#}$  für einen Morphismus  $f : U \longrightarrow W$ .

Da außerdem  $U$  dicht in  $V$  ist, ist  $(U, f)$  rationale Abbildung, denn  $f$  ist dominant, da  $f^{\#}$  als Körperhomomorphismus injektiv ist.  $\square$

# Kapitel II

## Projektive Varietäten

### § 8 Varietäten im projektiven Raum

**Erinnerung 8.1** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(i) Der projektiven Raum ist

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{n+1} / \sim$$

mit

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \iff \text{es ex. } \lambda \in \mathbb{K}^\times \text{ mit } \lambda x_i = y_i \text{ für alle } 0 \leq i \leq n$$

Anschaulich sind die Elemente des projektiven Raums gerade die Ursprungsgeraden des  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

Schreibweise: Es sei  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  die Äquivalenzklasse von  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ .

(ii) Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  sei

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i \neq 0\}$$

Es gilt  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup \dots \cup U_n$ . Für ein festes  $i \in \{0, \dots, n\}$  betrachte

$$\psi_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n)$$

Offenbar ist  $\psi_i$  injektiv mit  $\text{Bild}(\psi_i) = U_i$ . Die Umkehrabbildung ist

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad (x_0 : \dots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

(iii) Die Abbildung

$$\rho_i : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus U_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}), \quad (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n)$$

ist bijektiv. Induktiv erhalten wir

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{K}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

wobei die Wahl von  $\infty$  willkürlich ist. Insbesondere gilt also

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

(iv)  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  und  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sind  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten.

**Definition + Bemerkung 8.2** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(i) Ein Polynom

$$f = \sum_{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}}^{< \infty} a_{i_0, \dots, i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$$

heißt *homogen von Grad*  $d \geq 0$ , falls für alle nichtverschwindenden Koeffizienten der Gesamtgrad konstant ist, also

$$a_{i_0, \dots, i_n} \neq 0 \implies i_0 + \dots + i_n = d \quad \text{für alle } i$$

(ii) Ist  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  homogen von Grad  $d$ , so gilt für alle  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ :

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$$

(iii) Ist  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  homogen, so ist die Nullstellenmenge  $V(f) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  wohldefiniert.

**Definition 8.3** Ein Teilmenge  $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  heißt *projektive Varietät*, wenn es eine Menge  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  von homogenen Polynomen gibt, sodass

$$V = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\}$$

**Beispiel 8.4** (i) Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  ist

$$V(X_i) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus U_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$$

eine projektive Varietät.

(ii) Es gilt  $V(X_0, \dots, X_n) = \emptyset$ .

**Bemerkung 8.5** Ist  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät, so ist

$$\phi_i(V \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$$

affine Varietät für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

*Beweis.* Es genügt, die Aussage für  $V(f)$ ,  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  homogen zu zeigen, denn:

$$V(\mathcal{F}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} V(f) \implies \phi_i(V \cap U_i) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \phi_i(V(f) \cap U_i)$$

Sei nun

$$\tilde{f} := f(X_0, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n] = \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$$

**Beh. (1)** Es gilt  $V(\tilde{f}) = \phi_i(V(f) \cap U_i)$ .

**Bew. (1)** Wir haben

" $\supseteq$ " Sei  $x \in V(f) \cap U_i$ ,  $x = (x_0 | \dots | x_n)$ . Dann gilt

$$x_i \neq 0, \quad \phi_i(x) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Also

$$\tilde{f}(\phi_i(x)) = f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) = \frac{1}{x_i^d} f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$$

" $\subseteq$ " Sei nun  $y = (y_1, \dots, y_n) \in V(\tilde{f})$ . Dann gilt

$$\tilde{f}(y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0$$

Also gilt  $x := (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \in U_i \cap V(f)$  und  $\phi_i(x) = y$ , also gerade die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 8.6** Betrachte  $V = V(X_0 X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ . Es gilt

$$\phi_0(V \cap U_0) = V(X_2 - X_1^2) \quad \text{Parabel}$$

$$\phi_1(V \cap U_1) = V(X_0 X_2 - 1) \quad \text{Hyperbel}$$

$$\phi_2(V \cap U_2) = V(X_0 - X_1^2) \quad \text{Parabel}$$

**Bemerkung 8.7** Zu jeder affine Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  gibt es eine projektive Varietät  $\tilde{V}_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  mit  $\phi_i(\tilde{V}_i \cap U_i) = V$ .

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung  $V = V(f)$  für ein  $f \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$ . Schreibe

$$f = \sum_{k=0}^d f_k$$

mit homogenen Polynomen  $f_k$  von Grad  $k$  für  $1 \leq k \leq d$ ,  $d = \deg(f)$ . Sei

$$F := \sum_{k=0}^d X_i^{d-k} f_k \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_i, X_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n]$$

Dann ist  $F$  homogen von Grad  $d$  und es gilt:

**Beh. (1)** Es gilt  $\phi_i(V(F) \cap U_i) = V(f)$ .

**Bew. (1)** Wir haben

" $\supseteq$ " Sei  $y := (y_1, \dots, y_n) \in V(f)$ , d.h es gilt  $f(y) = 0$ . Setze

$$x := \psi_i(y) = (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \in U_i, \quad \phi_i(x) = y.$$

Dann gilt

$$F(x) = \sum_{k=0}^d X_i^{d-k} f_k(y_1, \dots, y_n) = f(y) = 0.$$

" $\subseteq$ " Sei nun  $y \in \phi_i(V(F) \cap U_i)$ , d.h. es gilt  $y = \phi(x)$  mit  $x \in V(F) \cap U_i$ .

Damit gilt  $x = (x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)$  und

$$0 = F(x) = \sum_{k=0}^d f_k(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) = f(\phi_i(x)) = f(y),$$

also  $y \in V(f)$ . □

**Definition + Bemerkung 8.8** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \geq 1$ .

(i) Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} D_i : \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n] \cong \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n], \\ f(x_0, \dots, x_n) &\mapsto f(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

*Dehomogenisierung* nach der  $i$ -ten Variable.  $D_i$  ist als Auswertung ein  $\mathbb{K}$ -Algebren Homomorphismus.

(ii) Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} H_i : \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n, X_i] \cong \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] \\ f = \sum_{k=0}^d f_k &\mapsto \sum_{k=0}^d X_i^{d-k} f_k \end{aligned}$$

(*i*-te) *Homogenisierung*, wobei  $f_k$  homogene Polynoms von Grad  $k$  sind. Es gilt

$$H_i(fg) = H_i(f)H_i(g)$$

$$H_i(f + g) \neq H_i(f) + H_i(g), \quad \text{falls } \deg(f) \neq \deg(g)$$

(iii) Es gilt

$$D_i \circ H_i = \text{id}_{\mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]}$$

$$(H_i \circ D_i)(f) = \frac{1}{X_i^e} f, \quad e = \max_{e \in \mathbb{N}_0} \{X_i^e \mid X_i^e \mid f, X_i^{e+1} \nmid f\}, \quad \text{falls } f \text{ homogen.}$$

## § 9 Die Zariski Topologie auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

**Definition 9.1** Für  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  sei  $I(V) \triangleleft \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  das von allen homogenen Polynomen  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  mit  $f(x) = 0$  für alle  $x \in V$  erzeugte Ideal.  $I(V)$  heißt *Verschwundungsideal* von  $V$ .

**Definition + Bemerkung 9.2** (i) Ein (kommutativer) Ring (mit 1)  $R$  heißt *graduirt*, falls es eine Zerlegung

$$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$$

in abelsche Gruppen  $R_d$  gibt, sodass für alle  $f \in R_d, g \in R_e$  gilt:  $f \cdot g \in R_{d+e}$ .

(ii) eine  $\mathbb{K}$ -Algebra  $S$  heißt *graduirt*, wenn

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$



graduierter Ring ist und  $S_0 = \mathbb{K}$ . Dies impliziert, dass die  $S_d$  sogar zu  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen werden.

- (iii) Die Elemente in  $R_d$  bzw.  $S_d$  heißen *homogen vom Grad  $d$* .
- (iv) Ein Ideal in  $R$  heißt *homogen*, wenn es von homogenen Elementen erzeugt werden kann.
- (v) Für ein Ideal  $I \trianglelefteq R$  sind äquivalent:
  - (a)  $I$  ist homogen.
  - (b)  $I$  besitzt eine Darstellung

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap R_d)$$

- (c) Für jedes  $f \in I$  mit

$$f = \sum_{d=0}^{\infty} f_d, \quad f_d \in R_d$$

gilt bereits  $f_d \in I$  für alle  $d \in \mathbb{N}_0$ .

- (vi) Ist  $I \trianglelefteq R$  homogenes Ideal, so ist  $R/I$  graduiert mit

$$R/I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d / (R_d \cap I)$$

- (vii) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen sind wieder homogen.

*Beweis.* (v) "(a) $\Rightarrow$ (b)" " $\supseteq$ " Klar.

" $\subseteq$ " Seien  $a_i, i \in J$  homogene Erzeuger von  $I$ . Es genügt zu zeigen:

$$r \cdot a_i \in \bigoplus_{d=0}^{\infty} I \cap R_d \quad \text{für alle } r \in R$$

Schreibe

$$r = \sum_{d=1}^n r_d, \quad r_d \in R_d$$

Dann gilt mit  $d_i := \deg(a_i)$

$$r \cdot a_i = \sum_{d=1}^n r_d a_i, \quad r_d a_i \in R_{d+d_i} \cap I$$

also gerade die Behauptung.

"(b) $\Rightarrow$ (c)" Klar.

"(c) $\Rightarrow$ (a)" Klar.

- (vi) Für jedes Ideal  $I \trianglelefteq R$  ist

$$\pi : \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d / (R_d \cap I) \longrightarrow R/I$$

surjektiv, denn für  $d \in \mathbb{N}_0$  ist  $R_d \longrightarrow R$  surjektiv. Für den Kern betrachte

$$\sum_{d=0}^n r_d \bmod (R_d \cap I) \in \ker(\pi) \iff \sum_{d=0}^n r_d \in I \iff r_d \in I \iff \sum_{d=0}^n r_d \equiv 0 \bmod (R_d \cap I)$$

Damit folgt die Behauptung.

- (vii) Seien  $I_1, I_2$  homogene Ideale, also mit homogenen Erzeugern  $\{f_i\}, \{g_j\}$ .

Dann wird  $I_1 + I_2$  von  $\{f_i + g_j\}$  erzeugt und  $I_1 I_2$  von  $\{f_i g_j\}$ .

*Durchschnitt.* Für  $I_1 \cap I_2$  verwende (v)(b):

$$\bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap I_2) \cap R_d) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap R_d) \cap (I_2 \cap R_d)) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I_1 \cap R_d) \cap \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_2 \cap R_d = I_1 \cap I_2$$

*Radikal.* Sei nun  $I$  homogen,  $x \in \sqrt{I}$ . Schreibe

$$x = \sum_{d=0}^n x_d, \quad x_d \in R_d$$

Nach Voraussetzung existiert  $m \geq 1$ , sodass  $x^m \in I$ , also

$$I \ni \left( \sum_{d=0}^n x_d \right)^m = x_n^m + \mathcal{O}(x_n^{m-1})$$

Damit gilt  $x_n^m \in I$  und somit  $x_n \in \sqrt{I}$  und  $(x - x_n) \in \sqrt{I}$ .

Per Induktion über  $\deg(x)$  folgt nun die Behauptung.  $\square$

**Proposition 9.3** (i) Für jede Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ist  $I(V)$  ein Radikalideal.

(ii) Die projektiven Varietäten bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

(iii) Eine projektive Varietät  $V$  ist irreduzibel genau dann, wenn  $I(V)$  ein Primideal ist.

(iv) Jede projektive Varietät ist endliche Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten.

*Beweis.* (i) Zu zeigen ist:  $\sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$ .

Nach 9.2 (vii) ist  $\sqrt{I(V)}$  ein homogenes Ideal. Sei also  $f \in \sqrt{I(V)}$  homogen und  $m \in \mathbb{N}$ , sodass

$$f^m \in I(V) \implies f(x)^m = 0 \text{ für alle } x \in V$$

Damit gilt  $f \in I(V)$ , also die Behauptung.

(ii) Folgt wie im affinen Fall aus 9.2 (vii).

(iii) Wörtlich wie in 3.5 mit gelöster Übungsaufgabe.

(iv) Wie in 3.6  $\square$

**Folgerung 9.4** Bezüglich der Einschränkung der Zariskitopologie von  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  auf  $U_i$  ist die Bijektion  $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  ein Homoöomorphismus.

*Beweis.* Folgt aus Bemerkung 8.4 und 8.5.

**Bemerkung 9.5** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $I = I(V) \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ihr Verschwindungsideal und  $I^* \triangleleft \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  das von den Homogenisierungen  $H_0(f)$  aller  $f \in I$  erzeugte Ideal.

Dann ist  $V(I^*) = \bar{V}$  der Zariski-Abschluss von  $V$  in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

*Beweis.* Aus dem Beweis von Bemerkung 8.5 folgt  $V(I^*) \cap U_0 = V$ .

Sei  $\tilde{V} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  abgeschlossen mit  $V \subseteq \tilde{V}$ . Zeige  $V(I^*) \subseteq \tilde{V}$ . Sei dazu  $\tilde{V} = V(J)$  für ein homogenes Ideal  $J$ . Dann genügt es zu zeigen:  $J \subseteq I^*$ .

Sei dazu  $f \in J$  homogen. Für  $y \in \tilde{V}$  ist dann  $D_0(f)(y) = 0$ , also  $D_0(f) \in I$ . Per Definition ist dann  $H_0(D_0(f)) \in I^*$ . Es gilt aber  $H_0(D_0(f)) = f \cdot X_0^{-e}$  für ein  $e \geq 0$ , es folgt also die Behauptung.  $\square$

- Definition + Bemerkung 9.6** (i) Eine Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  heißt *quasiprojektive Varietät*, wenn  $W$  offene Teilmenge einer projektiven Varietät  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ist.
- (ii)  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ist quasiprojektiv genau dann, wenn es eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  und eine abgeschlossene Menge  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  gibt, sodass gilt  $W = U \cap V$ .
- (iii) Die Zariski-Topologie auf einer quasiprojektiven Varietät hat eine Basis aus (abstrakt) affine Varietäten.
- (iv) Jede quasi-projektive Varietät ist kompakt.

*Beweis.* (iii) Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  und  $U \subseteq W$  offen. Dann ist  $U \cap U_i$  offen für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$  und der Zariskiabschluss  $\overline{U \cap U_i}$  von  $U \cap U_i$  in  $U_i$  eine affine Varietät.

Nach Proposition 2.5 bilden die  $D(f)$  für  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  eine Basis der Zariski-Topologie auf  $\overline{U \cap U_i}$ , d.h. es existiert  $f$  mit  $D(f) \subseteq U \cap U_i$ . Nach 6.11 Ist  $D(f)$  isomorph zu einer affine Varietät, es folgt die Behauptung.

(iv) Nach Proposition 6.5(iii) ist  $W \cap U_i$  kompakt für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Also ist

$$W = \bigcup_{i=0}^n W \cap U_i$$

ebenfalls kompakt.

**Definition + Bemerkung 9.7** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät,  $V \neq \emptyset$ .

(i) Der *affine Kegel* von  $V$  ist definiert als

$$\tilde{V} := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid (x_0 : \dots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$$

(ii)  $\tilde{V}$  ist affine Varietät. Genauer gilt: Ist  $V = V(I)$  für ein homogenes Ideal  $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $\tilde{V} = V_{\text{aff}}(I)$  die Nullstellenmenge vom  $I$  in  $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$ .

(iii) Falls  $\mathbb{K}$  unendlich ist, gilt  $I(V) = I(\tilde{V})$ .

*Beweis.* (ii) Nach Definition ist  $(x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  genau dann, wenn  $(x_0 : \dots : x_n) \in V$ .

Es bleibt also noch zu zeigen:  $(0, \dots, 0) \in V_{\text{aff}}(I)$ .

Ist  $f \in I$  homogen, so ist  $\deg(f) > 0$ , also  $f(0, \dots, 0) = 0$ .

(iii) Für jedes homogene  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  gilt:

$$f \in I(V) \iff f \in I(\tilde{V})$$

Zu zeigen ist also:  $I(\tilde{V})$  ist homogen. Sei dazu

$$f = \sum_{i=0}^d f_i \in I(\tilde{V}), \quad f_i \text{ homogen von Grad } i$$

Zu zeigen ist:  $f_i \in I(\tilde{V})$  für alle  $0 \leq i \leq d$ .

Für jedes  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist  $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in \tilde{V}$ , also

$$0 = f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(x_0, \dots, x_n)$$

Sind  $\lambda_0, \dots, \lambda_d$  verschiedene Elemente in  $\mathbb{K}$ , so hat das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \dots & \lambda_d^d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0(x_0, \dots, x_n) \\ f_1(x_0, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_d(x_0, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die triviale Lösung (Vandermonde-Matrix)

$$f_0(x_0, \dots, x_n) = \dots = f_d(x_0, \dots, x_n) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 9.8 (Projektiver Nullstellensatz)** Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $n \geq 0$ . Dann gilt für jedes homogene Radikalideal  $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ,  $I \neq \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ :

$$I(V(I)) = \sqrt{I} = I$$

Das Ideal  $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$  heißt auch irrelevantes Ideal.

*Beweis.* Offenbar stimmt die Aussage für  $I = \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ . Sei nun also  $I$  ein echtes Ideal, also

$$I \subset \langle X_0, \dots, X_n \rangle$$

Seien  $V_{\text{aff}}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$  die affine und  $V = V_{\text{proj}}(I) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  die projektive Nullstellenmenge von  $I$ . Dann ist  $\tilde{V} := V_{\text{aff}}(I)$  der affine Kegel von  $V$ .

Da  $I \neq \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ , ist nach HNS  $V_{\text{aff}}(I) \neq \{0\}$ , also  $V \neq \emptyset$ . Nach 9.7(iii) gilt dann

$$I(V(I)) = I(V) = I(\tilde{V}) = I(V_{\text{aff}}(I)) \stackrel{\text{HNS}}{=} I,$$

was zu zeigen war.  $\square$

**Beispiel 9.9** Es sei  $E_0 := V(Y^2 - X^3 + X)$  und  $E := \overline{E_0}$  der projektive Abschluss von  $E_0$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ , also

$$E = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$$

Dann gilt

$$E \setminus E_0 = E \cap V(Z) = \{(0 : 1 : 0)\}$$

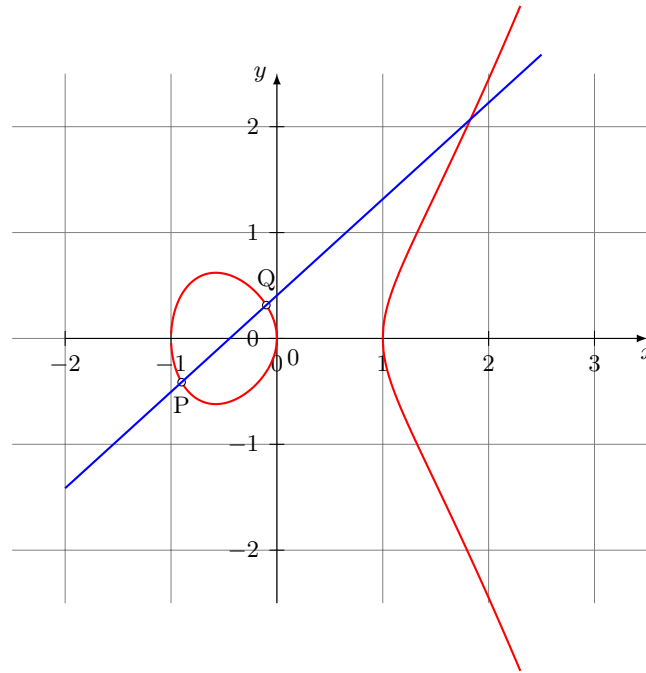
Es sei nun  $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  eine Gerade also  $L = V(aX + bY + cZ)$ , wobei  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

Dann kann man zeigen: Unter der Bedingung, dass  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen ist, Tangenten doppelt und Wendetangenten dreifach zählen, gilt

$$\#(L \cap E) = 3$$

Genauer folgt dies aus dem Satz von Bézout. Im folgenden möchten wir eine Gruppenstruktur auf  $E$  definieren. Sei hierzu

$\tilde{\mu} : E \times E \longrightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto \text{dritter Schnitterpunkt der Gerade durch P und Q}$



Zunächst einmal ist diese innere Verknüpfung wohldefiniert und kommutativ. Allerdings finden wir kein neutrales Element:

Denn gäbe es  $P_0 \in E$  mit  $\tilde{\mu}(P, P_0) = P$  für alle  $P \in E$ , so müssten alle Tangenten an  $E$  durch  $P_0$  gehen. Das ist offenbar falsch, weshalb  $\tilde{\mu}$  nicht der richtige Weg ist.

Wir nehmen nun folgende Modifikation vor: Für ein festes  $P_0 \in E$  definieren wir eine Abbildung

$$\otimes_{P_0} : E \times E \longrightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto P \otimes_{P_0} Q := \tilde{\mu}(P_0, \tilde{\mu}(P, Q))$$

Dann gilt:

- (i) Die Verknüpfung ist wohldefiniert
- (ii)  $P_0$  ist das neutrale Element der Verknüpfung, d.h. es gilt

$$P \oplus_{P_0} P_0 = P \quad \text{für alle } P \in E$$

- (iii) Die Verknüpfung  $\oplus_{P_0}$  ist assoziativ
- (iv) und kommutativ

Damit haben wir eine Gruppenstruktur auf unserer Varietät definiert. Nun stellt sich die Frage nach Elementen endlicher Ordnung? Gibt es sie? Ja!

- (i) Die drei Punkte mit senkrechter Tangente haben Ordnung 2, bilden mit  $P_0$  also eine Klein'sche Vierergruppe.
- (ii) Die 8 Punkte mit Wendetangente (nur 2 sichtbar!) haben Ordnung 3.

## § 10 Reguläre Funktionen

**Definition 10.1** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät und  $I(V)$  das zugehörige Verschwindungsideal von  $V$ . Dann heißt

$$\mathbb{K}[V] := \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] / I(V)$$

homogener Koordinatenring von  $V$ . Nach 9.2 (vi) ist  $\mathbb{K}[V]$  ein graduerter Ring.

**Bemerkung 10.2** Sind  $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  homogen von gleichem Grad, so ist  $\frac{F}{G}$  eine wohlbestimmte Funktion aus  $D(G)$ .

**Definition 10.3** Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät,  $f : W \rightarrow \mathbb{K}$  eine Abbildung.

- (i)  $f$  heißt *regulär in*  $x \in W$ , wenn es eine Umgebung  $U_x \ni x, U_x \subseteq W$  und homogene Polynome  $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  vom selben Grad gibt, sodass  $U_x \subseteq D(G)$  und

$$f(y) = \frac{F}{G}(y) \quad \text{für alle } y \in U_x$$

- (ii)  $f$  heißt *reguläre Funktion auf*  $W$ , wenn  $f$  in jedem  $x \in W$  regulär ist.

**Bemerkung 10.4** Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät,  $f : W \rightarrow \mathbb{K}$  Abbildung: Dann gilt

$$f \text{ ist regulär} \iff f|_{U_i \cap W} = f \circ \psi_i \text{ ist regulär im Sinne von 6.2 für alle } i \in \{0, \dots, n\}$$

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " Sei  $x \in W \cap U_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, n\}$  sowie  $f = \frac{F}{G}$  in einer Umgebung  $U_x$  von  $x$  und homogenen Polynomen gleichen Grades  $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ . Ohne Einschränkung sei  $U_x \subseteq U_i$ , ansonsten verkleinere  $U_x$ . Auf  $U_x$  gilt dann

$$(f \circ \psi_i)(x_1, \dots, x_n) = \frac{F}{G}(x_1 : \dots, x_i : 1 : x_{i+1} : \dots, x_n) = \frac{D_i(F)}{D_i(G)},$$

also ist  $f \circ \psi_i$  regulär im Sinne von 6.2.

" $\Leftarrow$ " Sei  $x \in W \cap U_i$  sowie  $f = \frac{g}{h}$  in einer Umgebung  $x \ni U_x \subseteq U_i$ ,  $f, g \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]$ . Sei  $G := H_i(g), H := H_i(h)$ . Ohne Einschränkung sei  $\deg G \leq \deg H$ . Dann ist

$$\frac{\tilde{G}}{H}, \quad \tilde{G} := G \cdot X_i^{\deg H - \deg G}$$

reguläre Funktion im Sinne von Definition 10.3 auf  $U_x$  mit  $f = \frac{\tilde{G}}{H}$  auf  $U_x$ . □

**Definition + Bemerkung 10.5** Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät.

- (i) Für  $U \subseteq W$  offen sei

$$\mathcal{O}_W(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist regulär}\}$$

- (ii)  $\mathcal{O}_W(U)$  ist  $\mathbb{K}$ -Algebra.

- (iii) Die Zuordnung  $U \mapsto \mathcal{O}_W(U)$  ist eine Garbe von  $\mathbb{K}$ -Algebren auf  $W$ .

**Beispiel 10.6** Es gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})}(U_i) = \mathcal{O}_{U_i}(U_i) = \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]_{X_i}$$

via der Zuordnung

$$f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \longleftarrow f$$

Ist zum Beispiel  $i = 0, n = 3$ , so haben wir

$$Y_1 Y_3^2 - 2Y_2^2 \longmapsto \frac{X_1}{X_0} \left(\frac{X_3}{X_0}\right)^2 - 2\left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2 = \frac{X_1 X_3^2 - 2X_2^2 X_0}{X_0^3}$$

Bemerkte:

$$f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) = \frac{H_i(f)}{X_i^d}$$

mit  $d = \deg(f)$ . Damit erhalten wir

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})}(U_i) = \left\{ \frac{H}{X_i^d} \mid H \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen von Grad } d \right\}$$

**Satz 10.7** (*Homogene Lokalisierung*) Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  projektive Varietät.

(i) Für  $F \in \mathbb{K}[V]$  homogen von Grad  $\deg F \geq 1$  gilt

$$\mathcal{O}_V(D(F)) = (\mathbb{K}[V]_F)_0 := \left\{ \frac{H}{F^d} \mid H \in \mathbb{K}[V] \text{ homogen von Grad } \deg H = d \cdot \deg F \right\}$$

(ii) Falls  $V$  zusammenhängend ist, gilt

$$\mathcal{O}_V(V) = \mathbb{K}$$

*Beweis.* (i) Definiere

$$\psi : \mathbb{K}[V]_F \longrightarrow \mathcal{O}_V(D(F)), \quad \frac{G}{F^d} \mapsto \left( x \mapsto \frac{G}{F^d}(x) \right)$$

Dann ist  $\psi$  wohldefinierter Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren.

*injektiv.* Ist

$$\frac{G}{F^d}(x) = 0$$

für alle  $x \in D(F)$ , so gilt  $D(F) \subseteq V(G)$ , also  $F \cdot G = 0$  auf  $V$ . Dann ist aber

$$\frac{G}{F^d} = 0 \quad \text{in } \mathbb{K}[V]_F,$$

also  $\psi$  injektiv.

*surjektiv.* Sei  $h \in \mathcal{O}_V(D(F))$ .

Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  sei  $f_i := D_i(F)$  die  $i$ -te Dehomogenisierung von  $F$ . Dann ist

$$D(F) \cap U_i = D(f_i)$$

Nach Satz 6.5 gibt es dann  $G_i \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$  und  $d_i \geq 0$ , sodass  $h(D(F))$  regulär ist, also

$$h(D(F) \cap U_i) = \frac{g_i}{f_i^{d_i}}$$

Mit  $G_i := H_i(g_i)$  ist dann

$$h|_{D(F) \cap U_i} = \frac{G_i}{F^{d_i} X_i^{e_i}}, \quad e_i \in \mathbb{Z}$$

Auf  $D(F) \cap U_i \cap U_j$  ist weiter

$$\frac{G_i}{F^{d_i} X_i^{e_i}} = \frac{G_j}{F^{d_j} X_j^{e_j}}$$

also

$$G_j F^{d_j} X_j^{e_j} - G_i F^{d_i} X_i^{e_i} = 0$$

und schließlich

$$G_j F^{d_j+1} X_j^{e_j} X_i X_j - G_i F^{d_i+1} X_i^{e_i} X_i X_j = 0 \quad \text{auf } V \quad (*)$$

Sei nun ohne Einschränkung  $d_i = 1$  für  $i \in \{0, \dots, n\}$ , da  $V(F^{d_i}) = V(F)$  für alle  $d_i \geq 1$ .

Da  $\deg(F) \geq 1$  ist  $F \in \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ , also

$$F^m \in \langle X_0^{e_0+1}, \dots, X_n^{e_n+1} \rangle$$

für hinreichend großes  $m$  und wegen

$$F^{m+1} = F \cdot F^m \in \langle F X_0^{e_0+1}, \dots, F X_n^{e_n+1} \rangle$$

damit

$$F^{m+1} = \sum_{i=0}^n H_i F X_i^{e_i+1}, \quad H_i \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen}$$

Beobachtung: Sei  $I := \langle a_1, \dots, a_m \rangle$  mit homogenen  $a_i$ . Ist  $b$  homogen, so können wir  $b$  schreiben als

$$b = \sum_{i=1}^n r_i a_i \quad \text{mit geeigneten homogenen } r_i \in R$$

(Man kann dies leicht durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich einsehen).

Schreibe nun also

$$G = \sum_{i=0}^n H_i G_i$$

Dann ist

$$X_j F^{m+1} G_j = X_j \sum_{i=0}^n H_i F X_i^{e_i+1} G_j = \sum_{i=0}^n H_i G_i F X_j^{e_j+1} X_i = G F X_j^{e_j+1}$$

also

$$h(D(F) \cap U_j) = \frac{G_j}{F X_j^{e_j}} = \frac{G}{F^{m+1}}$$



Daraus folgt

$$\psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right) = h,$$

also die Behauptung.

- (ii) Sei  $V$  ohne Einschränkung irreduzibel. Denn dann ist  $h \in \mathcal{O}_V(V)$  aus jeder irreduziblen Komponente konstant, und da  $V$  zusammenhängend ist, stimmen diese Konstanten überein.

Damit ist  $I(V)$  prim, der homogene Koordinatenring  $\mathbb{K}[V]$  also nullteilerfrei.

Sei  $\mathbb{L} := \text{Quot}(\mathbb{K}[V])$ ,  $f \in \mathcal{O}_V(V)$  und ohne Einschränkung  $U_i \cap V \neq \emptyset$  für  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Sei weiter  $f_i := f|_{V \cap U_i}$ . Nach (i) ist

$$f_i = \frac{G}{X_i^{d_i}} \quad \text{für ein homogenes } G_i \in \mathbb{K}[V], \deg(G_i) = d_i$$

**Beh. (1)**  $f_i$  ist ganz über  $\mathbb{K}[V]$ .

Dann gibt es  $m \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}[V]$  mit

$$f_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j f_i^j = 0 \quad (I)$$

und durch Multiplikation mit  $X_i^{d_i m}$

$$G_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j G_i^j X_i^{d_i(m-j)} \quad (II)$$

Ohne Einschränkung gelte  $a_j \in \mathbb{K}$ , denn (II) muss im Grad  $d_i m$  erfüllt sein.

Dann ist (I) mit  $a_j \in \mathbb{K}$  erfüllt,  $f_i$  also ganz über  $\mathbb{K}$ . Da  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $f_i$  sogar konstant, es folgt also die Behauptung.

**Bew. (1)** Es gilt

$$f|_{U_i \cap V} = \frac{G}{X_i^{d_i}} \in \mathbb{L}$$

Setze

$$d := \sum_{i=0}^n d_i$$

und

$$\mathbb{K}[V]_d := \{H \in \mathbb{K}[V] \mid H \text{ homogen von Grad } d\}$$

**Beh. (2)** Es gilt  $\mathbb{K}[V]_d f_i^j \subseteq \mathbb{K}[V]_d$  für alle  $j \geq 0$ .

**Bew. (1)** Dann ist  $X_i^d f_i^j \in \mathbb{K}[V]$ , also

$$f_i^j \in \frac{1}{X_i^d} \mathbb{K}[V] \implies \mathbb{K}[V][f_i] \subseteq \frac{1}{X_i^d} \mathbb{K}[V]$$

Da  $\mathbb{K}[V]$  noethersch und endlich erzeugt ist, ist auch  $\mathbb{K}[V][f_i]$  endlich erzeugter  $\mathbb{K}[V]$ -Modul. Dann existiert  $m \geq 1$ , sodass  $f_i^m$  in dem von  $1, f_i, \dots, f_i^{m-1}$  erzeugten  $\mathbb{K}[V]$ -Modul liegt. Damit folgt die Behauptung.

**Bew. (2)**  $\mathbb{K}[V]_d$  wird als  $\mathbb{K}$ -Vektorraum von den Restklassen der Monome  $X_0^{j_0}, \dots, X_n^{j_n}$  mit

$$\sum_{i=0}^n j_i = d = \sum_{i=0}^n d_i$$

erzeugt. Für jedes solcher Monome gibt es einen Index  $i$  mit  $j_i \geq d_i$ , also

$$X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} \cdot f_i = X_0^{j_0} \dots X_i^{j_i - d_i} \dots X_n^{j_n} \cdot G_i \in \mathbb{K}[V]_d,$$

was zu zeigen war. □

## § 11 Morphismen

**Proposition + Definiton 11.1** Seien  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), W \subseteq \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$  quasiprojektive Varietäten,  $f : V \rightarrow W$  eine Abbildung. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) Für jedes  $x \in V$  gibt es eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  und homogene Polynome  $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  von gleichem Grad, sodass für alle  $y \in U_x$  gilt:

$$f(y) = (F_0(y), \dots, F_m(y))$$

- (ii) Für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$  und  $j \in \{0, \dots, m\}$  mit  $U_{ij} := U_i \cap f^{-1}(W \cap U_j) \neq \emptyset$  ist

$$f(U_{ij}) = W \cap U_j$$

Morphismus von quasiprojektiven Varietäten.

- (iii)  $f$  ist stetig und für jedes offene  $U \subseteq W$  und jede reguläre Funktion  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  ist

$$g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$$

Ist eine und damit alle jede der Bedingungen erfüllt, so heißt  $f$  *Morphismus*.

*Beweis.* "(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)" Folgt aus 10.4 und 6.9

"(i)  $\Rightarrow$  (iii)" Die Stetigkeit von  $f$  folgt wie im affinen Fall.

Ist  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  regulär, so gilt lokal  $g = \frac{G}{H}$  mit homogenen Polynomen  $G, H$  von gleichem Grad.

Damit ist

$$g \circ f = \frac{G(F_0(y), \dots, F_m(y))}{H(F_0(y), \dots, F_m(y))}$$

regulär auf einer geeigneten offenen Menge.

"(ii)  $\Rightarrow$  (i)" Sei  $j = 0$  und  $x \in V \cap U_i$  und  $f$  in einer offenen Umgebung von  $x$  gegeben durch

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y))$$

mit

$$f_k = \frac{g_k}{h_k}, \quad g_k, h_k \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$$

Durch Homogenisieren erhalten wir

$$f(y) = (1 : f_1(y) : \dots : f_m(y))$$

Multiplizieren mit dem Hauptnenner und bei Bedarf mit einer Potenz von  $X_0$  ergibt die gewünschten Polynome von gleichem Grad.  $\square$

**Beispiel 11.2** Sei

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus \{(0 : 1 : 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \quad (x : y : z) \mapsto (x : z)$$

Dann ist  $f$  Morphismus. Aber:  $f$  lässt sich nicht zum Morphismus  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  fortsetzen. Denn: Betrachte  $f(\lambda : \mu : \lambda) = (1 : 1)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{K}^\times, \mu \in \mathbb{K}$ . Es gilt

$$\{(\lambda : \mu : \lambda) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid \lambda \neq 0\} = V(X - Z) \setminus \{(0 : 1 : 0)\}$$

das heißt,  $f$  ist konstant auf  $V(X - Z) \setminus \{(0 : 1 : 0)\}$ , also auch auf  $\overline{V(X - Z) \setminus \{(0 : 1 : 0)\}} = V(X - Z)$ , falls  $\mathbb{K}$  unendlich ist.

Betrachte nun  $f(\lambda : \mu : -\lambda) = (1 : -1)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{K}^\times, \mu \in \mathbb{K}$ . Analog erhält man hier, dass  $f$  konstant auf  $V(X + Z)$  ist, also

$$f(V(X - Z)) = (1 : 1), \quad f(V(X + Z)) = (1 : -1)$$

Damit kann es eine solche Fortsetzung nicht geben.

**Beispiel 11.3** Sei  $E := V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$ , Siehe Beispiel 9.9, und

$$f : E \setminus \{(0 : 1 : 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \quad (x : y : z) \mapsto (x : z)$$

Dann lässt sich  $f$  zum Morphismus  $E \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  fortsetzen.

Betrachte hierzu die Tangente an  $E$  in  $P_\infty := (0 : 1 : 0)$  Diese ist die Gerade  $Z = 0$ , denn die Tangente ist gerade der lineare Term. Dann gilt  $f|_{V(Z)} = (1 : 0)$ . Setze nun  $P_0 := (0 : 0 : 1)$  und

$$g(x : y : z) = \begin{cases} (x : z) & \text{für } (x : y : z) \in E \setminus \{P_\infty\} \\ (y^2 + xz : x^2) & \text{für } (x : y : z) \in E \setminus \{P_0\} \end{cases}$$

$g$  ist Morphismus. Es bleibt zu zeigen: Für  $(x : y : z) \in E \setminus \{P_0, P_\infty\}$  ist  $(x : z) = (y^2 + xz : x^2)$ . Es gilt aber

$$y^2z + xz^2 = x^3 \iff \frac{y^2 + xz}{x^2} = \frac{x}{z}$$

und damit

$$(x : z) = (x(y^2 + xz) : z(y^2 + xz)) \stackrel{(x:y:z) \in E}{=} (xy^2 + x^2z : x^3) \stackrel{x \neq 0}{=} (y^2 + xz : x^2)$$

Außerdem ist  $y^2 + xz \neq 0$ , da sonst  $0 = y^2z - x^3 + xz^2 = (y^2 + xz)z - x^3 = -x^3$ , also  $x = 0$ , also  $(x : y : z) \in \{P_0, P_\infty\}$ .

**Proposition 11.4** Ist  $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$  Morphismus, so gibt es homogene Polynome  $F_0, \dots, F_m$  von gleichem Grad, sodass gilt

$$f(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

*Beweis.* Übung. Hauptgrund:  $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  ist faktoriell.

**Bemerkung 11.5** Für jede quasiprojektive Varietät  $V$  ist

$$\text{Aut}(V) := \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ ist Isomorphismus}\}$$

eine Gruppe.

**Beispiel 11.6** Es gilt  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) \cong \text{GL}_2(\mathbb{K}) / \mathbb{K}^\times I_2 \cong \text{PGL}_2(\mathbb{K})$  mit Isomorphismus

$$\phi : \text{PGL}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ((X_0 : X_1) \mapsto (aX_0 + bX_1 : cX_0 + dX_1))$$

Analog ist

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^n(\mathbb{K})) \cong \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

**Beispiel 11.7** Sei wieder  $E := V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$  wie in Beispiel 9.9. Wir haben bereits eine Gruppenstruktur auf  $E$  via

$$\oplus := \oplus_{P_0} : E \times E \longrightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto P \oplus_{P_0} Q$$

Mit den Formeln für  $\oplus$ , die man sich analytisch herleiten kann, sieht man:  $\oplus$  ist Morphismus.

Für jedes  $P \in E$  ist also

$$\mu_P : E \longrightarrow E, \quad Q \mapsto P \oplus Q$$

ein Automorphismus. Damit enthält  $\text{Aut}(E)$  eine zu  $E$  isomorphe Untergruppe. Einen weiteren Automorphismus finden wir zum Beispiel via

$$X \mapsto -X, \quad Y \mapsto i \cdot Y, \quad Z \mapsto Z$$

# Kapitel III

## Lokale Eigenschaften von Varietäten

### § 12 Lokale Ringe

**Definition + Bemerkung 12.1** Sei  $\mathbb{K}$  Körper,  $V$  eine quasiprojektive Varietät über  $\mathbb{K}$ ,  $x \in V$ .

(i) Der *lokale Ring von  $V$  in  $x$*  ist definiert als

$$\mathcal{O}_{V,x} := \{(U, f)_{\sim} \mid U \subseteq V \text{ offen}, x \in U, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$$

wobei

$$(U_1, f_1)_{\sim} \sim (U_2, f_2) \iff \text{Es existiert } U \subseteq U_1 \cap U_2 \text{ offen mit } f_1|_U = f_2|_U$$

(ii) Die Elemente von  $\mathcal{O}_{V,x}$  heißen *Keime von regulären Funktionen*. Notation:  $(U, f)_{\sim} =: f_x$ .

(iii)  $\mathcal{O}_{V,x}$  ist  $\mathbb{K}$ -Algebra und die Abbildung

$$\phi_x : \mathcal{O}_{V,x} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (U, f)_{\sim} \mapsto f(x)$$

ist surjektiver Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren.

(iv)  $\mathcal{O}_{V,x}$  ist lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_x = \{(U, f)_{\sim} \mid f(x) = 0\} = \ker \phi_x$$

*Beweis.* (iii) Klar.

(iv) Nach dem Homomorphiesatz und (iii) gilt

$$\mathcal{O}_{V,x} / \mathfrak{m}_x \cong \mathbb{K}$$

also ist  $\mathfrak{m}_x$  maximales Ideal. Zeige nun, dass  $\mathfrak{m}_x$  das einzige ist. Sei hierfür  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  für ein  $U \subseteq V$  mit  $x \in U$  und es gelte  $f(x) \neq 0$ . Zeige:  $f_x$  ist Einheit in  $\mathcal{O}_{V,x}$ .

Es gilt  $x \in D(f) \subseteq V$  offen, d.h.  $(U, f)_{\sim} \sim (D(f), f)$ . Damit haben wir

$$\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_V(D(f))$$

also schließlich

$$\left(D(f), \frac{1}{f}\right) \cdot (D(f), f) = 1_x,$$

was behauptet wurde. □

**Bemerkung 12.2** Für jedes offene  $U \subseteq V$  mit  $x \in U$  ist

$$\psi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}, \quad f \mapsto f_x = (U, f)_{\sim}$$

ein Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren.

Dabei sind die  $\psi_x^U$  verträglich mit Restriktionsabbildungen und es gilt

$$\mathcal{O}_{V,x} = \varinjlim_{U \subseteq V, x \in U} \mathcal{O}_V(U)$$

**Proposition 12.3** Sei  $V$  quasiprojektive Varietät über  $\mathbb{K}$ ,  $V_0 \subseteq V$  affin, offen und  $x \in V_0$ . Dann ist

$$\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}},$$

wobei

$$\mathfrak{m}_x^{V_0} = \{f \in \mathbb{K}[V_0] \mid f(x) = 0\}$$

das zu  $x$  zugehörige maximale Ideal des affinen Koordinatenrings  $\mathbb{K}[V_0]$  ist.

*Beweis.* Sei

$$\alpha : \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}, \quad \frac{f}{g} \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)_x$$

wobei  $f, g \in \mathbb{K}[V_0]$  und  $g \notin \mathfrak{m}_x^{V_0}$ , d.h.  $g(x) \neq 0$ . Dann ist  $\alpha$  wohldefinierter Homomorphismus. Zeige, dass dieser die gewünschte Isomorphie der  $\mathbb{K}$ -Algebren liefert.

*injektiv.* Sei

$$\frac{f}{g} \in \ker \alpha, \quad \text{also } \alpha\left(\frac{f}{g}\right) = 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x$ ,  $U \subseteq D(g)$  mit  $f(y) = 0$  für alle  $y \in U$ .

Sei  $W = V_0 \setminus U$ . Dann ist  $W$  abgeschlossen in  $V_0$  und es gilt  $x \notin W$ .

Damit existiert  $h \in I(W)$  mit  $h(x) \neq 0$ , also  $h \notin \mathfrak{m}_x^{V_0}$  und  $(h \circ f)(y) = 0$  für alle  $y \in V_0$ . Dann ist  $h \circ f = 0$  in  $\mathbb{K}[V_0]$ , also

$$\frac{f}{g} = 0 \text{ in } \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$$

*surjektiv.* Sei nun  $(U, f)_{\sim} \in \mathcal{O}_{V,x}$ , ohne Einschränkung sei  $U \subseteq V_0$  und  $U = D(h)$  für ein  $h \in \mathbb{K}[V_0]$  mit  $h(x) \neq 0$ . Dann gilt

$$f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V_0}(U) = \mathcal{O}_{V_0}(D(h)) = \mathbb{K}[V_0]_h$$

d.h. es ist

$$f = \frac{g}{h^k}, \quad k \geq 0, g \in \mathbb{K}[V_0] \implies \frac{g}{h^k} \in \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$$

Damit gilt

$$(U, f)_{\sim} = \left( \frac{g}{h^k} \right)_x = \alpha \left( \frac{g}{h^k} \right),$$

wie behauptet. □

**Bemerkung 12.4** Sei  $\phi : V \rightarrow W$  Morphismus quasiprojektiver Varietäten. Für jedes  $x \in V$  induziert  $\phi$  einen Homomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Algebren

$$\phi_x^{\#} : \mathcal{O}_{W, \phi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{V, x}$$

Weiter gilt

$$\phi_x^{\#}(\mathfrak{m}_{\phi(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung seien  $V, W$  affin, denn  $x$  und  $\phi(x)$  sind in affine Teilmengen enthalten.  $\phi$  induziert also

$$\phi^{\#} : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V] \hookrightarrow \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V}, \quad f \mapsto f \circ \phi = \phi^{\#}(f)$$

Dabei ist

$$f \in \mathfrak{m}_{\phi(x)}^W \iff f(\phi(x)) = 0 \iff (f \circ \phi)(x) = 0 \iff f \circ \phi = \phi^{\#}(f) \in \mathfrak{m}_x^V$$

und es gilt also

$$\phi^{\#}(\mathbb{K}[W] \setminus \mathfrak{m}_{\phi(x)}^W) \subseteq (\mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V})^{\times}.$$

Mit der universellen Eigenschaft der Lokalisierung lässt sich  $\phi^{\#}$  also fortsetzen zu

$$\phi_x^{\#} : \mathcal{O}_{W, \phi(x)} = \mathbb{K}[W]_{\mathfrak{m}_{\phi(x)}^W} \rightarrow \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V} = \mathcal{O}_{V, x}$$

Weiter gilt

$$\phi_x^{\#}(\mathfrak{m}_{\phi(x)}) = \phi_x^{\#}(\mathfrak{m}_{\phi(x)}^W \cdot \mathbb{K}[W]_{\mathfrak{m}_{\phi(x)}^W}) \subseteq \mathfrak{m}_x^V \cdot \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V} = \mathfrak{m}_x,$$

was zu zeigen war. □

**Proposition 12.5** Seien  $V, W$  quasiprojektive Varietäten  $x \in V, y \in W$ . Gilt

$$\mathcal{O}_{V, x} \cong \mathcal{O}_{W, y}$$

als  $\mathbb{K}$ -Algebren, so gibt es offene Umgebungen  $U \subseteq V$  von  $x$  und  $U' \subseteq W$  von  $y$  und einen Isomorphismus

$$f : U \rightarrow U', \quad x \mapsto y$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung seien  $V, W$  affin. Sei

$$\phi : \mathcal{O}_{V, x} = \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V} \rightarrow \mathbb{K}[W]_{\mathfrak{m}_y^W} = \mathcal{O}_{W, y}$$

ein Isomorphismus. Seien  $f_1, \dots, f_r$  die Erzeuger von  $\mathbb{K}[V]$  als  $\mathbb{K}$ -Algebra. Für die Keime  $(f_i)_x$  gilt also

$$\phi((f_i)_x) = \left( \frac{g_i}{h_i} \right)_y, \quad g_i, h_i \in \mathbb{K}[W], h_i(y) \neq 0$$

Sei  $U_2 \subseteq W$  offen, affin mit  $y \in U_2$  und es gelte

$$\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}_W(U_2) \iff \frac{g_i}{h_i} \text{ regulär für alle } i \in \{1, \dots, r\}$$

**Beh. (1)** Falls  $x$  auf jeder irreduziblen Komponente von  $V$  liegt, ist  $\psi_x^V$  injektiv.

Dann folgt daraus:

$$\phi \circ \psi_x^V : \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[W]$$

ist injektiv. Damit induziert  $\phi \circ \psi_x^V$  einen dominanten Morphismus  $g : W \longrightarrow V$ . Selbiges Vorgehen mit  $\phi^{-1}$  liefert einen dominanten Morphismus  $f : V \longrightarrow W$  mit  $g \circ f = \text{id}_V$  und  $f \circ g = \text{id}_W$

**Bew. (1)** Es gilt:

$$\psi_x^V : \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[V]_{\mathfrak{m}_x^V}$$

ist injektiv genau dann, wenn  $\mathbb{K}[V] \setminus \mathfrak{m}_x^V$  keine Nullteiler enthält. Sei also  $h \in \mathbb{K}[V] \setminus \mathfrak{m}_x^V$  Nullteiler in  $\mathbb{K}[V]$ , d.h. es gibt  $g \in \mathbb{K}[V] \setminus \{0\}$  mit  $h \cdot g = 0$ , also  $h(x) \neq 0$ .

Sei  $Z$  eine irreduzible Komponente mit  $g|_Z \neq 0$ , d.h.  $V(g) \cap Z \neq Z$ . Da  $x \in Z$ , gilt auch  $V(h) \cap Z \neq Z$ . Damit ist  $(V(h) \cap V(g)) \cap Z \neq Z$ , da  $Z$  irreduzibel ist und  $V(h), V(g)$  echt abgeschlossen sind. Damit folgt  $g \cdot h \neq 0$ , ein Widerspruch zur Annahme.  $\square$

## § 13 Dimension

**Definition 13.1** Für einen topologischen Raum  $X$  heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existiert eine Kette } V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n, V_i \text{ abgeschlossen und irreduzibel}\}$$

die *Krull-Dimension* von  $X$ .

**Beispiel 13.2** (i) Für einen Hausdorffraum  $H$  gilt  $\dim(H) = 0$ .

(ii) Es gilt  $\dim(\mathbb{A}^1(\mathbb{K})) = 1$ , falls  $\mathbb{K}$  unendlich ist.

**Erinnerung 13.3** Sei  $R$  ein Ring,  $\mathfrak{p} \triangleleft R$  ein Primideal.

(i) Die *Höhe* von  $\mathfrak{p}$  in  $R$  ist

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existiert eine Kette von Primidealen } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

(ii) Die *Krull-Dimension* von  $R$  ist

$$\dim(R) := \sup\{\text{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \triangleleft R \text{ prim}\}$$



**Proposition 13.4** *Ist  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät, so gilt*

$$\dim(V) = \dim(\mathbb{K}[V])$$

*Beweis.* Irreduzible Teilmengen von  $V$  entsprechen gerade bijektiv den Primaidealen in  $\mathbb{K}[V]$ .  $\square$

**Erinnerung + Bemerkung 13.5** Für eine Körpererweiterung  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  ist  $\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{L}$  die Maximalzahl an algebraisch unabhängigen Elementen in  $\mathbb{L}$  über  $\mathbb{K}$ . Beispielsweise ist  $\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(X) = 1$ . Wir halten fest:

- (i) Es gilt  $\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n) = n$ .
- (ii) Es gilt  $\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{L} = 0$ , falls  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  algebraisch ist.
- (iii) *Noether-Normalisierung light:* Sei  $A$  endlich erzeugte  $\mathbb{K}$ -Algebra. Dann ist  $A$  ganze Ringerweiterung eines Polynomrings  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .
- (iv) Ist  $S/R$  ganze Ringerweiterung, so gilt  $\dim R = \dim S$ .
- (v) Es gilt  $\dim \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = n$ .
- (vi) *Noether-Normalisierung deluxe:* Sei  $I \trianglelefteq A$  ein Ideal. Dann gibt es einen Polynomring, sodass  $A/\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ganze Ringerweiterung ist und

$$I \cap \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = \langle X_{\delta+1}, \dots, X_n \rangle$$

für ein  $0 \leq \delta \leq n$ .

**Beispiel 13.6** Es sei  $A := \mathbb{K}[X, Y]$  und  $I$  das vom Polynom  $f := Y^2 - X^3 + X \in A$  erzeugte Ideal. Es wird  $f = Y^2 - X^3 + X$  als Variable in einem neuen Polynomring betrachtet, setze also  $B := \mathbb{K}[X, f] \subseteq A$ . Dann wird  $A$  als Ringerweiterung von  $B$  offenbar durch das Element  $Y$  erzeugt. Weiter ist  $Y$  ganz über  $B$ , denn für das normierte Polynom  $g := Z^2 - X^3 + X - f \in B[Z]$  gilt

$$g(Y) = Y^2 - X^3 + X - f = f - f = 0$$

und damit ist  $A/B$  ganze Ringerweiterung. Weiter gilt  $I \cap B = \langle f \rangle$ .

Beachte:  $f$  ist nun eine Variable, das heißt, wir haben für  $\delta = 1$  ein Beispiel für eine Noether-Normalisierung gefunden.

**Lemma 13.7** *Für eine irreduzible Varietät  $V$  gilt*

$$\dim V = \text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(V)$$

*Beweis.* Nach 13.3 gilt  $\dim V = \dim \mathbb{K}[V]$ . Mit Bemerkung 13.4 (iii) folgt, dass  $\mathbb{K}[V]$  als endlich erzeugte  $\mathbb{K}$ -Algebra eine ganze Ringerweiterung von  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  ist. Mit (iv) gilt

$$\dim \mathbb{K}[V] = \dim \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = n.$$

Damit ist  $\mathbb{K}(V)/\mathbb{K} = \text{Quot}(\mathbb{K}[V])/\mathbb{K}$  algebraische Erweiterung von  $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)$  und es folgt

$$\text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(V) = \text{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n) = n,$$

die Behauptung.  $\square$

**Proposition 13.8** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  quasiprojektive Varietät.

(i) Dann gilt für jede affine Varietät  $V_0 \subseteq V$ , die in  $V$  offen und dicht ist:

$$\dim(V) = \dim(V_0)$$

(ii) Seien  $Z_1, \dots, Z_r$  die irreduziblen Komponenten von  $V$ . Dann ist

$$\dim(V) = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \dim(Z_i)$$

*Beweis.* (i) Es gilt:

" $\geq$ " Diese Aussage gilt allgemein für einen topologischen Raum und einer Teilmenge  $Y \subseteq X$ , denn:

Ist  $\emptyset \subsetneq Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_d$  eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von  $Y$ , so gilt für die Abschlüsse  $X_i := \overline{Y_i}$ :  $X_i$  ist irreduzibel in  $Y$  und  $X_i \cap Y = Y_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$  und damit  $X_{i+1} \neq X_i$ . Da die  $Y_i$  abgeschlossen sind, folgt die Inklusion.

" $\leq$ " Wegen (ii) dürfen wir  $V$  und damit auch  $V_0$  irreduzibel voraussetzen. Sei

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_d$$

eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von  $V$  und  $d = \dim V$ . Dann ist  $Z_0$  offenbar ein Punkt (andernfalls verlängern wir die Kette).

Sei nun  $V_0 \subseteq V$  eine affine, offene, dichte Untervarietät mit  $Z_0 \in V_0$ . Dann ist  $X_i = Z_i \cap V_0$  nichtleer und abgeschlossen in  $V_0$  und damit  $\overline{X_i} = Z_i$ , da sonst

$$Z_i = \overline{X_i} \cup (Z_i \setminus V_0)$$

eine unerlaubte Zerlegung von  $Z_i$  wäre. Damit ist  $X_i$  irreduzibel mit  $X_{i+1} \neq X_i$ , es folgt also die Behauptung.

(ii) Es gilt allgemeiner: Ist  $X$  topologischer Raum mit

$$X = \bigcup_{i=1}^r Z_i, \quad Z_i \subseteq X \text{ abgeschlossen,}$$

so gilt

$$\dim X = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \dim Z_i,$$

denn:

" $\geq$ " Klar.

" $\leq$ " Sei  $\emptyset \subsetneq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_d$  eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von  $X$ . Dann ist

$$X_d = \bigcup_{i=1}^r X_d \cap Z_i$$

und da  $X_d \cap Z_i$  abgeschlossen in  $X_d$  ist und  $X_d$  irreduzibel ist, existiert ein  $i \in \{1, \dots, r\}$  mit  $X_d \subseteq Z_i$ . Damit ist bereits die gesamte Kette in  $Z_i$  enthalten und es folgt  $d \leq \dim Z_i$ .  $\square$

**Proposition 13.9** *Ist  $A$  endlich erzeugbare, nullteilerfreie  $\mathbb{K}$ -Algebra, so haben alle maximalen Primidealketten in  $A$  dieselbe Länge. Dabei heißt eine Kette  $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d$  maximal, falls es kein Primideal  $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$  gibt mit  $\mathfrak{p}_{i-1} \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$*

**Definiton + Proposition 13.10** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  quasiprojektive Varietät,  $x \in V$ .

- (i)  $\dim_x V := \dim \mathcal{O}_{V,x}$  heißt *lokale Dimension* von  $V$  in  $x$ .
- (ii) Es gilt

$$\dim_x V = \text{ht}(\mathfrak{m}_x) = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^{V_0})$$

für jede offene, affine Umgebung  $V_0 \subseteq V$  von  $x$ .

- (iii) Es gilt  $\dim_x V = \dim V$ , falls  $V$  irreduzibel ist.
- (iv) Allgemeiner gilt

$$\dim_x V = \max\{\dim Z \mid Z \subseteq V \text{ ist irreduzible Komponente von } V \text{ mit } x \in Z\}$$

*Beweis.* (ii) Es gilt  $\mathcal{O}_{V,x} = \mathbb{K}[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$  und damit  $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^{V_0})$ .

- (iii) Ohne Einschränkung sei  $V$  affin (vgl. 13.4). Dann gilt nach (ii)

$$\dim_x V = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^V)$$

Wegen 13.7 haben alle maximalen Ideale in  $\mathbb{K}[V]$  dieselbe Höhe. Damit folgt bereits

$$\dim V = \dim \mathbb{K}[V] = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^V) = \dim_x V.$$

- (iv) Ohne Einschränkung sei  $V$  wieder affin. Es gilt

$$\dim_x V = \dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(\mathfrak{m}_x^V) = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt eine Primidealkette } \langle 0 \rangle \neq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_k = \mathfrak{m}_x^V\}$$

Damit entspricht  $\mathfrak{p}_0$  einer irreduziblen Komponente  $Z$  mit  $x \in Z$ . Mit Proposition 13.7 hat diese Kette die Länge  $\dim Z$  und damit folgt die Behauptung. □

**Korollar 13.11** *Ist  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede irreduzible Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ :*

$$\dim V + \text{ht}(I(V)) = n.$$

*Beweis.* Sei  $0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d$  eine maximale Primidealkette in  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , die  $I(V)$  enthält. Dann gilt  $I(V) = \mathfrak{p}_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Es folgt  $i = \text{ht}(I(V))$  und wegen 13.9 auch  $d = n$ . Außerdem ist

$$0 = \mathfrak{p}_i / I(V) \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n / I(V)$$

eine maximale Primidealkette für  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / I(V) = \mathbb{K}[V]$ , und erneut mit 13.9 folgt

$$n - i = \dim \mathbb{K}[V] = \dim V,$$

was zu zeigen war. □

**Korollar 13.12** Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  eine Hyperfläche, d.h.  $V = V(f)$  für ein  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  mit  $\deg f \geq 1$ . Dann ist

$$\dim V = n - 1.$$

*Beweis.* Aus 13.9 folgt

$$\dim V = n - \text{ht}(\langle f \rangle).$$

Zeige also:  $\text{ht}(\langle f \rangle) = 1$ .

" $\geq$ " Klar.

" $\leq$ " Sei  $\mathfrak{p} \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ein Primideal mit  $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq \langle f \rangle$ . Sei  $h \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$  mit minimalem Grad. Da  $\mathfrak{p} \subseteq \langle f \rangle$ , gilt  $h = f \cdot g$  für ein  $g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Wir erhalten

$$\deg h = \deg f + \deg g > \deg g$$

und damit ist  $g \notin \mathfrak{p}$ . Da  $\mathfrak{p}$  prim ist, folgt  $f \in \mathfrak{p}$  und damit  $\mathfrak{p} = \langle f \rangle$ . □

**Satz 13.13** ("Going down", Cohen-Seidenberg) Sei  $A$  endlich erzeugte, nullteilerfreie  $\mathbb{K}$ -Algebra,  $A/B$  mit  $B := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  via Noether-Normalisierung eine ganze Ringerweiterung. Sei weiter  $\mathfrak{P}_1 \subset A$  ein Primideal,  $\mathfrak{p}_0 \subset B$  mit  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 := \mathfrak{P}_1 \cap B$ . Dann gibt es ein Primideal  $\mathfrak{P}_0 \subset A$  mit  $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_0 \cap B = \mathfrak{p}_0$ .

*Beweis.* Nach dem "Going up"-Theorem in der Algebra (Prop. 13.7) gibt es ein Primideal  $\mathfrak{P}'_0 \subset A$  mit  $\mathfrak{P}'_0 \cap B = \mathfrak{p}_0$  und ein Primideal  $\mathfrak{P}'_1 \subset A$  mit  $\mathfrak{P}'_0 \subset \mathfrak{P}'_1$  und  $\mathfrak{P}'_1 \cap B = \mathfrak{p}_1$ . Setze

$$\mathbb{M} := \text{Quot}(B), \quad \mathbb{L} := \text{Quot}(A).$$

Dann ist  $\mathbb{L}/\mathbb{M}$  eine endliche, algebraische Körpererweiterung.

**Fall (a)** Es ist  $\mathbb{L}/\mathbb{M}$  Galoiserweiterung. Dann ist

$$\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{M}) = \{\sigma_1 = \text{id}, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \quad n := [\mathbb{L} : \mathbb{M}].$$

Sei nun  $\mathfrak{P}_i := \sigma_i(\mathfrak{P}_1)$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist  $\mathfrak{P}_i$  ein Primideal in  $A$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  (nichttrivial! Warum gilt  $\sigma_i(A) \subseteq A$ ?).

Angenommen,  $\mathfrak{P}'_1 \neq \mathfrak{P}_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist auch  $\mathfrak{P}'_1 \not\subseteq \mathfrak{P}_i$ , da

$$\mathfrak{P}'_1 \cap B = \mathfrak{P}_1 \cap B = \mathfrak{p} = \mathfrak{P}_i \cap B.$$

Dann folgt

$$\mathfrak{P}'_1 \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$$

(diese Aussage gilt nicht nur für Primideale). Also existiert  $a \in \mathfrak{P}'_1$  mit  $a \notin \mathfrak{P}_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und es gilt  $\sigma_j(a) \in \mathfrak{P}_i$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Schließlich ist

$$\mathbb{M} \ni N_{\mathbb{L}/\mathbb{M}} \stackrel{(*)}{=} \prod_{j=1}^n \sigma_j(a) \in \mathfrak{P}_i \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\},$$

andererseits aber

$$N_{\mathbb{L}/\mathbb{M}} \in \mathbb{M} \cap \mathfrak{P}'_1 = B \cap \mathfrak{P}'_1 = \mathfrak{p}_1$$

und  $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{P}_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ein Widerspruch!

Damit war die Annahme falsch und es gibt einen Index  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sodass

$$\mathfrak{P}'_i = \sigma_i(\mathfrak{P}_i).$$

Das Ideal  $\mathfrak{P}_0 = \sigma_i^{-1}(\mathfrak{P}'_0)$  erfüllt damit

$$\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_0 \cap B = \mathfrak{P}'_0 \cap B = \mathfrak{p}_0.$$

**Fall (b)**  $\mathbb{L}/\mathbb{M}$  ist nicht Galois. Ist  $\mathbb{L}/\mathbb{M}$  nicht separabel, so ändert dies nichts an dem Beweis, bis auf die Tatsache, dass der Ausdruck in (\*) nicht der Norm entspricht, sondern nur eine gewissen Wurzel von ihr.

Ist andererseits  $\mathbb{L}/\mathbb{M}$  nicht normal, so betrachten wir die die normale Hülle  $\tilde{\mathbb{M}} \supset \mathbb{M}$ . Hier wird der Beweis ein wenig technischer, im Wesentlichen ändert sich jedoch trotzdem nicht viel.  $\square$

(Beweis von 13.9) Es sei

$$\langle 0 \rangle = \mathfrak{P}_1 \subsetneq \mathfrak{P}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_m$$

eine maximale Kette von Primidealen in  $A$ . Sei weiter  $A/B$  mit  $B := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$  eine via Noether-Normalisierung erhaltene ganze Ringerweiterung. Setze

$$\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap B \quad \text{für } i \in \{1, \dots, m\}.$$

**Beh. (a)** Wir haben eine maximale Kette von Primideale in  $B$ :

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m$$

Da  $\dim A = \dim B$ , genügt es nun zu zeigen:  $m = d$ . Zeige dies über Induktion nach  $d$ :

**d=1** Klar.

**d ≥ 1** Sei  $C/B$  mit  $C := \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_d]$  eine via Noether-Normalisierung erhaltene ganze Ringerweiterung, sodass gilt  $\mathfrak{p}_1 \cap C = \langle Y_{\delta+1}, \dots, Y_d \rangle$  für ein  $dir 0 \leq \delta \leq d$ . Für

$$\mathfrak{q}_i := \mathfrak{p}_i \cap C, \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

ist wegen der Behauptung

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m$$

eine maximale Kette in  $C$ . damit folgt  $\text{ht}(\mathfrak{q}_1) = 1$ , also  $\delta = d - 1$ .

Sei nun  $C' := C/\mathfrak{q}_1 \cong \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_{d-1}]$ . Dann ist

$$\langle 0 \rangle = \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m/\mathfrak{q}_1$$

eine maximale Kette in  $C'$ , d.h. es gilt  $m - 1 = d - 1$ , also  $m = d$ .

Es bleibt nun also, die Behauptung (a) zu zeigen.

**Bew. (a)** Nach Definition ist  $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_{i+1}$ . Es ist also zu zeigen:  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_{i+1}$ . Sei dazu ohne Einschränkung  $i = 0$  - andernfalls ersetze  $A$  durch  $A/\mathfrak{P}_i$  und  $B$  durch  $B/\mathfrak{p}_i$ .

Sei  $b \in \mathfrak{P}_1 \setminus \{0\} = \mathfrak{P}_1 \setminus \mathfrak{P}_0$ . Da  $b$  ganz ist über  $B$ , gibt es eine Gleichung

$$b^n + a_{n-1}N^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 = 0, \quad a_i \in B \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Wir wählen  $n$  minimal, sodass gilt  $a_0 = 0$ . Dann ist

$$a_0 = -b \cdot (b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \dots + a_1) \in B \cap \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p}_1,$$

also  $\mathfrak{p}_1 \neq \langle 0 \rangle$ .

Schließlich muss noch gezeigt werden, dass die Kette tatsächlich maximal ist, d.h. es gibt für kein  $i \in \{1, \dots, m\}$  ein Primideal  $\mathfrak{q}$  mit  $\mathfrak{p}_{i-1} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_i$ . Proposition 13.11 liefert und jedoch genau dies.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

## § 14 Tangentialraum und Singularitäten

**Erinnerung 14.1** Sei  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ .

(i) Es gilt

$$f = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{(\nu_1 + \dots + \nu_n)!} \left( \left( \frac{\partial}{\partial X_1} \right)^{\nu_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial X_n} \right)^{\nu_n} f \right) (a) \prod_{i=1}^n (X_i - a_i)^{\nu_i}$$

(ii) Es ist

$$f = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a)(X_i - a_i) + \text{höhere Terme}$$

**Definition + Bemerkung 14.2** Sei  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ .

(i) Die *Linearisierung von  $f$  in  $a$*  ist

$$f_a^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a)X_i =: D_a(f)$$

(ii) Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $a \in V$ ,  $I = I(V) \triangleleft \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Sei weiter  $I_a$  das von den Linearisierungen  $f_a^{(1)}$  für alle  $f \in I$  erzeugte Ideal in  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Dann heißt

$$T_a = T_{V,a} := V(I_a)$$

*Tangentialraum an  $V$  in  $a$ .*

(iii) Ist  $I(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ , so ist  $I_a = \langle (f_1)_a^{(1)}, \dots, (f_r)_a^{(1)} \rangle$ .

(iv)  $T_{V,a}$  ist ein Untervektorraum des  $\mathbb{K}^n$ . Genauer ist

$$T_{V,a} = \ker \mathcal{J}_{f_1, \dots, f_r}(a), \quad \mathcal{J} := \mathcal{J}_{f_1, \dots, f_r} = \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{i,j}$$

*Beweis.* (iii) Es gilt

$$\begin{aligned} D_a(f+g) &= D_a(f) + D_a(g) \\ D_a(fg) &= (f \cdot g)_a^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i} (fg)(a) X_i = \sum_{i=1}^n \left( f(a) \frac{\partial g}{\partial X_i}(a) + g(a) \frac{\partial f}{\partial X_i}(a) \right) X_i \\ &= f(a) \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i}(a) X_i + g(a) \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a) X_i \\ &= f(a) D_a(g) + g(a) D_a(f) \end{aligned}$$

Ist nun also

$$f = \sum_{k=1}^r g_k f_k \in I(V), \quad g_k \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n],$$

so ist

$$D_a(f) = \sum_{k=1}^r (f_k(a) D_a(g_k) + g_k(a) D_a(f_k)) = \sum_{k=1}^r g_k(a) (f_k)_a^{(1)} \in \langle (f_1)_a^{(1)}, \dots, (f_r)_a^{(1)} \rangle$$

(iv) Folgt aus (iii).

**Beispiel 14.3** (i) Sei  $f = Y^2 - X^3 - X^2 \in \mathbb{K}[X, Y]$ ,  $V = V(f)$ . Ist  $(a, b) \in V$ , so gilt

$$f_{(a,b)}^{(1)} = -a(3a+2)X + 2bY$$

Trivial wird dieses Gleichungssystem für  $(a, b) = 0$  und  $(a, b) = (-\frac{2}{3}, 0)$ . Da aber der zweite Punkt nicht auf  $V$  liegt, erhalten wir als Tangentialraum eine Gerade außerhalb von  $(0, 0)$  und  $T_{V,(0,0)} = \mathbb{K}^2$ .

(ii) Sei  $f = Y^2 - X^3 \in \mathbb{K}[X, Y]$ ,  $V = V(f)$ . Dann ist

$$f_{(a,b)}^{(1)} = -3a^2X + 2bY$$

und mit selbiger Argumentation ist  $T_{V,(0,0)} = \mathbb{K}^2$  und außerhalb von  $(0, 0)$  eine Gerade.

(iii) Sei  $f = X^2 + Y^2 - Z^2 \in \mathbb{K}[X, Y, Z]$ ,  $V = V(f)$ . Es ist

$$f_{(a,b)}^{(1)} = 2aX + abY - 2cZ,$$

also ist  $T_{V,(0,0,0)} = \mathbb{K}^3$  und eine Ebene außerhalb von  $(0, 0)$ .

**Bemerkung 14.4** Seien  $V_0 \subseteq V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietäten,  $V_0$  dicht in  $V$ ,  $a \in V_0$ . Dann ist

$$T_{V_0,a} \cong T_{V,a}.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $V_0 = D(g)$  für ein  $g \in \mathbb{K}[V]$ . Sei  $I(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Dann ist  $V_0 \cong V'_0 := V(f_1, \dots, f_r, gX_{n+1} - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$ . Dabei entspricht der Punkt  $a = (a_1, \dots, a_n) \in V_0$  dem Punkt  $a' = (a_1, \dots, a_n, \frac{1}{g(a)})$ . Weiter ist

$$T_{V'_0,a'} = V \left( (f_1)_{a'}^{(1)}, \dots, (f_r)_{a'}^{(1)}, \frac{1}{g(a)} g_{a'}^{(1)} + g(a) X_{n+1} \right) \subseteq \mathbb{K}^{n+1}.$$

Da der Term  $\frac{1}{g(a)}g_{a'}^{(1)} + g(a)X_{n+1}$  als einziger  $X_{n+1}$  enthält, gilt

$$\begin{aligned} \dim T_{V',a'} &= n+1 - \text{Rang} \left( (f_1)_{a'}^{(1)}, \dots, (f_r)_{a'}^{(1)}, \frac{1}{g(a)}g_{a'}^{(1)} + g(a)X_{n+1} \right) \\ &= n - \text{Rang} \left( (f_1)_{a'}^{(1)}, \dots, (f_r)_{a'}^{(1)} \right) \\ &= \dim T_{V,a}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

**Definition 14.5** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  quasiprojektive Varietät,  $a \in V$ . Dann ist der *Tangentenraum in  $a$*  an  $V$  definiert als

$$T_{V,a} := T_{V_0,a},$$

wobei  $V_0 \subseteq V$  eine offene, affine Umgebung von  $a$  ist.

**Definition 14.6** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  quasiprojektive Varietät.

- (i)  $a \in V$  heißt *nichtsingulärer* oder *regulärer* Punkt, falls  $\dim T_{V,a} = \dim_a V$ . Andernfalls heißt  $a$  *singulär*.
- (ii)  $V$  heißt *nichtsingulär*, wenn jedes  $a \in V$  nichtsingulär ist.

**Proposition 14.7 (Jacobi-Kriterium)** Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät,  $a \in V$ ,  $I = I(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Dann gilt

$$a \text{ ist nichtsingulär} \iff \text{Rang}(\mathcal{J}_{f_1, \dots, f_r}(a)) = n - \dim_a V.$$

*Beweis.* Nach Bemerkung 14.2 ist

$$T_{V,a} = \ker \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_i}(a) \right)_{i,j}$$

Mit

$$\text{Rang}(\mathcal{J}_{f_1, \dots, f_r}(a)) = n - \dim \ker \mathcal{J}(a) = n - \dim T_{V,a}$$

folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 14.8** (i) Sei  $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  Hyperfläche. Dann ist

$$\mathcal{J}_f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial X_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(a) \right)$$

also

$$a \text{ ist singulär} \iff \frac{\partial f}{\partial X_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(a) = f(a) = 0.$$

(ii) Sei  $f = Y^2 - X^3 + X \in \mathbb{K}[X, Y]$ ,  $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ . Dann ist

$$\mathcal{J}_f(x, y) = (-3x^2 + 1, 2y).$$

Dann gilt:

$$a = (x_0, y_0) \text{ ist singulär} \iff y_0 = 0, \quad 3x_0^2 = 1 \iff a = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right).$$



Aber es gilt:  $f(a) \neq 0 \iff a \notin V$ . Damit ist  $V(f)$  nichtsingulär.

Wir betrachten nun den projektiven Abschluss  $\bar{V} = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ . Der einzige neu auftretende Punkt ist  $P_\infty = (0 : 1 : 0)$ . Wir betrachten eine affine Umgebung

$$U := U_Y \cap \bar{V} = V(Z - X^3 + XZ^2).$$

Dann ist für  $G = Z - X^3 + XZ^2$ :

$$\mathcal{J}_g(x, z) = (-3x^2 + z^2, 2xz + 1) \implies \mathcal{J}_g(P_\infty) = (0, 1)$$

womit  $P_\infty$  ein regulärer Punkt ist. Also ist sogar  $\bar{V}$  nichtsingulär.

(iii) Wir variieren nun die Varietät aus Beispiel (ii). Setze hierfür

$$f_{a,b} := Y^2 - X^3 - aX - b.$$

Dann ist

$$\mathcal{J}_{f_{a,b}}(x, y) = (-3x^2 - a, 2y)$$

Sei nun  $(x_0, y_0) \in E_{a,b} = V(f_{a,b})$  singulär. Dann ist  $y_0 = 0$  und  $-a = 3x_0^2$ . Weiter muss der Punkt auf  $E_{a,b}$  liegen, wir erhalten also die Bedingung

$$x_0^3 - 3x_0^3 + b = 0 \iff b = 2x_0^3 \iff b^2 = 4x_0^6 = 4\frac{-a^3}{27} \iff 27b^2 + 4a^3 = 0.$$

Andererseits gilt

$$f_{a,b} = 0 \iff Y^2 = X^3 + aX + b =: g_{a,b}(X)$$

und damit

$$\Delta(a, b) = 0 \iff g_{a,b} \text{ hat eine doppelte Nullstelle.}$$

Wobei mit  $\Delta(a, b)$  die Diskriminante von  $a$  und  $b$  bezeichnet wird. Damit erhalten wir

$$\bar{E}_{a,b} \text{ ist nichtsingulär} \iff \Delta(a, b) \neq 0,$$

was zu zeigen war. □

**Satz 14.9** Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  affine Varietät. Sei  $\mathfrak{m}_x = \{f_x \in \mathcal{O}_{V,x} \mid f_x(x) = 0\}$  das zum Punkt  $x \in V$  zugehörige maximale Ideal. Bezeichne weiterhin  $(\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$  den Dualraum des  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen

$$\alpha : T_{V,x} \longrightarrow (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$$

*Beweis.* Zur Wohldefiniertheit der Behauptung: Es ist  $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$  ein Modul über  $\mathcal{O}_{V,x}$ , das heißt, Multiplikation mit Ringelementen aus  $\mathcal{O}_{V,x}$  ist definiert. Multiplikation mit einem Elemente aus  $\mathfrak{m}_x$  ist die Nullabbildung. Damit ist  $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$  ein  $\mathcal{O}_{V,x} / \mathfrak{m}_x$ -Modul, also ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und der Dualraum dazu ist wohldefiniert. Dieser wird auch als *Zariski-Tangententialraum* bezeichnet.

Nun zur Behauptung. Definiere

$$\alpha : T_{V,x} \longrightarrow (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*, \quad v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \alpha(v)(\bar{f}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) v_i$$

Dann ist  $\alpha$  wohldefiniert, denn für  $g, h \in \mathfrak{m}_x$  gilt

$$\alpha(v)(gh) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(gh)}{\partial X_i}(x) v_i = \sum_{i=1}^n \left( g(x) \frac{\partial h}{\partial X_i}(x) + h(x) \frac{\partial g}{\partial X_i}(x) \right) v_i = 0$$

Damit ist dann auch für alle  $f \in \mathfrak{m}_x^2$  bereits  $\alpha(v)(f) = 0$ . Definiere nun umgekehrt

$$\beta : (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^* \longrightarrow T_{V,x}, \quad l \mapsto (l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n}))$$

Zeige zunächst:  $\beta(l) \in T_{V,x}$  für alle  $l \in (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$ . Sei dazu  $f \in I(V)$  und

$$f_x^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(a) X_i \in I$$

seine Linearisierung. Dann ist

$$f_x^{(1)}(\beta(l)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i - x_i}) = l\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)(X_i - x_i)\right) = l\left(\overline{f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)}\right) = 0$$

Die letzte Gleichheit gilt, da  $f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) \in \mathfrak{m}_x^2$ , denn es gilt

$$\mathbb{K}[V] \ni f = \underbrace{f(x)}_{=0} + f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) + \text{Terme in } \mathfrak{m}_x^2$$

Wir rechnen nach:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(v) &= \beta(\alpha(v)) = \beta\left(f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) v_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_i - x_i})}{\partial X_i}(x) v_1, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_n - x_n})}{\partial X_i}(x) v_n\right) \\ &= (v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

(ii) sowie für  $l \in \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$  und  $f \in \mathfrak{m}_x$

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)(l)(f) &= \alpha(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i - x_i}) \\ &= l\left(\overline{f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)}\right) \\ &= l(\bar{f}), \end{aligned}$$

es folgt also die Behauptung. □

**Folgerung 14.10** Sei  $V$  quasiprojektive Varietät,  $x \in V$ . Dann gilt

$$x \text{ ist nichtsingulär} \iff \dim \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 = \dim \mathcal{O}_{V,x}$$

**Definition 14.11** Ein noetherscher lokaler Ring  $R$  heißt *regulär*, falls

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2 = \dim R,$$

wobei  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal in  $R$  sowie  $\mathbb{K}$  den zugehörigen Restklassenkörper bezeichne.

**Beispiel 14.12** Betrachte  $R = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$  für eine Primzahl  $p \in \mathbb{P}$ . Dann ist  $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$  sowie  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} / p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \cong \mathbb{F}_p$ . Weiter ist

$$\dim \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = 1 = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p = \dim_{\mathbb{F}_p} p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} / p^2\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2,$$

folglich ist  $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$  regulär.

**Lemma 14.13** (*Nakayama-Lemma*) Sei  $R$  lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M$  endlich erzeugter  $R$ -Modul,  $N \subseteq M$  Untermodul. Dann gilt

$$M = N + \mathfrak{m}M \implies M = N.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung gelte  $N = 0$ , denn aus  $M = \mathfrak{m}M + N$  folgt

$$M/N = (N + \mathfrak{m}M)/N \cong \mathfrak{m}M/N \cap \mathfrak{m}M \cong \mathfrak{m}M/N$$

Sei nun also  $M = \mathfrak{m}M$  und nehme an, es gelte  $M \neq 0$ . Dann sei  $x_1, \dots, x_n$  ein minimales Erzeugendensystem von  $M$ . Dann gilt

$$x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad \text{für geeignete } a_i \in \mathfrak{m},$$

also wegen  $R^\times = R \setminus \mathfrak{m}$

$$x_1 \underbrace{(1 - a_1)}_{\notin \mathfrak{m}} = \sum_{i=2}^n a_i x_i \in \langle x_2, \dots, x_n \rangle,$$

ein Widerspruch zur Minimalität. □

**Lemma 14.14** Sei  $(R, \mathfrak{m})$  noetherscher lokaler Ring. Dann bilden  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$  ein minimales Erzeugendensystem von  $\mathfrak{m}$  genau dann, wenn die Restklassen  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$  eine  $\mathbb{K}$ -Vektorraumbasis von  $\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$  bilden.

*Beweis.* " $\implies$ " Sei also  $x_1, \dots, x_n$  ein minimales Erzeugendensystem von  $\mathfrak{m}$ . Sicherlich bildet  $S := \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  ein Erzeugendensystem für  $\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$ . Angenommen,  $S$  ist linear abhängig, d.h. ohne Einschränkung finden wir eine Darstellung

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i \bar{x}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Für  $\tilde{\lambda}_i \in R$  mit  $\bar{\tilde{\lambda}}_i = \lambda_i$  gilt dann

$$x_1 - \sum_{i=2}^n \tilde{\lambda}_i x_i \in \mathfrak{m}^2.$$

Andererseits wird  $\mathfrak{m}^2$  erzeugt von den  $x_i x_j$ . Schreibe also

$$x_1 - \sum_{i=2}^n \tilde{\lambda}_i x_i = \sum_{j=1}^n \mu_{1j} x_1 x_j + \underbrace{\sum_{i,j=2}^n \mu_{ij} x_i x_j}_{=:y} = y + x_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} x_j,$$

wobei  $\mu_i \in R$  geeignete Konstanten sind. Dann folgt

$$x_1 \left( 1 - \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_i x_i}_{\notin \mathfrak{m}} \right) \in \langle x_2, \dots, x_n \rangle,$$

also ein Widerspruch zur Minimalität von  $S$ .

" $\Leftarrow$ " Sei nun umgekehrt  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  eine  $\mathbb{K}$ -Basis von  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Zeige nun, dass  $x_1, \dots, x_n$   $\mathfrak{m}$  erzeugen.

Die Minimalität ist klar. Sei dazu  $N := \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq \mathfrak{m}$ . Dann gilt

$$\mathfrak{m} = N + \mathfrak{m}^2$$

und mit Lemma 14.11 folgt  $N = \mathfrak{m}$ . □

**Proposition 14.15** *Ein noetherscher lokaler Ring  $(R, \mathfrak{m})$  ist genau dann regulär, wenn  $\mathfrak{m}$  von  $\dim R = \text{ht}(\mathfrak{m})$  Elementen erzeugt werden kann.*

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " Sei  $R$  regulär. Dann gilt  $\dim R = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 =: n$ . Dann kann  $\mathfrak{m}$  also von  $n$  Elementen erzeugt werden.

" $\Leftarrow$ " Kann nun umgekehrt  $\mathfrak{m}$  von  $n := \dim R$  Elementen erzeugt werden, so auch  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , das heißt, mit Lemma 14.14 gilt bereits  $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq \dim R$ . Krulls Hauptidealsatz (ohne Beweis) liefert die umgekehrte Ungleichung und damit  $\dim R = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . □

**Folgerung 14.16** Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  quasiprojektive Varietät,  $x \in V$ . Dann gilt

$$x \text{ ist singulär} \iff \dim \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 > \dim_x V$$

**Proposition 14.17** *Jede irreduzible  $d$ -dimensionale Varietät ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche in  $\mathbb{A}^{d+1}(\mathbb{K})$ .*

*Beweis.* Zuz zeigen:  $\mathbb{K}(V)$  ist isomorph zum Funktionenkörper einer Hyperfläche, also

$$\mathbb{K}(V) \cong \text{Quot}(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / \langle f \rangle)$$

für ein geeignetes  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Sei hierfür  $\mathbb{K}[V]/\mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$  eine durch Noethernormalisierung erhaltene, ganze Ringerweiterung. Dann ist  $\mathbb{K}(V)/\mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)$  eine endliche Körperweite-

rung. Ohne Einschränkung sei diese separabel. Dann liefert der Satz vom primitiven Element ein  $y \in \mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)$ , sodass gilt

$$\mathbb{K}(V) = \mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)[y].$$

Sei  $h \in \mathbb{K}(X_1, \dots, X_d)[Y]$  das Minimalpolynom von  $y$  und  $g$  der Hauptnenner von  $h$ . Dann ist

$$f = g \cdot h \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_d, Y] \cong \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{d+1}]$$

und

$$\text{Quot}(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_d, Y] / \langle f \rangle) = \mathbb{K}(V),$$

was die Behauptung liefert. □

**Satz 14.18** Sei  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  nichtleere, quasiprojektive Varietät. Dann ist

$$\text{Sing}(V) := \{x \in V \mid x \text{ ist singular}\}$$

eine echte abgeschlossene Teilmenge.

*Beweis.* Zeige zunächst, dass  $\text{Sing}(V)$  abgeschlossen ist. Ohne Einschränkung sei hierfür  $V$  irreduzibel. Denn sind  $V_1, \dots, V_r$  die irreduziblen Komponenten von  $V$ , so gilt

$$\text{Sing}(V) = \bigcup_{i=1}^r \text{Sing}(V_i) \cup \bigcup_{i \neq j} V_i \cap V_j.$$

Weiter sei  $V$  ohne Einschränkung affin, denn Abgeschlossenheit ist eine lokale Eigenschaft. Wähle nun Erzeuger  $f_1, \dots, f_r$  von  $I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  und betrachte die Jacobimatrix  $\mathcal{J} := \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Sing}(V) &= \{x \in V \mid \text{Rang}(\mathcal{J}(x)) < n - \dim V =: s\} \\ &= \{x \in V \mid \det M(x) = 0 \text{ für alle } s \times s \text{ Untermatrizen } M \text{ von } \mathcal{J}\} \end{aligned}$$

Da die Determinante ein Polynom in  $n$  Variablen ist, ist  $\text{Sing}(V) = V(\det)$  und  $\text{Sing}(V)$  als affine Varietät abgeschlossen. Zeige nun, dass  $\text{Sing}(V)$  eine echte Teilmenge von  $V$  ist. Ohne Einschränkung sei hierfür  $V$  irreduzibel, denn: Sei  $Z$  eine irreduzible Komponente von  $V$  mit  $\text{Sing}(Z) \neq Z$ , so ist  $Z \setminus \text{Sing}(Z)$  offen, nichtleer, also dicht in  $Z$ . Damit enthält  $Z \setminus \text{Sing}(Z)$  einen Punkt  $z$ , die auf keiner anderen irreduziblen Komponente liegt. Wegen  $\mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{V,z}$  folgt  $z \in V \setminus \text{Sing}(V)$ , also  $\text{Sing}(V) \neq V$ . Wegen Proposition 14.17 genügt es, denn Spezialfall  $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$  zu betrachten, wobei  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  ein irreduzibles Polynom von Grad  $\deg f > 0$  ist. Es ist

$$\text{Sing}(V) = \left\{ x \in V \mid \frac{\partial f}{\partial X_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0 \right\}.$$

Angenommen es gelte  $\text{Sing}(V) = V$ . Dann wäre  $\frac{\partial f}{\partial X_i} \in I(V) = \langle f \rangle$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ist  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ , so folgt daraus, dass  $f$  konstant ist, ist  $\text{char}(\mathbb{K}) = p > 0$ , so gilt  $f \in \mathbb{K}[X_1^p, \dots, X_n^p]$ , also  $f = g^p$  für ein  $g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . In beide Fällen erhalten wir einen Widerspruch zur Wahl von  $f$ , es folgt die Behauptung. □



# Kapitel IV

## Nichtsinguläre Kurven

### § 15 Diskrete Bewertungsringe

**Definition 15.1** Eine zusammenhängende, quasiprojektive Varietät  $C$  mit  $\dim C = 1$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\mathbb{K}$  heißt *Kurve*.

**Lemma 15.2** Sei  $(R, \mathfrak{m})$  lokaler, noetherscher, nullteilerfreier Ring und es gelte  $\dim R = 1$ . Falls  $\mathfrak{m}$  ein Hauptideal ist, so ist bereits  $R$  ein Hauptidealring.

*Beweis.* Es sei  $I \triangleleft R$  ein Ideal sowie  $t \in \mathfrak{m}$  ein Erzeuger von  $\mathfrak{m}$ . Ohne Einschränkung gelte  $0 \neq I \neq R$ , das heißt, es gilt  $I \subseteq \mathfrak{m}$ . Wähle  $n$  maximal, sodass  $I \subseteq \mathfrak{m}^n$ . Sei  $x \in I \cap (\mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1})$ . Wegen  $\mathfrak{m}^n \supseteq \langle t^n \rangle$  können wir  $x$  schreiben als

$$x = u \cdot t^n, \quad u \in R.$$

Wäre  $u \notin R^\times$ , so wäre  $u \in \mathfrak{m}$  und damit  $x = u \cdot t^n \in \mathfrak{m}^{n+1}$ , Widerspruch zur Annahme. Damit ist  $t^n = u^{-1}x \in \langle x \rangle \subseteq I \cap (\mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1})$ . Dies ergibt  $\langle t^n \rangle \subseteq \mathfrak{m}^n$ , also  $\langle t^n \rangle = \mathfrak{m}^n$  und

$$\langle t^n \rangle = \mathfrak{m}^n \subseteq I,$$

also insgesamt  $\mathfrak{m}^n = I$ , also ist  $I$  Hauptideal. Es bleibt zu zeigen, dass man ein solches  $n$  wählen kann. Angenommen, es gäbe keines. Dann gilt

$$I \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n =: N.$$

$N$  ist lokal in (einem noetherschen Ring)  $R$ , also endlich erzeugt. Damit ist

$$\mathfrak{m} \cdot N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^{n+1} = N$$

und das Nakayama-Lemma liefert  $N = 0$  - also  $I = 0$ , ein Widerspruch zur Annahme. □

**Proposition 15.3** Es sei  $C$  eine Kurve,  $x \in C$ . Dann gilt

$$x \text{ ist nichtsingulär} \iff \mathcal{O}_{C,x} \text{ ist diskreter Bewertungsring.}$$

*Beweis.* Da  $\mathcal{O}_{C,x}$  noetherscher lokaler Ring von Dimension 1 ist, genügt die Eigenschaft Hauptidealring, um die Behauptung zu zeigen. Nach Lemma 15.2 genügt es hierfür wiederum zu zeigen, dass  $\mathfrak{m}$  ein Hauptideal ist. Nach Folgerung 14.10 gilt

$$x \text{ ist regulär} \iff \dim \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 = \dim \mathcal{O}_{C,x} = 1,$$

nach Krulls Hauptidealsatz kann  $\mathfrak{m}_x$  also von einem Element erzeugt werden, ist also ein Hauptideal. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung + Definition 15.4** Sei  $C$  eine Kurve,  $C$  irreduzibel,  $x \in C$  regulär,  $t \in \mathcal{O}_{C,x}$  ein Erzeuger von  $\mathfrak{m}_x$ . Dann lässt sich  $f \in \mathbb{K}(C)^\times = \text{Quot}(\mathcal{O}_{C,x})^\times$  schreiben als

$$f = u \cdot t^n, \quad n \in \mathbb{Z}, u \in \mathcal{O}_{C,x}^\times.$$

Dann heißt  $n := \text{ord}_x f$  die *Ordnung* von  $f$  in  $x$ . Weiter ist die Zuordnung  $f \mapsto \text{ord}_x f$  eine diskrete Bewertung.

**Beispiel 15.5** Sei  $C = V(Y^2 - X^3 + X)$ ,  $P = (0, 0)$  sowie  $x, y \in \mathbb{K}(C)$ . Es gilt  $Y^2 = X(X^2 - 1)$  auf  $C$ . Wegen

$$X = \underbrace{\frac{1}{X^2 - 1}}_{\in \mathcal{O}_{C,P}^\times} \cdot Y^2 \in \mathcal{O}_{C,P} \quad (*)$$

erhalten wir

$$\text{ord}_P(x) = 2\text{ord}_P(y).$$

Weiter wird  $\mathfrak{m}_P$  erzeugt von  $(\overline{X - 0}, \overline{Y - 0})$ , mit (\*) gilt also

$$\text{ord}_P(y) = 1, \quad \text{ord}_P(x) = 2$$

**Proposition 15.6** Sei  $C$  nichtsinguläre irreduzible Kurve,  $f \in \mathbb{K}(C)^\times$ . Dann gibt es nur endlich viele Punkte  $x \in C$  mit  $\text{ord}_x f \neq 0$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\text{ord}_x f > 0 \iff f \in \mathfrak{m}_x \iff f(x) = 0$$

sowie

$$\text{ord}_x f < 0 \iff \text{ord}_x \frac{1}{f} > 0 \iff \frac{1}{f} \in \mathfrak{m}_x \iff \frac{1}{f}(x) = 0$$

damit ist

$$\{x \in C \mid \text{ord}_x f \neq 0\} = V(f) \cup V\left(\frac{1}{f}\right).$$

Da  $f \neq 0 \neq \pm \frac{1}{f}$ , sind  $V(f), V\left(\frac{1}{f}\right)$  abgeschlossene, echte Teilmengen von  $C$ . Da  $\dim C = 1$  und  $C$  irreduzibel ist, haben  $V(f)$  und  $V\left(\frac{1}{f}\right)$  Dimension 0, das heißt, die irreduziblen Komponenten der beiden Verschwindungsmengen sind Punkte. Da beide aus endlich vielen irreduziblen Komponenten bestehen, ist auch die Vereinigung endlich und somit folgt die Behauptung.



**Proposition 15.7** Sei  $C$  nichtsinguläre, irreduzible Kurve,  $U \subseteq C$  offen und nichtleer,  $V$  projektive Varietät sowie  $f : U \rightarrow V$  ein Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus  $\bar{f} : C \rightarrow V$  mit  $\bar{f}|_U = f$ , das heißt,  $f$  lässt sich in regulären Punkten fortsetzen.

*Beweis. Eindeutigkeit.* Seien  $g, h : C \rightarrow V, g|_U = f = h|_U$ . Dann ist

$$U = \{x \in C \mid g(x) = h(x)\}$$

abgeschlossen und wegen  $\bar{U} = C$  folgt  $g = h$ .

*Existenz.* Ohne Einschränkung sei  $C \setminus U = \{p\}$  sowie  $V = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . Außerdem gelte  $f(U) \not\subseteq V(X_i)$  (denn sonst wäre  $f(U) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ ). Sei weiter

$$W := f^{-1} \left( \bigcap_{i=0}^n U_i \right).$$

$W_i$  ist nichtleer, offen und damit dichte Teilmenge. Definiere

$$h_{ij} = \left( \frac{X_i}{X_j} \circ f \right) = \left\| \frac{f_i}{f_j} \right\|.$$

$h_{ij}$  ist eine wohldefinierte, reguläre Funktion auf  $W$  für alle  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ , also  $h_{ij} \in \mathbb{K}(C)^\times$ .

Sei

$$r_i := \text{ord}_p h_{i0}, \quad i \in \{0, \dots, n\}$$

und wähle  $k$ , sodass

$$r_k = \min\{r_i \mid i \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Es gilt

$$\text{ord}_p h_{ik} = \text{ord}_p \frac{h_{i0}}{h_{k0}} = \text{ord}_p h_{i0} - \text{ord}_p h_{k0} = r_i - r_k \geq 0,$$

also  $h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,p}$ . Damit existiert eine Umgebung  $\tilde{U}$  von  $p$  mit  $h_{ik} \in \mathcal{O}(\tilde{U})$ . Setze

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \neq p \\ (h_{0k}(x) : \dots : h_{nk}(x)), & x = p \end{cases}$$

Beachte:  $\bar{f}$  ist wohldefiniert, da  $h_{kk} = 1$ . In einer Umgebung  $\tilde{U}$  von  $p$  gilt  $x \in \tilde{U} \setminus \{p\}$ , also

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) = f(x) &= ((X_0 \circ f)(x) : \dots : (X_n \circ f)(x)) \\ &= \left( \left( \frac{X_0}{X_k} \circ f \right)(x) : \dots : \left( \frac{X_n}{X_k} \circ f \right)(x) \right) \\ &= (h_{0k}(x) : \dots : h_{nk}(x)), \end{aligned}$$

also ist  $\bar{f}$  Morphismus. □

**Folgerung 15.8** (i) Eine Funktion  $f \in \mathbb{K}(C)$  induziert einen Morphismus  $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ .

(ii) Ist  $C$  nichtsinguläre, zusammenhängende Kurve, so ist  $C$  bereits irreduzibel, denn gäbe es zwei irreduzible Komponenten mit nichtleerem Schnitt, so wäre  $x \in Z_1 \cap Z_2$  singulär (Übung 12.2).

## § 16 Divisoren

In diesem Abschnitt sei  $C$  nichtsinguläre Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\mathbb{K}$ .

**Definition 16.1** (i) Ein (*Weil-*) *Divisor*  $D$  auf  $C$  ist eine formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^n n_i P_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, P_i \in C$$

Schreibweise:  $(P)$  für  $1 \cdot P$ .

(ii) Die *Divisorengruppe* auf  $C$  ist

$$\text{Div}(C) := \{D \mid D \text{ ist Divisor auf } C\}$$

(iii)  $\text{Div}(C)$  ist freie abelsche Gruppe über der Menge  $C$ .

(iv) Für eine Divisor  $D$  wie in (i) heißt

$$\deg(D) := \sum_{i=1}^n n_i$$

der *Grad* von  $D$ .

(v) Wir haben einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\deg : \text{Div}(C) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad D \mapsto \deg(D)$$

(vi) Ein Divisor  $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i \in \text{Div}(C)$  heißt *effektiv*, falls  $n_i \geq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Schreibweise:  $D \geq 0$ .

**Definition + Bemerkung 16.2** (i) Für  $f \in \mathbb{K}(C)^\times$  heißt

$$\text{div}(f) := \sum_{p \in C} \text{ord}_p(f) \cdot P$$

der *Divisor von  $f$* .

(ii)  $\text{div}(f)$  ist Divisor.

(iii) Ein Divisor  $D \in \text{Div}(C)$  heißt *Hauptdivisor*, falls es  $f \in \mathbb{K}(C)^\times$  gibt mit  $D = \text{div}(f)$ .

(iv) Haben einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{div} : \mathbb{K}(C)^\times \longrightarrow \text{Div}(C), \quad f \mapsto \text{div}(f),$$

d.h. es gilt für alle  $f, g \in \mathbb{K}(C)^\times$ :

$$\text{div}(f \cdot g) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$$

(v) Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe

$$\text{Div}_H(C) := \text{Im div}$$

(vi)  $D, D'$  heißen *linear äquivalent*, wenn ihre Differenz  $D - D'$  ein Hauptdivisor ist, schreibe  $D \equiv D'$ .

(vii) Der Quotient

$$\text{Cl}(C) := \text{Div}(C) / \text{Div}_H(C)$$

heißt *Divisorenklassengruppe* von  $C$ .

**Beispiel 16.3** Sei  $C := \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ . Da  $\mathbb{K}$  algebraisch abgeschlossen ist, lässt sich jedes  $f \in \mathbb{K}(C)^\times = \mathbb{K}(X)^\times$  eindeutig schreiben als

$$f = \frac{\prod_{i=1}^n (X - a_i)}{\prod_{j=1}^m (X - b_j)}, \quad a_i \neq b_j \in \mathbb{K} \text{ für alle } i, j.$$

Schreibe  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \cup \{\infty\}$ . Für  $P \in \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$  ist

$$\text{ord}_P f = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i = P\}| - |\{j \in \{1, \dots, m\} \mid b_j = P\}|,$$

denn

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{K}), P} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(\mathbb{K}), P} = \mathbb{K}[X]_{\langle X-p \rangle}$$

wird von  $X - p$  erzeugt. Für  $P = \infty$  ist

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \infty} = \mathbb{K} \left[ \frac{1}{X} \right]_{\langle \frac{1}{X} \rangle}$$

Schreibe

$$f = \frac{X^n}{X^m} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n 1 - \frac{a_i}{X}}{\prod_{j=1}^m 1 - \frac{b_j}{X}} = \left( \frac{1}{X} \right)^{m-n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n 1 - \frac{a_i}{X}}{\prod_{j=1}^m 1 - \frac{b_j}{X}}.$$

Dann folgt  $\text{ord}_\infty f = m - n$ . Damit ist

$$\text{div}(f) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot a_i - \sum_{j=1}^m 1 \cdot b_j + (m - n) \cdot \infty,$$

also  $\text{deg div}(f) = 0$ .Sei umgekehrt  $D \in \text{Div}(C)$  mit  $\text{deg } D = 0$ . Schreibe

$$D = \sum_{i=1}^m 1 \cdot a_i - \sum_{j=1}^m 1 \cdot b_j, \quad a_i \neq b_j \text{ für alle } i, j.$$

Setze

$$f := \frac{\prod_{a_i \neq \infty} (X - a_i)}{\prod_{b_j \neq \infty} (X - b_j)} \in \mathbb{K}(C)^\times.$$

Dann gilt  $\text{div}(f) = D$  und damit

$$\text{Div}_H(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) = \{D \in \text{Div}(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) \mid \text{deg } D = 0\} = \ker \text{deg}$$

und mit dem Homomorphiesatz

$$\text{Cl}(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) = \text{Div}(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) / \text{Div}_H(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) \cong \mathbb{Z}.$$

Weiters Vorgehen: Zeige  $\deg \operatorname{div}(f) = 0$  für alle Kurven  $C$  und  $f \in \mathbb{K}(C)^\times$ . Fasse hierfür  $f$  als Morphismus  $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  auf. Wollen haben:

- (i)  $\operatorname{div}(f) = f^*((0) - (\infty)) = \text{"Nulstellen minus Polstellen"}$ .
- (ii)  $\deg f^*(D) = \deg f \deg D$ .

**Bemerkung + Definition 16.4** Sei  $f : C_1 \rightarrow C_2$  surjektiver, nichtkonstanter Morphismus zwischen zwei nichtsingulären Kurven.

- (i) Sei  $Q \in C_2$ ,  $P \in f^{-1}(Q) \subseteq C_1$  sowie  $t \in \mathfrak{m}_Q$  eine Uniformisierende, d.h. es gilt  $\langle t \rangle = \mathfrak{m}_Q$ . Dann heißt

$$e_P := e_P(f) = \operatorname{ord}_P(t \circ f)$$

der *Verzweigungsindex* von  $f$  in  $P$ .

- (ii) Definiere den Gruppenhomomorphismus

$$f^* : \operatorname{Div}(C_2) \rightarrow \operatorname{Div}(C_1), \quad Q \mapsto \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$

- (iii) Für  $g \in \mathbb{K}(C_2)^\times$  gilt:

$$f^*(\operatorname{div}(g)) = \operatorname{div}(g \circ f).$$

Insbesondere ist  $f^*(\operatorname{Div}_H(C_2)) \subseteq \operatorname{Div}_H(C_1)$ .

- (iv)  $f$  induziert einen Homomorphismus

$$f^* : \operatorname{Cl}(C_2) \rightarrow \operatorname{Cl}(C_1), \quad [D] \mapsto [f^*(D)]$$

*Beweis.* (i) Zu zeigen:  $e_P(f)$  ist unabhängig von der Wahl von  $t$ . Sei  $t' \in \mathfrak{m}_Q$  eine weitere Uniformisierende. Dann gibt es  $u \in \mathcal{O}_{C_2, x}^\times$  mit  $t' = ut$ . Damit ist

$$\operatorname{ord}_P(t' \circ f) = \operatorname{ord}_P(ut \circ f) = \operatorname{ord}_P((u \circ f) \cdot (t \circ f)) = \underbrace{\operatorname{ord}_P(u \circ f)}_{=0} + \operatorname{ord}_P(t \circ f) = \operatorname{ord}_P(t \circ f),$$

wobei letzte Gleichung gilt, da  $u \circ f$  Einheit in  $\mathcal{O}_{C_1, P}$  mit Inverser  $\frac{1}{u} \circ f$  ist.

- (ii) Zu zeigen:  $f^{-1}(Q)$  ist endlich, denn dann ist  $f^*(Q)$  Divisor. Da  $f$  stetig ist, ist  $f^{-1}(Q)$  abgeschlossen und echte Teilmenge von  $C_1$ , denn  $f^{-1}(Q) \neq C_1$  (da sonst  $f$  konstant wäre). Da  $\dim C_1 = 1$ , folgt damit  $\dim f^{-1}(Q) = 0$ , also ist  $f^{-1}(Q)$  nach 2.2 endlich.

- (iii) Es gilt

$$f^*(\operatorname{div}(g)) = f^*\left(\sum_{Q \in C_2} \operatorname{ord}_Q(g) \cdot Q\right) = \sum_{Q \in C_2} \operatorname{ord}_Q(g) \cdot f^*(Q) = \sum_{Q \in C_2} \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \operatorname{ord}_Q(g) e_P(f) \cdot P$$

sowie

$$\operatorname{div}(g \circ f) = \sum_{P \in C_1} \operatorname{ord}_P(g \circ f) \cdot P = \sum_{Q \in C_2} \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \operatorname{ord}_P(g \circ f) \cdot P$$

das heißt, es ist zu zeigen:

$$s := \operatorname{ord}_P(g \circ f) = \operatorname{ord}_Q(g) e_P(f) =: r \cdot e_P(f)$$

für alle  $Q = f(P)$ .

Seien dazu  $t_Q, t_P$  Uniformisierende von  $\mathfrak{m}_Q$  bzw.  $\mathfrak{m}_P$ , d.h. es gilt  $\langle t_Q \rangle = \mathfrak{m}_Q, \langle t_P \rangle = \mathfrak{m}_P$ .

Dann gibt es  $u, u' \in \mathcal{O}_{C_1, P}^\times$  sowie  $v \in \mathcal{O}_{C_2, Q}^\times$  sodass gilt:

$$g \circ f = u \cdot t_P^s, \quad g = v \cdot t_Q^r, \quad t_Q \circ f = u' \cdot t_P^{r \cdot e_P(f)}.$$

Wir rechnen

$$ut_P^s = g \circ f = (v \cdot t_Q^r) \circ f = (v \circ f) \cdot (t_Q \circ f)^r = (v \circ f) \left( u' t_P^{e_P(f)} \right)^r = (v \circ f) \cdot u'^r \cdot t_P^{e_P(f) \cdot r}$$

und wegen der Eindeutigkeit der Darstellungen links und rechts folgt

$$s = e_P(f) \cdot r,$$

also die Behauptung.

(iv) Folgt aus (ii) und (iii). □

**Folgerung 16.5** Sei  $C$  nichtsingulär,  $f \in \mathbb{K}(C)^\times$ . Dann definiert  $f$  einen Morphismus  $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  und es gilt

$$\operatorname{div}(f) = f^*((0) - (\infty)).$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus Proposition 15.7.

Sei  $P \in C$  mit  $f(P) = 0$ . Dann ist  $X$  eine Uniformisierende von  $\mathfrak{m}_P$  und wir erhalten

$$e_P(f) = \operatorname{ord}_P(X \circ f) = \operatorname{ord}_P(f)$$

Ist  $P = \infty$ , so ist  $\frac{1}{X}$  Uniformisierende von  $\mathfrak{m}_P$  und wir erhalten

$$e_P(f) = \operatorname{ord}_P\left(\frac{1}{X} \circ f\right) = \operatorname{ord}_P\left(\frac{1}{f}\right) = -\operatorname{ord}_P(f).$$

Damit gilt

$$f^*((0) - (\infty)) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} e_P(f) \cdot P - \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} e_P(f) \cdot P = \sum_{P \in C} \operatorname{ord}_P(f) \cdot P = \operatorname{div}(f),$$

was zu zeigen war. □

**Bemerkung + Definition 16.6** Sei  $f : C_1 \rightarrow C_2$  surjektiver Morphismus nichtsingulärer, projektiver Kurven. Dann induziert  $f$  einen Körperhomomorphismus

$$f^\# : \mathbb{K}(C_2) \rightarrow \mathbb{K}(C_1)$$

$\mathbb{K}(C_2)$  kann damit via  $f^\#$  als Teilkörper von  $\mathbb{K}(C_1)$  aufgefasst werden. Die Erweiterung  $\mathbb{K}(C_1)/\mathbb{K}(C_2)$  ist endlich.  $\deg f := [\mathbb{K}(C_1) : \mathbb{K}(C_2)]$  heißt *Grad* von  $f$ .

*Beweis.* Sicherlich sind  $\mathbb{K}(C_1), \mathbb{K}(C_2)$  endlich erzeugt über  $\mathbb{K}$ . Weiter gilt  $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(C_1) = 1 = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(C_2)$ , d.h. die Erweiterung ist algebraisch. Insgesamt folgt also  $[\mathbb{K}(C_1) : \mathbb{K}(C_2)] < \infty$ . □

**Satz 16.7** (i) Jeder Hauptdivisor auf einer nichtsingulären, projektiven Kurve hat Grad 0.

(ii) Sei  $f : C_1 \rightarrow C_2$  surjektiver Morphismus nichtsingulärer, projektiver Kurven. Dann gilt für jeden Punkt  $Q \in C_2$

$$\deg f^*(Q) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) = \deg f.$$

Weiter gilt damit für jeden Divisor  $D \in \text{Div}(C_2)$

$$\deg f^*(D) = \deg f \cdot \deg D.$$

*Beweis.* (i) Es sei  $f \in \mathbb{K}(C)^\times$ . Dann lässt sich  $f$  fortsetzen zu  $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ . Damit ist

$$\deg(\text{div} f) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} e_P(f) - \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} e_P(f) = \deg f^*((0) - (\infty)) = \deg f \cdot \deg((0) - (\infty)) = 0.$$

(ii) Wird noch hinzugefügt. □

## § 17 Der Satz von Riemann-Roch

In diesem Paragraphen sei  $C$  stets nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\mathbb{K}$ .

**Definition + Bemerkung 17.1** Es sei  $D = \sum_{P \in C} n_P \cdot P$  ein Divisor auf  $C$ .

(i) Der *Riemann-Roch-Raum* zu  $D$

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathbb{K}(C)^\times \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

(ii)  $l(D) := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(D)$ .

(iii) Es gilt  $\mathcal{L}(0) = \mathbb{K}$ .

(iv) Ist  $\deg D < 0$ , so ist  $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ .

(v) Für linear äquivalente Divisoren gilt  $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L}(D')$ .

(vi) Für  $D' \geq D$  gilt  $\mathcal{L}(D) \leq \mathcal{L}(D')$ .

*Beweis.* (i) Es gilt  $f \in \mathcal{L}(D) \iff$  für jeden Punkt  $P \in C$  ist  $\text{ord}_P(f) + n_P \geq 0$ . Für  $f, g \in \mathcal{L}(D)$  ist

$$\text{ord}_P(f + g) \geq \min\{\text{ord}_P(f), \text{ord}_P(g)\} \geq -n_P,$$

also  $f + g \in \mathcal{L}(D)$ .

(iii) Es gilt  $f \in \mathcal{L}(0)$  genau dann, wenn  $\text{ord}_P(f) \geq 0$  für alle  $P \in C$ . Damit gilt  $f \in \mathcal{O}_C(C) = \mathbb{K}$ .

(iv) Es gilt  $\deg(\text{div} f) = 0$ , also  $\deg(\text{div} f + D) = \deg D < 0$  für alle  $f \in \mathbb{K}(C)^\times$ .

(v) Es sei  $D' = D + \text{div} f$  für ein  $f \in \mathbb{K}(C)^\times$ . Dann ist

$$\alpha : \mathcal{L}(D') \rightarrow \mathcal{L}(D), \quad g \mapsto f \cdot g$$

ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraumisomorphismus, denn es gilt

$$g \in \mathcal{L}(D') \iff \operatorname{div} g + D' \geq 0 \iff \operatorname{div} g + \operatorname{div} f + D \geq 0 \iff \operatorname{div} f \cdot g + D \geq 0. \iff f \cdot g \in \mathcal{L}(D).$$

Damit folgt insgesamt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 17.2** Für jeden Divisor  $D \in \operatorname{Div}(C)$  und jeden Punkt  $P \in C$  gilt

$$(i) \quad l(D + P) \leq l(D) + 1.$$

$$(ii) \quad l(D) \leq \deg D + 1, \text{ falls } \deg D \geq -1.$$

Insbesondere ist  $\mathcal{L}(D)$  endlichdimensional.

*Beweis.* (i) Es gilt  $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D + P)$  nach 17.1. Für  $f \in \mathcal{L}(D + P) \setminus \mathcal{L}(D)$  gilt  $\operatorname{ord}_P(f) = -n_P - 1$ .

Für  $f, g \in \mathcal{L}(D + P) \setminus \mathcal{L}(D)$  ist also

$$\operatorname{ord}_P(f) = \operatorname{ord}_P(g) = -n_P - 1.$$

Sei nun  $t \in \mathfrak{m}_P$  Uniformisierende, d.h. es gilt  $\langle t \rangle = \mathfrak{m}_P$ . Schreibe

$$f = u \cdot t^{-n_P-1}, \quad g = v \cdot t^{-n_P-1}, \quad u, v \in \mathcal{O}_{C,P}^\times.$$

Für

$$h = u(P)g - v(P)f \in \mathcal{L}(D + P)$$

gilt

$$\operatorname{ord}_P(h) = \operatorname{ord}_P((u(P)v - v(P)u)t^{-n_P-1}) \geq -n_P,$$

also  $h \in \mathcal{L}(D)$ . Damit ist  $g \in \mathcal{L}(D) + \langle f \rangle$ , also

$$\dim \mathcal{L}(D + P) \leq \dim \mathcal{L}(D) + 1.$$

(ii) per Induktion über  $d = \deg D$ :

$d = -1$ . Klar, denn es ist  $\mathcal{L}(0) = 0$ .

$d \geq 0$ . Sei  $P \in C$ ,  $D' = D - P$ . Mit der Induktionsvoraussetzung folgt  $l(D') \leq \deg D' + 1 = d$ ,

also mit (i)  $l(D) = l(D' + P) \leq d + 1$ .  $\square$

**Satz + Definition 17.3** (*Satz von Riemann*) Es gibt eine Konstante  $\gamma \in \mathbb{N}_0$ , sodass für jeden Divisor  $D \in \operatorname{Div}(C)$  gilt:

$$l(D) \geq \deg D + 1 - \gamma.$$

Das kleinste  $\gamma$  mit dieser Eigenschaft nennen wir das *Geschlecht von  $C$* . Schreibe

$$g := g(C) = \min\{\gamma \in \mathbb{N}_0 \mid l(D) \leq \deg D + 1 - \gamma\}$$

**Satz 17.4** (*Satz von Riemann-Roch*) Es gibt einen (bis auf lineare Äquivalenz eindeutigen) Divisor  $K$  auf  $C$ , der sogenannte kanonische Divisor, sodass für alle Divisoren  $D \in \operatorname{Div}(C)$  gilt:

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g(C).$$